

结构中的离散弹性支承*

王 蜀

(上海市应用数学和力学研究所, 1987年12月9日收到)

摘 要

有几篇文章已经涉及结构的离散弹性支承。它与连续弹性支承有什么关系, 两种支承情况对于结构动力特性产生多大差异, 这是人们关心的问题。本文通过分析指出, 频率是反应系统总能量中动能和势能的比例关系, 离散支承和连续支承之间通过某种能量的等效转化, 可保证频率不变。并给出了梁的理论推导和旋转壳的数值结果。

一、引 言

在目前的工程结构中, 有许多是由离散弹性支承支持的, 如火车轨道, 体育场的顶蓬和大型双曲冷却塔等。在某些复杂结构(如离散支承的壳体)的自由振动分析中, 一般将离散弹性支承转化为连续弹性支承, 以简化计算^[1,2,4,12]。在计算双曲冷却塔的动力特性时, C.S.Gran 和 T.Y.Yang^[7,8,5,9]使用了四边形单元模拟壳体, 用梁单元模拟离散柱支承。这样, 可以说是较为真实地反应了离散支承效应, 但计算量相当大。而 J.M.Deb Nath^[9]在用四边形壳体单元计算双曲双冷却塔的动力特征时, 简单地将底部的一圈单元中的一些单元去掉, 以模拟冷却塔底部的离散支承, 得出的结论是在某种模拟状态下对频率的影响较大(最低频率降低约56%)。这种模拟计算显然是不精确且不合理的。本文利用能量法仔细讨论了梁在离散弹性支承和连续弹性支承两种情况下的频率特性, 指出将离散弹性支承运用适当的能量等效原理转化为连续弹性支承并不改变系统的频率。本文也用旋转壳有限元代表壳体, 将离散柱支承系统用能量等效原理处理为等效壳体元, 计算了双曲冷却塔的动力特性, 并与 C.S.Gran 等^[7]和 S.K.Sen 等^[3]的结果进行了比较, 其结果是很一致的。由此, 本文提出系统的自振频率反应了系统总能量中动能和势能的比例关系, 系统能量中的这种比例关系不变, 则系统的频率也不变。

二、梁 的 振 动

为了说明问题起见, 假设考虑的梁为一简支梁(图1), 长为 l , 截面积为 S , 弯曲刚度

* 卢文达推荐。

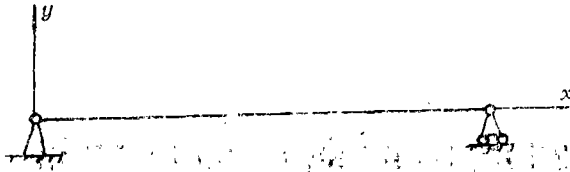


图 1

为 EI ，密度为 γ/g 。再设梁受连续弹性支承时的弹性系数为 k_0 ，而梁受离散弹性支承的数目为 m （彼此等距），每个弹簧的弹性系数为 k_d 。下面用能量法推导两种情况下的频率方程。

i) 连续弹性支承

首先将系统的自由度折减为 n 个自由度，设位移函数如下：

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x) \quad (2.1)$$

其中 $\phi_i(x)$ 是 n 个可能位移函数，并满足边界条件， a_i 为待定常数。

这样可写出系统的势能为：

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[\sum_{i=1}^n a_i \phi_i''(x) \right]^2 dx + \frac{1}{2} k_0 \int_0^l \left[\sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x) \right]^2 dx \quad (2.2)$$

动能为：

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l (\gamma S/g) \left[\sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x) \right]^2 dx \quad (2.3)$$

由此可写出 Rayleigh 商如下：

$$R(Y) = U_{\max}/T_{\max} = \frac{A(a_1, a_2, \dots, a_n)}{B(a_1, a_2, \dots, a_n)} \quad (2.4)$$

由 Rayleigh-Ritz 法知 (2.4) 式的驻值即为系统圆频率的平方： $\omega^2 = SA/B$

其驻值条件为：

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

或写为：

$$\frac{\partial A}{\partial a_i} - \omega^2 \frac{\partial B}{\partial a_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.6)$$

由 (2.2) 和 (2.3) 式得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial a_i} &= \int_0^l EI \left[\sum_{j=1}^n a_j \phi_j''(x) \right] \phi_i''(x) dx + \int_0^l k_0 \left[\sum_{j=1}^n a_j \phi_j(x) \right] \phi_i(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \left[\int_0^l (EI \phi_j'' \phi_i'' + k_0 \phi_j \phi_i) dx \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial B}{\partial a_i} = \int_0^l \frac{\gamma S}{g} \left[\sum_{j=1}^n a_j \phi_j \right] \phi_i dx$$

$$= \sum_{j=1}^n a_j \left[\int_0^l \frac{\gamma S}{g} \varphi_j \varphi_i dx \right] \quad (2.8)$$

将上两式代入(2.6)式, 得:

$$\sum_{j=1}^n a_j \int_0^l \left(EI \varphi_j'' \varphi_i'' + k_0 \varphi_j \varphi_i - \omega^2 \frac{\gamma S}{g} \varphi_j \varphi_i \right) dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.9)$$

$$\text{令 } C_{ij} = \int_0^l \left(EI \varphi_j'' \varphi_i'' + k_0 \varphi_j \varphi_i - \omega^2 \frac{\gamma S}{g} \varphi_j \varphi_i \right) dx \quad (2.10)$$

因此由(2.9)式得一个 n 阶齐次方程组:

$$\left. \begin{aligned} C_{11}a_1 + C_{12}a_2 + \dots + C_{1n}a_n &= 0 \\ C_{21}a_1 + C_{22}a_2 + \dots + C_{2n}a_n &= 0 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \\ C_{n1}a_1 + C_{n2}a_2 + \dots + C_{nn}a_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

由于参数 a_i 不全为零, 故系数行列式应为零:

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

(2.12)式是关于 ω^2 的 n 次代数方程, 由此可求出 n 个根 $\omega_i^2 (i=1, 2, \dots, n)$, 这就是系统的最初几个频率解。

ii) 离散弹性支承

与i)相似, 设位移函数为:

$$G(x) = \sum_{i=1}^n b_i \psi_i(x) \quad (2.13)$$

则系统的动能类似(2.3)式, 而势能为:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[\sum_{i=1}^n b_i \psi_i''(x) \right]^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m k_d \left[\sum_{i=1}^n b_i \psi_i(x_j) \right]^2 \quad (2.14)$$

通过与i)类似的推导, 得:

$$\sum_{j=1}^n b_j \left[\int_0^l EI \psi_j'' \psi_i'' dx + k_d \sum_{i=1}^m \psi_j(x_i) \psi_i(x_i) - \omega^2 \frac{\gamma S}{g} \int_0^l \psi_j \psi_i dx \right] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.15)$$

由(2.15)同样导出一个 ω^2 的 n 次代数方程。

如令(2.15)式中的 k_d 对每个 i 和 j 分别与i)中的 k_0 有如下关系式:

$$k_d^{(ij)} = \frac{\int_0^l \psi_i(x) \psi_j(x) dx}{\sum_{i=1}^m \psi_i(x_i) \psi_j(x_i)} k_0 \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad (2.16)$$

则得到 i) 中同样的一系列方程, 表示离散弹性支承已转化为连续弹性支承来计算. 不难验证, (2.16) 式表示将离散弹性支承转化为连续弹性支承时要求两种支承系统中的势能相等. 在实际应用中, 一般要求 $n \leq m$. 因此, 当离散支承数目较大时, 这一转化是有效的.

对于复杂的 $\psi_i(x)$, (2.16) 式的应用较为困难. 但是对于很多情况, (2.16) 式能导出非常简单而有用的结果.

对于较软的离散弹性支承简支梁, 可设,

$$\psi_i(x) = \sin(i\pi x/l) \quad (2.17)$$

则有:

$$\int_0^l \psi_i(x) \psi_j(x) dx = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \frac{1}{2} l & (i = j) \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\sum_{i=1}^m \psi_i(x_i) \psi_j(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{m+1}{2} & i = j \text{ 且 } n < m \end{cases} \quad (2.19)$$

这样便得出两种支承情况相互转化的一个非常简单的关系式:

$$k_o = \frac{m+1}{l} k_d \quad (2.20)$$

这里的方法有一个非常重要的应用——离散柱支承的旋转壳体, 这将在下一节讨论.

三、离散柱支承的旋转壳

对于旋转壳, 其任意位移或应力参数 $\chi(s, \theta)$ 均可展开为三角级数 (s 为子午向弧长, θ 为周向角):

$$\chi(s, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} [\chi_k(s) \cos k\theta + \chi'_k(s) \sin k\theta] \quad (3.1)$$

则壳体和离散柱支承系统的总势能为:

$$U = U_{壳} + \frac{c}{2} \{U\}^T [K] \{U\} \quad (3.2)$$

其中 $U_{壳}$ 是壳体部分的势能, 详见文 [14], $\{U\}$ 是支承末端在总体坐标下的位移向量, $[K]$ 是相应一对支承的刚度矩阵, 详见文 [14], c 是支承的对数.

设 c 对支柱将区间 $[0, 2\pi]$ 等分为 c 等份, 并将每一对支柱置于每一等份的左端点上, 同时假设第一对人字柱设置于 0° 处, 则第 λ 对支柱的坐标为:

$$\theta_\lambda = \frac{2(\lambda-1)}{c} \pi \quad (\lambda=1, 2, \dots, c) \quad (3.3)$$

现将每对支柱的位移向量 $\{U\}_\lambda$ 沿环向展开成 Fourier 级数, 有:

$$\{U\}_\lambda = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \{U\}_{\lambda k} \cos k\theta_\lambda \cos k\theta \quad (3.4)$$

其中 $\{U\}_{\lambda k}$ 即相当于壳体第 k 谐波的节圆向量. 这样, (2.2) 式中离散柱支承部分的势能即可写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^c \{U\}_\lambda^T [K] \{U\}_\lambda &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^c \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \{U\}_k^T [K] \{U\}_k (\cos k\theta_\lambda \cos k\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \{U\}_k^T [K] \{U\}_k \sum_{\lambda=1}^c \cos^2 k\theta_\lambda \int_0^{2\pi} \cos^2 k\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{c}{2\pi} \sum_{k=0}^{sk} \{U\}_k^T [K] \{U\}_k + O(sk+1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

式中 $O(sk+1)$ 表示 $k > sk$ 以后的所有项，这里利用了下列公式^[15]：

$$\sum_{k=1}^n \{\cos(2\pi kl/n)\}^m = [1 + (-1)^m] n(m!) \left[\left(\frac{m}{2}\right)! \right]^{-2} \cdot \frac{1}{2^{m+1}} \quad (n, l=1, 2, 3, \dots, l, m < n) \quad (3.6)$$

因此从 (3.5) 式就可得到将离散柱支承系统转化为等效壳体时，第 k 谐波的刚度矩阵 $[K]$ 为：

$$[K] = -\frac{c}{2\pi} [K] \quad (3.7)$$

基于上述推导，下面给出三个数值结果。

(a) 离散支承的刚性圆柱壳的扭转振动及上下振动。图 2 是其示意图。刚性圆柱壳的尺寸为：高度 $H=84.2\text{m}$ ；内径 $r=33.94\text{m}$ ；外径 $R=34.94\text{m}$ ；离散支承为 40 对人字支柱，每根支柱与地面夹角 $\alpha=69.5^\circ$ ；支承长度 $l_0=6.33\text{m}$ ；截面 $A=b \times b=0.16^2\text{m}^2$ ；性弹模量 $E=2700000\text{T/m}^2$ ；质量密度 $\rho=0.245\text{T} \cdot \text{S}^2/\text{m}^4$ 。

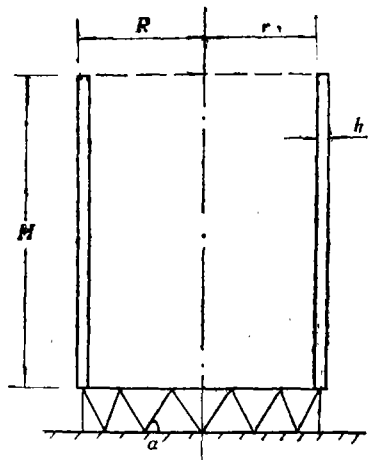


图 2

首先求出解析解，扭转方程为：

$$H\rho J_r \ddot{\phi} + K_\phi \phi = 0 \quad (3.8)$$

其中 $J_r = \pi(R^4 - r^4)/2$ 是刚性圆柱壳截面的极惯性矩，

$K_\phi = l_0^{-1} 2cAE \cos^2 \alpha \bar{R}^2$ ($\bar{R} = (R+r)/2$) 是 40 对人字柱产生的总扭振刚度，

ϕ 是扭转角。

令 $\phi = A \exp[i\omega t]$ ，则得扭转频率：

$$\omega_r^2 = \frac{2cAE \cdot \bar{R}^2}{\rho l_0 H J_r} \cos^2 \alpha \quad (3.9)$$

代入数值，得自然频率：

$$f_r = 1.9490548\text{Hz}$$

上下振动方程为：

$$Mu + Ku = 0 \quad (3.10)$$

其中 $M = \rho H \pi (R^2 - r^2)$ ， $K = l_0^{-1} 2cAE \sin^2 \alpha$ ，所以圆频率为：

$$\omega_r = \frac{2cAE \sin^2 \alpha}{\rho l_0 H \pi (R^2 - r^2)} \quad (3.11)$$

代入数值得自然频率：

$$f_r = 5.2135336\text{Hz}$$

再由第三节中导出的公式用程序计算，为保证上部圆柱壳相对为刚性的，在计算中其弹性模量取比人字柱的大10倍， $E=27000000\text{T/m}^2$ ，其结果为：

$$f_o = 1.9559\text{Hz}$$

$$f_r = 5.18797\text{Hz}$$

与精度解比较，仅相差0.491%。

(b)底部固定的双曲壳，尺寸如图3所示。其材料参数为：弹性模量 $E=3 \times 10^6\text{psi}$ ，泊桑比 $\mu=0.15$ ，质量密度 $\rho=0.225 \times 10^{-3}\text{lb-sec}^2/\text{in}^4$ 。其频率结果列于表1中，同时还列入了C.S.Gran等^[7]用两种不同网格计算的结果和S.K.Sen等^[3]的结果。可以看出本文结果与C.S.Gran等^[7]的网格较密的结果及S.K.Sen等^[3]的结果非常一致。

(c)离散柱支承的双曲冷却塔，几何形状如图4所示，尺寸和材料参数如为：

$$Z_o = 250.86\text{ft}, \quad Z_i = 98.89\text{ft}, \quad Z_r = 32.0\text{ft},$$

$$R_o = 182.25\text{ft}, \quad R_A = 116.5\text{ft}, \quad R_i = 123.0\text{ft}$$

$$h = 12.0\text{in}, \quad h_r = 24.0\text{in}, \quad l_o = 41.0\text{ft}, \quad b_o = 52.0\text{in}.$$

$$d_o = 24.0\text{in}, \quad c = 44, \quad \alpha = 71^\circ$$

$$E_{壳} = E_{柱} = 4 \times 10^6\text{psi}, \quad \mu_{壳} = \mu_{柱} = 1/6$$

质量密度 $\rho=0.225 \times 10^{-3}\text{lb-sec}^2/\text{in}^4$

表2中列出了壳底固定时的频率结果，而表3列出了考虑离散柱支承系统时塔的自然频率。从表2和表3看出，离散柱支承对系统频率的影响是很大的，计算中必须考虑。同时，表2和表3中也列出了C.S.Gran等^[7]和P.L.Gould等^[1]的结果。可以看出，本文结果与这两种结果都是非常一致的。

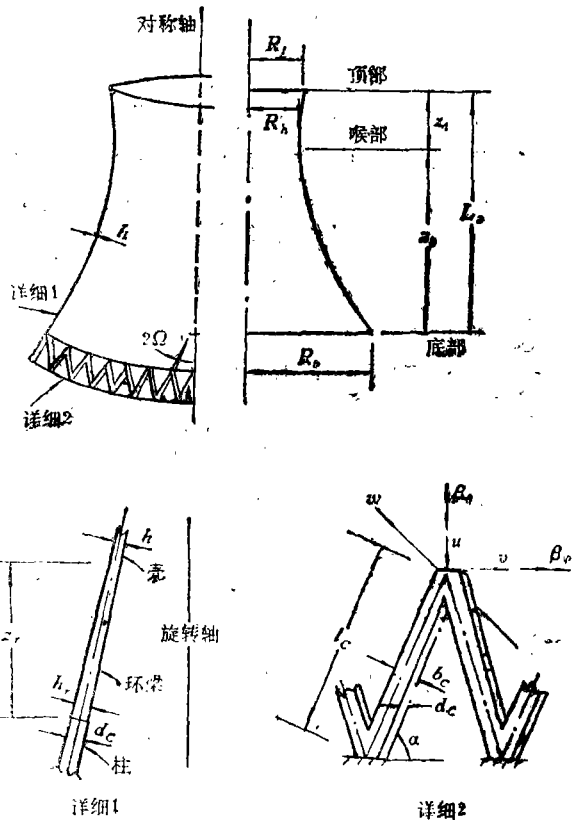


图 4

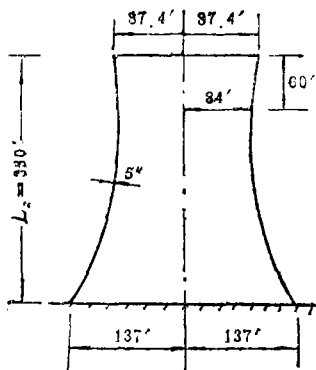


表 1 底部固定的双曲壳

谐波	振型		1	2	3
	频率 (Hz)	类别			
0	A	6.2565	7.7661	11.4340	
	B	—	—	—	
	C	—	—	—	
	D	7.7583	11.4817	12.0747	
1	A	3.3078	6.8021	10.5102	
	B	—	—	—	
	C	3.3119	7.1638	11.3170	
	D	3.2910	6.8176	10.6666	
2	A	1.7760	3.7015	6.9664	
	B	—	—	—	
	C	1.8681	—	—	
	D	1.7662	3.6960	7.0058	
3	A	1.3815	2.0035	4.3528	
	B	1.3627	—	—	
	C	1.5356	2.0969	—	
	D	—	—	—	
4	A	1.1862	1.4536	2.7940	
	B	1.2099	1.4468	—	
	C	1.3830	1.6136	2.8882	
	D	1.1820	1.4491	2.7866	
5	A	1.0364	1.4371	2.0681	
	B	1.0556	—	—	
	C	1.2447	1.5855	2.3176	
	D	1.0354	1.4345	2.0340	
6	A	1.1489	1.3368	2.0188	
	B	1.1382	—	—	
	C	1.3120	1.5492	2.1702	
	D	—	—	—	
7	A	1.3044	1.5197	1.9372	
	B	1.3230	—	—	
	C	1.4460	1.6040	2.1470	
	D	—	—	—	
8	A	1.4753	1.8135	20.233	
	B	—	—	—	
	C	—	—	—	
	D	—	—	—	

A: 本文结果

C: C.S.Gran的结果[4×16网格]

B: C.S.Gran的结果[8×20网格]

D: S.K.Sen的结果

表 2 底部固定的双曲冷却塔

谐波	振型		1	2	谐波	振型		1	2
	类别	频率 (Hz)				类别	频率 (Hz)		
0	A	5.085	6.550	5	A	1.129	1.449	1.129	1.449
	B	—	—		B	1.146	1.463		
	C	6.558	10.117		C	1.131	1.453		
1	A	2.706	5.725	6	A	1.398	1.565	1.398	1.565
	B	—	—		B	1.405	—		
	C	2.709	5.752		C	1.400	1.568		
2	A	1.475	3.087	7	A	1.647	1.960	1.647	1.960
	B	—	—		B	—	—		
	C	1.475	3.095		C	—	—		
3	A	1.193	1.669	8	A	1.899	2.371	1.899	2.371
	B	1.185	—		B	—	—		
	C	1.194	1.672		C	—	—		
4	A	1.101	1.302						
	B	1.125	1.304						
	C	1.104	1.302						

A: 本文结果
C: P.L.Gould的结果

B: C.S.Gran的结果

表 3 离散柱支承的双曲冷却塔

谐波	振型		1	2	谐波	振型		1	2
	类别	频率 (Hz)				类别	频率 (Hz)		
0	A	3.833	5.774	5	A	1.031	1.248	1.031	1.248
	B	—	—		B	1.024	1.219		
	C	5.780	9.557		C	1.032	1.256		
1	A	2.294	3.857	6	A	1.230	1.445	1.230	1.445
	B	—	—		B	1.189	—		
	C	2.296	3.893		C	1.235	1.455		
2	A	1.311	2.161	7	A	1.414	1.764	1.414	1.764
	B	—	—		B	—	—		
	C	1.311	2.172		C	—	—		
3	A	1.086	1.313	8	A	1.618	2.035	1.618	2.035
	B	1.092	—		B	—	—		
	C	1.786	1.314		C	—	—		
4	A	0.944	1.201						
	B	0.951	1.168						
	C	0.945	1.204						

A: 本文结果
C: P.L.Gould的结果

B: C.S.Gran的结果

四、结 论

对于离散柱支承的复杂结构,在其自由振动分析中要直接用离散形式进行计算往往需要更复杂的方法或更大的工作量。因此,人们总是将其转化为连续支承形式后,再进行分析。本文通过对离散支承和连续支承的梁进行理论分析,指出了只要通过适当的转化,是可以保证频率不变的。特别对于能估计其振形的情况,本文给出的公式非常简单。进一步,对于离散支承的旋转壳,一般总是假定环向振形(谐波)为正弦或余弦分布,因此由本文的能量相等原则导出了等效于连续弹性支承的一个十分简单的公式,并且给出个数值结果。本文结果与C. S. Gran等^[7]的完全离散化结果是非常一致的,证明本文的方法正确地反应了离散柱支承效应。从第二节中用能量法推导公式的过程,本文认为自然频率反应了系统总能量中动能和势能的比例关系,如结构的局部发生变化,但系统的能量中这种比例关系并不变化,则系统的频率也保持不变。

感谢 在本文完成过程中,得到钱伟长教授的鼓励和指导,在此谨致谢意。

参 考 文 献

- [1] Gould, P. L. et al., Dynamic analysis of column-supported hyperboloidal shells, *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, 2 (1974), 269—279.
- [2] Basu, P. K. and P. L. Gould, Finite element discretization of open-type axisymmetric elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14 (1979), 159—178.
- [3] Sen, S. K. and P. L. Gould, Free vibration of shell of revolution using FEM, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 100, Em2, April (1974).
- [4] Ioo, W. D. et al., The finite element solution and model tests of free vibration of hyperbolic cooling tower supported, *Proceedings of the 2nd International Symposium of Natural Draught Cooling Towers*, Ruhr-Universitat, Bochum, Germany, September (1984), 5—7.
- [5] Yang, T. Y., and R. K. Kapania, A set of shell finite elements for dynamic analysis of cooling towers. *A Report to National Science Foundation*, Washington, D. C., U. S. A., Report No. NSF CEE-82026, June (1982).
- [6] Yang, T. Y. and R. K. Kapania, Shell elements for cooling towers analysis, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 109, Em5, October (1983).
- [7] Gran, C. S., and T. Y. Yang, Nastran and sap IV applications on the seismic response of column-supported cooling towers, *Computers and Structures*, 8 (1978), 761—768.
- [8] Gran, C. S., and T. Y. Yang, Refined analysis of the seismic response of column-supported cooling tower, *Computers and Structures*, 11 (1980), 225—231.
- [9] Deb Bath, J. M., Free vibration, stability and “non-classical modes” of cooling tower shells, *Journal of Sound and Vibration*, 33, 1 (1974), 79—101.
- [10] 钱伟长, 《变分法与有限元》, 科学出版社 (1980).
- [11] 诺沃日洛夫, B. B., 《薄壳理论》, 科学出版社 (1963).

- [12] 王 蜀, 将壳体的离散支承系统简化为等效壳的动力刚度折减系数, 上海市应用数学和力学研究所, 研究报告 №. CM-8623.
- [13] 王 蜀、卢文达, 考虑环形基础及土壤刚度时双曲冷却塔的动力特性, 上海市应用数学和力学研究所研究报告, №. CM-8620,
或: 中国机电工程学会工业冷却塔分专业委员会第一届年会论文, 北京 (1987).
- [14] Прудников А. П., Ю.А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и Ряды—Элементарные Функции*, Москва «НАУКА» Главная Редакция, Физико-Математической Литературы (1981).

On Discrete Supports and Continued Support of Structures

Wang Shu

(Shanghai University of Technology; Shanghai Inst. of Appl.

Math. and Mech., Shanghai)

Abstract

There have been several papers dealing with elastic discrete supports of structures. And we are interested in what relation there is between elastic discrete supports and continued support and what difference would result in for dynamic properties of structures under the two kinds of supports. Through the present analysis, it is pointed out that natural frequencies reflect a certain proportion of kinetic and potential energies in total energy of a system, and the frequencies can be guaranteed to be invariable in transforming between elastic discrete and continued supports by means of a proper energy equivalence. And the theoretical formulation of beams and numerical results of shells of revolution are presented in this paper.