应用数学和力学，第 9 卷第11期（1988年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 非线性系统运动稳定性的一种判据*

赵 俊 三

（西北工业大学，1985年7月2日收到）

**摘 要**

对于自治的非线性系统来说，只要其线性部分系数矩阵的特征值不属于临界情形，其无扰运动在其足够小的邻域内的稳定性完全可以由其线性部分的特征值确定。关于线性系统的稳定性，已有不少简单易行的判别方法，而关于非线性系统的稳定性，很多数学家和力学家作了大量的研究工作；但大都是针对特殊类型的非线性系统解决了一些问题，直到现在为止，还没有普遍适用于任何的非线性系统的简单易行的判别方法。本文所给的是判别非线性系统稳定性的充要条件，常用的克拉索夫斯基方法只是这一方法的一个特例[1],[2]。

## 一、判别非线性系统运动稳定性的一个定理

设系统的微分方程为

$$\dot{x}=f(x) \tag{1.1}$$

其中$x$为$n$维向量，$f(x)$为连续可微的$n$维向量函数且$f(0)=0$。

如令$j_{kl}=\partial f_k/\partial x_l$（$\forall k,l\in N$），其中 $N$ 为下标集合$\{1,2,\cdots,n\}$，则系统(1.1)的雅可比(Jacobi)矩阵可写成$J(x)=[j_{kl}]$。如果$J(x)$可表示成

$$J(x)=DX(x) \tag{1.2}$$

而$X(x)$可表示成

$$X(x)=S(x)-C(x)/2 \tag{1.3}$$

其中$D$为实对角阵，而$S(x)$为反对称矩阵，$C(x)$为正定对称矩阵，则系统(1.1)的无扰运动为渐近稳定的充分与必要条件是$D$的所有对角线元素都是正的。

**证** 由于

$$J(x)=D[S(x)-C(x)/2] \tag{1.4}$$

而$D$是实对角矩阵，$S(x)$是反对称矩阵，$C(x)$是正定对称矩阵，故

$$J^T(x)=[-S(x)-C(x)/2]D$$

于是，得

$$J^T(x)D^{-1}+D^{-1}J(x)=-C(x) \tag{1.5}$$

此时，取$V(x)=f^T(x)D^{-1}f(x)$为李雅普诺夫函数，并注意到$\dot{f}(x)=J(x)f(x)$ 则

* 钱伟长推荐.

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \dot{f}^T(x)D^{-1}f(x)+f^T(x)D^{-1}\dot{f}(x)\\
&= f^T(x)J^T(x)D^{-1}f(x)+f^T(x)D^{-1}J(x)f(x)\\
&= f^T(x)[J^T(x)D^{-1}+D^{-1}J(x)]f(x)\\
&= -f^T(x)C(x)f(x)
\end{aligned}
$$

可见，当且仅当$D$的对角元素都大于零时，系统（1.1）的无扰运动是渐近稳定的。从而证明了上述定理。

值得指出：如果$D$的对角元素有正有负，则系统(1.1)的无扰运动是不稳定的。

## 二、矩阵D的确定方法

由上述定理的证明过程可知：如果矩阵$J(x)$能满足方程(1.4)就一定能满足方程（1.5），而满足方程(1.5)的条件是矩阵

$$J^T(x)D^{-1}+D^{-1}J(x) \tag{2.1}$$

的各阶主子式满足条件[3]：

$$(-1)^k\Delta_k>0 \qquad (\forall k\in N) \tag{2.2}$$

其中

$$
\Delta_k=\begin{vmatrix}
2d_1j_{11} & d_1j_{12}+d_2j_{21} & \cdots & d_1j_{1k}+d_kj_{k1}\\
d_1j_{12}+d_2j_{21} & 2d_2j_{22} & \cdots & d_2j_{2k}+d_kj_{k2}\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\
d_1j_{1k}+d_kj_{k1} & d_2j_{2k}+d_kj_{k2} & \cdots & 2d_kj_{kk}
\end{vmatrix}
$$

将$\Delta_k$按$d_k$展开，得

$$
\Delta_k=d_k^2\begin{vmatrix}
 & & j_{k1}\\
 & \Delta_{k-1} & j_{k2}\\
 & & \vdots\\
j_{k1} & j_{k2}\cdots\cdots & 0
\end{vmatrix}
+2d_k\begin{vmatrix}
 & & j_{k1}\\
 & \Delta_{k-1} & j_{k2}\\
 & & \vdots\\
d_1j_{1k} & d_2j_{2k}\cdots\cdots & j_{kk}
\end{vmatrix}
+\begin{vmatrix}
 & & d_1j_{1k}\\
 & \Delta_{k-1} & d_2j_{2k}\\
 & & \vdots\\
d_1j_{1k} & d_2j_{2k}\cdots\cdots & 0
\end{vmatrix}
$$

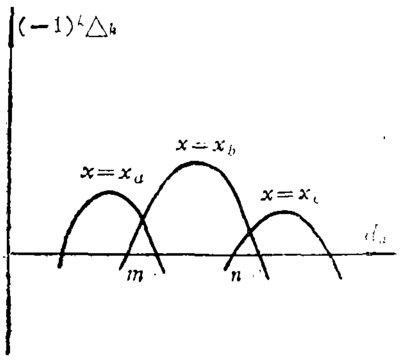


图 1

如果将式(2.2)中 $d_k^2$，$d_k$，$d_k^0$ 的系数中的$x$看成参数，式(2.2)代表抛物线族。一般来说，$d_k$不可能是适用于$x$的任意区间的常数。但在$x$的某一区间上$d_k$是可以取某一常数值而使$(-1)^k\Delta_k>0$，例如，如图所示，当$x_a<x<x_b$，只要取$m$区间内的$d_k$值即可保证$(-1)^k\Delta_k>0$。当$x_b<x<x_c$时，取$n$区间内的$d_k$值即可保证$(-1)^k\Delta_k>0$。因此，在不同的区间上存在着不同的$d_k$足以使$(-1)^k\Delta_k>0$。根据求得不同区间上$d_k$的符号就可以区分出哪些区间是稳定区，哪些区间是不稳定区。

如果所求得的$d_k>0(\forall k\in N)$，对所有的$x$都适用，而且随着$\|x\|\to\infty$，$V(x)\to\infty$，则系统(1.1)的无扰运动是全局渐近稳定的。

## 三、一 个 推 论

显然，当$D$为单位矩阵，即$D=I$时，可以直接得到常用的克拉索夫斯基定理：对于非线性系统(1.1)，如果矩阵$[J^T(x)+J(x)]$为负定，可取$V(x)=f^T(x)f(x)$为李雅普诺夫函数，由于$\dot{V}(x)$为负定，即可用李雅普诺夫定理断定系统(1.1)的无扰运动是渐近稳定的。如果当$\|x\|\to\infty$时，还有$V(x)=f^T(x)f(x)\to\infty$，则系统(1.1)的无扰运动是全局渐近稳定的。

## 四、应 用 举 例

例 设系统的微分方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=(B/A-C/A)x_2x_3+k_1x_1\\ \dot{x}_2&=(C/B-A/B)x_3x_1+k_2x_2\\ \dot{x}_3&=(A/C-B/C)x_1x_2+k_3x_3\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

试判别其无扰运动的稳定性。

解：令 $(B/A-C/A)=a$，$(C/B-A/B)=b$，$A/C-B/C=c$。

则

$$J(x)=\begin{bmatrix}k_1 & ax_3 & ax_2\\ bx_3 & k_2 & bx_1\\ cx_2 & cx_1 & k_3\end{bmatrix}.$$

$\therefore$ $J^T(x)D^{-1}+D^{-1}J(x)=$

$$\begin{bmatrix}2d_1k_1 & (ad_1+bd_2)x_3 & (ad_1+cd_3)x_2\\ (ad_1+bd_2)x_3 & 2d_2k_2 & (bd_2+cd_3)x_1\\ (ad_1+cd_3)x_2 & (bd_2+cd_3)x_1 & 2d_3k_3\end{bmatrix} \tag{4.2}$$

设 $A<B<C$，则令

$$d_1a+d_2b=0$$
$$d_1a+d_3c=-1$$
$$d_2b+d_3c=0$$

可解得

$$d_1=-1/(2a)=A/[2(C-B)]>0$$
$$d_2=1/(2a)=A/[2(C-B)]>0$$
$$d_3=-1/(2c)=C/[2(B-A)]>0$$

只要$k_1<0$，$k_2<0$，$k_3<0$，且$4d_1d_2k_1k_2>x_2^2$，矩阵(1.2)便是负定的，故系统(1.1)的无扰运动在上述条件下是渐近稳定的。

### 参 考 文 献

[1] 秦元勋、王慕秋、王联，《运动稳定性理论与应用》，科学出版社（1981），234—352.

[2] 绪方胜彦，《现代控制工程》，科学出版社（1978），550—570.

[3] 甘特马赫尔 Ф. Р.，《矩阵论》（上），高等教育出版社（1957），293—336.

# A Criterion for the Stability of Motion of Nonlinear Systems

Zhao Jun-san

(*Northwestern Polytechnical University, Xi'an*)

**Abstract**

As to an autonomous nonlinear system, the stability of the equilibrium state in a sufficiently small neighborhood of the equilibrium state can be determined by eigenvalues of the linear part of the nonliear system provided that the eigenvalues are not in a critical case. Many methods may be used to detect the stability for a linear system. A lot of researches for determining the stability of a nonlinear system are completed by mathematicians and mechanicians, but most of them are methods for the special forms of nonlinear systems. Till now, none of the methods can be conveniently applied to all the nonlinear systems. The method introduced by this paper gives the necessary and sufficient conditions of the stability of a nonlinear system. The familiar Krasevski method is a special case of this method[1][2].