

文章编号: 1000-0887(2004) 08-0771-08

线性主动结构及模态() 基本概念及属性

张景绘¹, 龚 靖^{1,3}, 王永刚^{1,2}

(1. 西安交通大学 建力学院, 西安 710049;

2. 长安大学 理学院, 西安 710064;

3. 东北电力学院 建筑工程系, 吉林 132012)

(我刊原编委张景绘来稿)

摘要: 阐明了主动结构的若干基本概念, 归纳了主动结构动力学的主要问题。对线性主动结构的模态做了注释, 注释包括: 右和左特征向量的物理意义, 右特征向量为振型, 左特征向量表征响应的模态分量; 伴随结构及互易定理, 两个互为伴随主动结构, 且有对偶反馈增益矩阵, 左和右特征向量互易; 主动结构与被动结构的关联用传递函数表示, 可用于主动结构的估计问题

关键词: 主动结构; 振动控制; 智能结构; 模态

中图分类号: O32; TB53 **文献标识码:** A

引 言

经典结构动力学研究的对象是被动结构, 当被动结构中引入控制器件或机敏材料, 并施加控制作用, 则被动结构变为主动结构, 广义上称主动系统。主动结构类型越来越多, 尤其是自适应结构、受控结构和智能结构的迅速发展, 对主动结构的专题研究将发展成一个学科分支的研究。本文将以下述两类典型主动结构为背景: 一类为主动或杂交振动控制结构, 在原始的被动结构中增添了作动器和传感器, 或引入了机敏材料, 并根据设计的目标函数, 在特定控制律作用下, 施加控制作用, 承受外力或外载荷; 另一类是振动环境试验中的被试结构_夹具_振动台组成的主动结构(系统), 被试结构和夹具原本是被动结构或主动结构, 为实现正弦扫描或平稳随机或瞬态冲击试验规范要求, 必须对振动台施加反馈控制, 被试结构_夹具_振动台组成主动结构。

主动结构的研究起始于颤振问题, 至今还是一个很活跃的研究专题^[1,2]。桥梁、飞机可看成被动结构, 在一定的流场中组成的自激振动系统是主动系统(结构), 是气动_弹性问题。还有流固耦合振动结构, 非保守力作用下的结构等^[3], 都是主动结构研究的一个专题。其实, 自

收稿日期: 2002_11_01; 修订日期: 2004_03_08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272087); 国家自然科学基金委员会与中国工程物理研究院联合基金资助项目(10176042)

作者简介: 张景绘(1939), 男, 河北人, 教授, 博士生导师, 已发表专著译著 5 部, 论文 50 多篇(联系人, Tel: + 86_29_82668751; Fax: + 86_29_83237910; E_mail: zhangjh@mail.xjtu.edu.cn)

自然界中广泛存在主动结构或系统,例如生物体、智能结构、机器人等,甚至可推广到社会科学,如人口增长模型、股票行情模型等。对每类主动结构有特定的问题研究,例如飞机的颤振问题主要分析失稳速度,桥梁设计要避免产生自激振动。Preumont^[4]在他的书 *Vibration Control of Active Structures* 中论述的主动结构,主要以智能材料在振动控制中应用为主。

关于主动结构和被动结构的定义,是一个值得讨论的概念。Preumont 的定义为:埋置有一组传感器和作动器的结构,且两者有一反馈回路相联接,称之为主动结构。这个定义只局限于振动控制技术目前发展状况,应该有一个更广义的定义。从能量考虑,主动结构中,外界能量的输入与运动有关,并影响结构的动力学特性。更严格的定义有待讨论,下一节中给出的定义只局限在主动结构一定范畴内。

线性主动结构是一种最简单的理想系统。对很多控制目标,将产生非线性控制律^[5,6],导致线性被动结构变为非线性主动结构,但分析线性主动结构的最基本的问题仍是主动结构动力学的基础。振动模态表征结构振动的模式,有特定的物理意义,在响应计算中又是系统数学模型的转换工具。主动结构的模态与控制律有关,当是线性控制律时,主动结构是线性的,经典的模态分析和试验方法应修正。线性主动结构的模态及与对应的被动结构的模态的关联也是一个基本问题,理论和实际工程应用都应该讨论其正反两类问题。正问题:由对应的被动结构的动力学特性分析或估计,研究主动结构的动力学特性,进而计算主动结构对外载荷的响应;逆问题:振动环境试验中,在振动台上可得到主动系统的模态参数,可靠性分析要求预估被动试结构(为被动结构)在真实环境条件下的响应。

在振动控制和智能结构研究范围内,无疑,首要问题是系统的拓扑结构和数学建模,如作动器、主动阻尼或阻尼器原理等^[7,8]。然而,在建模的基础上,主动结构动力学的最基本问题还是响应及稳定分析,用特征值和特征向量是最直接的方法,所以本文首先讨论线性主动结构,为非线性主动结构分析奠定基础。在分析过程中,将具体比较主动结构和被动结构特性的联系及区别。

尽管本文以线性主动结构为讨论对象,但为了更具体比较主动结构动力学与经典结构动力学,对主动结构动力学问题的全面陈述在第一节中首先说明。

1 线性主动结构

首先给出几个基本定义。

定义 1 结构的载荷与响应有关的系统称为主动结构。

定义 2 结构的载荷独立于响应的系统称为被动结构。注:本文称之为被动结构是相对主动结构而言,即主动结构的控制作用消失时。

定义 3 线性被动结构的控制作用与响应成线性关系时,称线性主动结构。

定义 4 线性被动结构的控制作用与响应为非线性关系时,称伪线性主动结构。

本文只讨论线性主动结构,伪线性主动结构不存在模态概念,但当控制作用较小时,伪主动结构仍表现有共振模态,仍可在模态的概念上讨论主动结构的动力学特性,但不包括在本文内容中。

1.1 基本方程

n 自由度主动结构可由以下方程代表:

$$M\dot{x} + Cx + Qx = F_u u + F_v v, \quad (1)$$

$$u = -Ky, \quad (2)$$

$$y = F_y x, \quad (3)$$

$$\min J(K, F_u, F_y), \quad (4)$$

式中 $x \in R^n$ 是位移响应; $M, C, Q \in R^{n \times n}$ 为被动结构的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; $u \in R^m$ 为结构的控制输入; 若 u 的量纲为力, $F_u \in R^{n \times m}$ 为控制输入位置矩阵; K 为反馈增益矩阵, 可为常数矩阵或含有线性算子, 由求解方程(4) 确定; v 是激振力向量; F_v 为激振力位置矩阵; $y \in R^l$ 为测量位移; $F_y \in R^{l \times n}$ 为测量位置矩阵; J 为目标函数, 在不同的控制律中有不同的定义, 但在本文中只考虑导致线性主动结构的控制律 这里称之为 n 自由度主动结构, 只局限于被动结构的自由度 分别称(1)至(4)式为: 主动结构的动力学方程、控制方程、测量方程和控制律方程

线性主动结构的模态矩阵用 $R^{(a)}$ 、 $L^{(a)}$ 和 $\Lambda^{(a)}$ 表示, 上角标 a 注明主动结构 对应的被动结构方程为

$$M\dot{x}^{(p)} + Cx^{(p)} + Qx^{(p)} = F_v v, \quad (5)$$

式中角标 p 注明被动结构的响应, 其模态矩阵为 $R^{(p)}$ 和 $L^{(p)}$

定义5 当控制点和测量点一致时, 即 $F_u = F_y^T$ 时, 反馈增益矩阵 K 为对角阵, 称同位主动结构, 它是主动结构的重要一类 注: 智能振动控制中的主动约束阻尼层和可控约束阻尼层, 当均布电压场作用于压电层时, 不属于同位主动结构

定义6 对同一被动结构, 控制位置与测量位置互换后组成的主动结构与原主动结构互称伴随主动结构 令 F_u^{adj} 和 F_y^{adj} 分别为伴随主动结构的控制位置矩阵与测量位置矩阵, 则有 $F_u^{adj} = F_y^T$ 和 $F_y^{adj} = F_u^T$ 这里从物理上定义的伴随主动结构, 可归于控制论中的对偶系统

1.2 主动结构动力学的基本问题

主动结构的构型及数学建模, 即主动结构硬件和方程(1)至(4)的建立, 是主动结构动力学的最基本的问题, 目前研究最多^[5, 9, 10] 求解方程(1)至(4)也是主动结构动力学的基本问题, 可归结为:

控制问题 已知 M, C, Q 和 v , 在给定 F_u, F_y 的 J 情况下求 K

配置问题 已知 M, C, Q 和 v , 对特定的 J , 求 F_u 和 / 或 F_y

分析问题 已知 M, C, Q , 在给定 F_u 和 F_y 时, 由控制问题确定 K , 求主动结构的模态矩阵 $R^{(a)}$ 、 $L^{(a)}$ 和特征值矩阵 $\Lambda^{(a)}$, 并求主动结构在给定的 v 下的响应

估计问题 包括三方面内容: 通过对被动结构的频率响应函数的测试及控制律的设计, 估计主动结构的频率响应函数; 已知主动结构的频率响应函数, 估计模态参数 $R^{(a)}$ 、 $L^{(a)}$ 和 $\Lambda^{(a)}$; 已知主动结构的模态矩阵 $R^{(a)}$ 、 $L^{(a)}$ 和 $\Lambda^{(a)}$, 估计被动结构的模态参数 $R^{(p)}$ 和 $L^{(p)}$

控制问题的求解大都是一个优化问题的计算, 配置问题也是一个优化问题的计算^[11], 因此控制问题和配置问题可合并为一个多变量多目标函数的优化问题, 即优化计算 K 和 F_u, F_y ^[12] 优化问题解决的是控制器设计问题, 包括确定控制律和作动器、观测器的数目和位置, 可考虑外载荷 v , 也可以不考虑外载荷 v 分析问题和估计问题的研究目标是给出主动结构的振动模式和在外载荷 v 作用下的响应 在主动结构的研究中, 控制问题和配置问题已有

不少工作, 本文主要涉及分析问题及估计问题

2 主动结构的模态

以主动结构的离散方程论述模态的性质, 可推广到用连续方程表示的主动结构

2.1 左、右特征向量

(1) 式中令 $v = 0$, 并将(2)、(3)式与(1)式合并得

$$Mx + Cx + (Q + F_u K F_y) x = 0 \quad (6)$$

不失一般性, 令

$$K = K_1 + K_2 \frac{d}{dt}, \quad (7)$$

则

$$u = -K_1 F_y x - K_2 F_y \dot{x} \quad (8)$$

表示位移和速度反馈, K_1 代表主动刚度或(和)主动结构阻尼, K_2 代表主动粘性阻尼, 对应给出以下两个定义:

定义7 当 $K_2 = 0$ 而 $K_1 \neq 0$ 时, 称主动刚度结构 主动刚度结构也可以起到主动阻尼结构作用, 取决于 K_1 是实值还是复值

定义8 当 $K_1 = 0$ 而 $K_2 \neq 0$ 且为实值时, 称主动粘性阻尼结构

将(8)式代入(6)式得

$$Mx + (C + F_u K_2 F_y) x + (Q + F_u K_1 F_y) x = 0 \quad (9)$$

写成简单形式

$$Mx + C_a x + Q_a x = 0, \quad (10)$$

式中

$$C_a = C + F_u K_2 F_y, \quad (11)$$

$$Q_a = Q + F_u K_1 F_y \quad (12)$$

分别为主动结构的阻尼矩阵和刚度矩阵, C 和 Q 是对称矩阵, C_a 和 Q_a 通常为非对称矩阵, 因为非同位控制, 或因为非对称矩阵 K_1 和 K_2 对应方程(10)的右特征值问题为

$$(\ ^2 M + C_a + Q_a)_R = 0, \quad (13)$$

左特征值问题为

$$^T_L (\ ^2 M + C_a + Q_a) = 0, \quad (14)$$

或

$$(\ ^2 M + C_a^T + Q_a^T)_L = 0, \quad (15)$$

用 $^{(a)}_R C^{n \times 2n}$ 、 $^{(a)}_L C^{n \times 2n}$ 和 $^{(a)} C^{2n \times 2n}$ 分别表示右特征向量矩阵、左特征向量矩阵和特征值矩阵, 其正交性条件为

$$^{(a)}_L \ ^{(a)T} M_R + ^{(a)}_L \ ^{(a)T} M_R + ^{(a)T} C_a \ ^{(a)}_R = I, \quad (16)$$

$$^{(a)}_L \ ^{(a)T} M_R - ^{(a)T} Q_a \ ^{(a)}_R = \ ^{(a)} \quad (17)$$

或写成状态空间形式

$$V^T \begin{bmatrix} C_a & M \\ M & 0 \end{bmatrix} U = I, \quad (18)$$

$$\mathbf{V}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{U} = \quad (a), \quad (19)$$

式中

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \quad (a) \\ \quad (a) \\ \quad (a) \\ \quad (a) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \quad (a) \\ \quad (a) \\ \quad (a) \\ \quad (a) \end{bmatrix} \quad (20)$$

2.2 模态的基本属性

属性 1 右特征向量是主动结构自由振动的模式_振型

说明 由自由振动方程(10), 令其解为 $\mathbf{x} = \mathbf{R} e^t$, 便可得特征值问题(13) 式, 自由振动为方程(13) 的 $2n$ 解的迭加

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^{2n} A_r \mathbf{R}_r e^t, \quad (21)$$

角标 r 标明第 r 阶模态, A_r 为常数, 因此, 右特征向量是主动结构自由振动的模式

属性 2 左特征向量为一类特定伴随主动结构的模态

说明 由定义左特征向量的方程(15), 以及

$$\mathbf{C}_a^T = \mathbf{C} + \mathbf{F}_y^T \mathbf{K}_2^T \mathbf{F}_u^T \quad \text{及} \quad \mathbf{Q}_a^T = \mathbf{Q} + \mathbf{F}_y^T \mathbf{K}_1^T \mathbf{F}_u^T,$$

并根据定义 6, 当 $\mathbf{K}_2^{\text{adj}} = \mathbf{K}_2^T$ 及 $\mathbf{K}_1^{\text{adj}} = \mathbf{K}_1^T$ 时, 可知左特征向量就是伴随结构的右特征向量, 即伴随结构的振型

属性 3 互为伴随结构的两个主动结构的模态振型加权正交

说明 当 $\mathbf{K}_2^{\text{adj}} = \mathbf{K}_2^T$ 及 $\mathbf{K}_1^{\text{adj}} = \mathbf{K}_1^T$ 时, 由属性 2 表明正交条件(18) 和(19) 式是互为伴随结构的两个主动结构的模态振型加权正交

属性 4 左特征向量表征主动结构强迫振动的模态分量

说明 对应方程(10) 的强迫振动方程为

$$\mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{C}_a\mathbf{x} + \mathbf{Q}_a\mathbf{x} = \mathbf{F}_v\mathbf{v} \quad (22)$$

将解写成模态迭加形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \mathbf{U}, \quad (23)$$

为强迫振动的模态分量, 代入(22) 式并利用正交条件(18) 和(19) 式, 则有

$$- \quad (a) = \quad (a)^T (\mathbf{F}_w\mathbf{w}) \quad (24)$$

因此, 左特征向量表征激振的模态分量, 对应的模态是由右特征向量表示的 也就是说, 主动结构的强迫振动响应与它的伴随主动结构的模态有关

由属性 2, 显然有

属性 5(互易定理) 两个互为伴随主动结构, 若反馈增益矩阵满足 $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}^{\text{adj}}$, 则二者有相同的特征值集合, 其左、右特征向量互易

模态能量传递的解释: 按照属性 4, 第 r 阶模态激振力为 $\quad (a)^T (\mathbf{F}_v\mathbf{v})$,

当 $\quad (a) \quad (a) \quad (p)$ 时

$$\quad (a)^T (\mathbf{F}_v\mathbf{v}) \quad (a)^T (\mathbf{F}_v\mathbf{v}) \quad (p)^T (\mathbf{F}_v\mathbf{v})$$

这说明, 若激振力按被动结构模态分解不同于按主动结构模态分解, 如果 $\quad (p)^T (\mathbf{F}_v\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, 但

$\quad (a)^T (\mathbf{F}_w\mathbf{w}) \neq \mathbf{0}$, 那么第 r 阶模态激振力的能量来自于被动结构的非第 r 阶模态激振力, 表明

了模态能量传递 从另一角度解释, 激振力按右特征向量矩阵转换得不到模态激振力

2.3 传递函数

令 $H^{(a)}$ 和 $H^{(p)}$ 分别表示主动结构和对应的被动结构的传递函数, 由方程(5)和(22) 分别有

$$H^{(p)}(s) = (s^2 M + sC + Q)^{-1} = \sum_{r=1}^{2n} \frac{r^{(p)}}{s - r^{(p)T}}, \quad (25)$$

$$H^{(a)}(s) = (s^2 M + sC_a + Q_a)^{-1} = \sum_{r=1}^{2n} \frac{R_r^{(a)} L_r^{(a)T}}{s - r^{(a)}} \quad (26)$$

因此有

属性 6 满足互易定理的两互为伴随主动结构有 $H^{(a)adj}(s) = H^{(a)T}(s)$

对于方程(1)至(4)表示的主动结构有

$$H^{(a)} = (I + H^{(p)} F_u K F_y)^{-1} H^{(p)} \quad (27)$$

如果将(25)式代入上式, 即可通过主动结构的频率响应函数的测试来估计被动结构的模态参数, 可应用于振动环境试验 对于第一自由度单点控制和第 r 自由度单点测量的主动结构, 不失一般性, 令

$$F_y = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad F_u = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T,$$

代入(27)式并使用分块矩阵求逆公式 为表示简单且能满足应用要求, 只写出测点对应的

$$\begin{bmatrix} H_{11}^{(a)} & H_{12}^{(a)} & H_{1n}^{(a)} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - KH_{1r}^{(p)}} \begin{bmatrix} H_{11}^{(p)} & H_{12}^{(p)} & H_{1n}^{(p)} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

式中 $H_{ij}^{(a)}$ 和 $H_{ij}^{(p)}$ 分别为 $H^{(a)}$ 和 $H^{(p)}$ 的元素 同样可给出单点测量和 l, r 两点控制情况, 这

时令 $K = \begin{bmatrix} K_l \\ K_r \end{bmatrix}$, 则有

$$\begin{bmatrix} H_{11}^{(a)} & H_{12}^{(a)} & H_{1n}^{(a)} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - (KH_{1l}^{(p)} + KH_{1r}^{(p)})} \begin{bmatrix} H_{11}^{(p)} & H_{12}^{(p)} & H_{1n}^{(p)} \end{bmatrix},$$

显然有

$$\frac{H_{li}^{(a)}}{H_{lj}^{(a)}} = \frac{H_{li}^{(p)}}{H_{lj}^{(p)}} \quad (i, j = 1, 2, \dots) \quad (29)$$

因此有

属性 7 测量点对任意点的传递函数与控制作用无关

使用(29)式, 则有

$$H_{li}^{(a)} = \frac{1}{1 - (KH_{1l}^{(p)} + KH_{1r}^{(p)})} H_{li}^{(p)} = \frac{1}{1 - (K_i + K_j(H_{lj}^{(a)}/H_{li}^{(a)}))} H_{li}^{(p)} H_{lj}^{(p)}, \quad (30)$$

$$H_{lj}^{(a)} = \frac{1}{1 - (KH_{1l}^{(p)} + KH_{1r}^{(p)})} H_{lj}^{(p)} = \frac{1}{1 - (K_i + K_j(H_{lj}^{(a)}/H_{li}^{(a)}))} H_{li}^{(p)} H_{lj}^{(p)} \quad (31)$$

当测试了主动结构的传递函数, 由上二式, 可用迭代过程估计被动结构的传递函数

上述主动结构的概念和属性适合连续系统, 主动梁的属性在文()中给出

3 结 论

智能结构和振动主动控制系统的发展, 提出了各种构形(或配置)的主动结构, 在结构动力

学范围, 主动结构动力学的各种问题将得到系统的研究 本文对线性主动结构模态的基本特征做了注释:

线性主动结构的模态与控制律、测量及作动配置有关, 同位主动结构的右、左特征向量相同, 非同位主动结构的右、左特征向量不相同, 右特征向量为振型, 左特征向量表征模态响应分量的大小

互易定理给出了互为伴随主动结构间的关联, 说明了左和右特征向量的差别及联系
用传递函数形式给出了主动结构和被动结构之间的关联

互易定理可推广到主动结构的连续模型

需深入研究的问题很多, 首要的问题应包括:

各种线性控制律下主动结构的模态特性;

以主动结构模态概念, 改进模态控制策略, 重新解释模态控制溢出;

对互易定理的深入研究和应用;

模态概念在伪线性主动结构中的推广及应用

[参 考 文 献]

- [1] Tang D, Dowell E H. Experimental and theoretical study on aeroelastic response of high_aspect_ratio wings[J]. AIAA Journal, 2001, 39(8): 1430-1441.
- [2] Brawn J L. Computer model simplified bridge flutter analysis[J]. Civil Engineering, 2001, 7(18): 31.
- [3] Ganesan R. Vibration analysis for stability of singular non_self_adjoint beam_columns using stochastic FEM[J]. Computers and Structures, 1998, 68(5): 543-554.
- [4] Preumont A. Vibration Control of Active Structures [M]. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [5] Soong T T. Basic concept and applications of active structural vibration control[A]. In: Zhang J H, Zhang X N Eds. Proceedings of International Conference on Advanced Problems in Vibration Theory and Applications [C]. 2000, 1-9.
- [6] 顾仲权, 马扣根, 陈卫东. 振动主动控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1997.
- [7] Benjeddou A. Advanced in hybrid active_passive vibration and noise control via piezoelectric and viscoelastic constrained layer treatments[J]. Journal of Vibration and Control, 2001, 7(4): 565-602.
- [8] 李俊宝, 张景绘, 任勇生, 等. 振动工程中智能结构的研究进展[J]. 力学进展, 1999, 29(2): 165-177.
- [9] Housner G H, Bergman L A, Caughey T K, et al. Structural control: past, present, and future[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1997, 123(9): 897-971.
- [10] Hung W H, Zheng G T, Mu Q C, et al. The developments of integrated passive and active vibration control of aerospace structures[A]. In: Zhang J H, Zhang X N Eds. Proceedings of International Conference on Advanced Problems in Vibration Theory and Applications [C]. 2000, 43-50.
- [11] 刘福强, 张令弥. 作动器/传感器优化配置的研究进展[J]. 力学进展, 2000, 30(4): 506-516.
- [12] Ahlawat A S, Ramaswamy A. Multiobjective optimal structural vibration control using fuzzy logic control system[J]. Journal of Structural Engineering, 2001, 127(11): 1330-1337.

Linear Active Structures and Modes()

Basic Concepts and Properties

ZHANG Jing_hui¹, GONG Jing^{1,3}, WANG Yong_gang^{1,2}

(1. School of Civil Engineering and Mechanics, Xi'an Jiaotong University,

Xi'an 710049, P. R. China;

2. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, P. R. China;

3. Department of Civil Engineering, Northeast China Institute of
Electric Power, Jilin 132012, P. R. China)

Abstract: Some basic concepts about the active structures were firstly explained, and the main subjects to study in the field of active structure dynamics were synthesized. For the linear active structures, the annotations on the modes were done in detail. The physical meanings of the right and left eigenvectors were explained. The right eigenvectors are the modal shapes and the modal responses of an active structure depend on the left ones. The adjoint structure of an active structure was defined and the reciprocity theorem was interpreted. For two active structures, which are adjoint to each other and with the reciprocal gain matrices, the right and left eigenvector are reciprocal. The relationship between an active structure and the corresponding passive structure is expressed with the transfer functions, which is employed to resolve the estimation problems.

Key words: active structure; vibration control; smart structure; mode