应用数学和力学，第9卷第12期（1988年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

离散系统Lyapunov第二方法的一些问题*

李中　黄琳

（北京大学力学系，1987年8月1日收到）

摘　要

本文讨论线性时不变离散系统Lyapunov方程解集的几何性质以及分段线性离散系统的稳定性，得出每个子系统都是稳定的分段线性离散系统渐近稳定的一些充分条件，并把这些结果应用于二阶分段线性系统.

一、引　言

对于线性时不变离散系统

$$x_{n+1}=Ax_n \tag{1.1}$$

众所周知系统(1.1)渐近稳定的充要条件是，$\sigma(A)\subset\mathring{S}$，其中$\sigma(A)$是矩阵$A$的谱集，$\mathring{S}$是复平面单位圆的内部．将Lyapunov第二方法应用于系统(1.1)的稳定性，可以得到下列定理[4]．

定理1　系统(1.1)渐近稳定的充要条件是存在正定二次型x^TVx，其中V满足：

$$A^TVA-V=-W \tag{1.2}$$

这里W半正定且$W=C^TC$，$(A,\ C)$可测对．

如果A固定，满足Lyapunov方程(1.2)的矩阵V不唯一，因此了解方程(1.2)解集的一些整体性质是十分有用的．对这些性质的了解有助于处理许多问题，如分段线性系统的稳定性，不确定性系统的同时镇定等．

对于随机差分方程

$$x_{n+1}=T(x_n)+e_{n+1} \tag{1.3}$$

$u\geqslant0$、T：$\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$，$x_n\in\mathbf{R}^m$．$e_{n+1}$白噪声．Chan和Tong[3]证明了可以通过Lyapunov函数将随机差分方程(1.3)解的遍历性和对应确定系统$x_{n+1}=T(x_n)$的稳定性联系起来．本文主要兴趣在于分段线性离散系统的稳定性．分段线性离散系统在非线性时间序列分析和建模中起着重要作用，见Tong[6]．而分段线性系统的稳定性是十分复杂的问题，见Chan和Tong[2]．Willson[7]，Chan和Tong[2]对二阶分段线性系统的稳定性得到了一些结果．但他们所讨论的情形较为简单．我们在本文中将讨论更一般的情形．本文内容分为三部分：首先给出方程

* 朱照宣推荐．
国家自然科学基金资助的课题．

(1.2)解集的一些几何性质；由此得出分段线性离散系统渐近稳定的一些充分条件；最后将所得到的结果应用于二阶分段线性系统。

二、Lyapunov方程解集的几何性质

定义1 若V称为对A可判稳定的，系指V正定且$A^TVA-V=-W$，其中W半正定且$W=C^TC$使$(A\ C)$可观测。

给定A，全部用来可判A稳定的V的集合记为$\mathbb{V}_A$，则有下面定理。

定理2 若A是稳定的，则$\mathbb{V}_A$是一开凸锥。

证明 设$V_0\in\mathbb{V}_A$，由$W=C^TC$，$(A\ C)$可观测，当且仅当$(A\ W)$可观测。但$W_0=A^TV_0A-V_0$，$(A\ W_0)$可观测，表明$(A^T\ W_0)$可控或$[A^TV_0A-V_0\ \ A^T(A^TV_0A-V_0)\ \cdots\ (A^T)^{(n-1)}\cdot(A^TV_0A-V_0)]$满秩，显然由满秩在$V$空间的通有性，可知存在$V_0$的邻域$\Omega(V_0)$使$\forall V\in\Omega(V_0)$均有$(A^T,\ A^TVA-V)$可控，再由$A$稳定，根据定理1$\forall V\in\Omega(V_0)$，$V$正定，于是$\Omega(V_0)\subset\mathbb{V}_A$，所以$\mathbb{V}_A$是开集。

$\forall V_1\in\mathbb{V}_A$，$\forall V_2\in\mathbb{V}_A$易证对任何$\lambda_i>0$ $(i=1,2)$有$\lambda_1V_1+\lambda_2V_2\in\mathbb{V}_A$。从而$\mathbb{V}_A$是凸锥。

设$\tilde{\mathbb{V}}_A$为$\mathbb{V}_A$的子集且有$-(A^TVA-V)$为正定矩阵。显然$\tilde{\mathbb{V}}_A$也是开凸锥。

考虑$V\in\tilde{\mathbb{V}}_{A_i}$，$i=1,2$。即有$V$正定且

$$A_i^TVA_i-V=-W_i\qquad i=1,2 \tag{2.1}$$

其中$W_i(i=1,2)$正定。

我们知道下列不等式成立。

$$\begin{aligned}&[\lambda A_1+(1-\lambda)A_2]^TV[\lambda A_1+(1-\lambda)A_2]\\&\leqslant\lambda A_1^TVA_1+(1-\lambda)A_2^TVA_2\qquad 0\leqslant\lambda\leqslant1\end{aligned}$$

以上矩阵不等式$C\leqslant D$对对称矩阵而言且意味着$D-C$半正定。由(2.1)有

$$\begin{aligned}&[\lambda A_1+(1-\lambda)A_2]^TV[\lambda A_1+(1-\lambda)A_2]\\&\leqslant\lambda A_1^TVA_1+(1-\lambda)A_2^TVA_2=V-[\lambda W_1+(1-\lambda)W_2]\end{aligned}$$

因$\lambda W_1+(1-\lambda)W_2$ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$仍然正定，于是$V\in\tilde{\mathbb{V}}_{A_\lambda}$，$A_\lambda=\lambda A_1+(1-\lambda)A_2$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$。

利用上面的分析，我们有

定理3 设$A_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $i=1,2,\cdots,m$。如果$\bigcap_{i=1}^{m}\tilde{\mathbb{V}}_{A_i}\neq\phi$，则有$\bigcap_{\tau\in T}\tilde{\mathbb{V}}_{A_\tau}=\bigcap_{i=1}^{m}\tilde{\mathbb{V}}_{A_i}$ 其中T是指标集使$\tau\in T$有$A_\tau\in\mathrm{conv}\{A_1,\ \cdots,\ A_m\}$。

三、分段线性系统渐近稳定的一些充分条件

考虑A_i，$i=1,2,\cdots,m$，其中A_i均为稳定矩阵。设空间$\mathbb{R}^n$有一分划$\mathbb{R}^n=\bigcap_{i=1}^{m}\mathbb{H}_i$，$\mathbb{H}_i\neq\phi$，$i=1,2,\cdots,m$。我们定义分段线性离散系统

$$x_{n+1}=A_ix_n\qquad x_n\in\mathbb{H}_i\text{时}\quad i=1,2,\cdots,m \tag{3.1}$$

定理4 对于分段线性离散系统(3.1)，如果$\bigcap_{i=1}^{m}\tilde{\mathbb{V}}_{A_i}\neq\phi$则$x=0$是渐近稳定的。

证明 考虑$-W_i=A_i^TVA_i-V$，$i=1,\cdots,m$，其中$V\in\bigcap_{i=1}^{m}\tilde{V}A_i$。若记$\mu_i$为$(W_i\ V)$的最小广义特征值，则令$\mu_0=\min_i\{\mu_i\}$就有

$$A_i^TVA_i-V\leqslant-\mu_0V,\qquad i=1,2,\cdots,m$$

由于$V\in\tilde{V}A_i$。易证$0<\mu_0\leqslant1$而考虑到V正定，对任何初值x_0对应$x_k^TVx_k=V_k$，则有

$$V_k\leqslant(1-\mu_0)^kV_0 \tag{3.2}$$

由于$0<\mu_0\leqslant1$，我们得到$\lim_{k\to\infty}V_k=0\Longrightarrow\lim_{k\to\infty}x_k=0$

定理4表明对于分段线性系统(3.1)，如果开凸锥$\tilde{V}A_i$，$i=1,2,\cdots,m$的交不空，则原点是渐近稳定的，且具有二次Lyapunov函数x^TVx，反之亦然。我们知道有许多系统是稳定的，但并不具有二次形式的Lyapunov函数，下面我们设法扩大可作为系统Lyapunov函数的函数类，即我们想找分段二次的Lyapunov函数。

考虑二阶分段线性系统

$$x_{n+1}=A(x_n) \tag{3.3}$$

其中$x_n\in\mathbf{R}^2$，

$$A(x_n)=\begin{cases}A_1x_n & x_n\in\mathring{\mathrm{H}}_+=\{x\mid p^Tx>0\}\\ A_2x_n & x_n\in\mathrm{H}_-=\{x\mid p^Tx\leqslant0\}\end{cases}$$

如果我们能找到二次型$V_1(x)=x^TV_1x$，$V_2(x)=x^TV_2x$，这里V_1，V_2满足

$$A_1^TV_1A_1-V_1=-W_1,\ \ A_2^TV_2A_2-V_2=-W_2 \tag{3.4}$$

设分界面H为$p^Tx=0$，p是一常向量，$V_1(x)=C$是一闭曲线，它与分界面$p^Tx=0$交于两点；设x_0是其中一点，则我们可以选择适当的常数使$x_0^TV_2x_0=C$，这时我们有

$$\{x\mid V_1(x)=C\}\cap\{x\mid p^Tx=0\}=\{x\mid V_2(x)=C\}\cap\{x\mid p^Tx=0\} \tag{3.5}$$

于是建一分段二次型

$$V(x)=\begin{cases}x^TV_1x & x\in\mathring{\mathrm{H}}_+\\ x^TV_2x & x\in\mathrm{H}_-\end{cases}$$

显然$V(x)$是一连续函数，且存在$\tau_1\geqslant\tau_2>0$使

$$\tau_1x^Tx\geqslant V(x)\geqslant\tau_2x^Tx$$

因此如果对任意序列x_n，$\lim_{n\to\infty}V(x_n)=0$，则有$\lim_{n\to\infty}x_n=0$。

定理5 对于二阶分段线性系统(3.3)，如果能找到V_1，V_2满足(3.4)，且满足

$$\left.\begin{aligned}&x^TV_1x/x^TV_2x>1-\mu_1 \qquad \forall x\neq0\\ &x^TV_2x/x^TV_1x>1-\mu_2 \qquad \forall x\neq0\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

这里，$\mu_1=\min_{x\neq0}\ x^TW_1x/x^TV_1x$，$\mu_2=\min_{x\neq0}\ x^TW_2x/x^TV_2x$，则$x=0$是渐近稳定的。

证明

取

$$V(x)=\begin{cases}x^TV_1x & x\in\mathring{\mathrm{H}}_+\\ x^TV_2x & x\in\mathrm{H}_-\end{cases}$$

由(3.2)和(3.6)，则对任何$x\in\{x\mid V_1(x)=C\}\cap\mathring{\mathrm{H}}_+$

有 $\bar{x}=A(x)\in\{x\mid V_1(x)\leqslant C(1-\mu_1)\}\qquad \bar{x}\in\mathring{\mathrm{H}}_+$

$\bar{x}=A(x)\in\{x\mid V_2(x)<C\}\qquad \bar{x}\in\mathrm{H}_-$

因此对　$x\in S=\{x|V(x)=C\}\cap\mathring{\mathrm{H}}_+$

都有　$V(\bar{x})<C \qquad \bar{x}=A(x)$

显然可以求得　$C_1=\max\limits_{x\in S}\{x^TA_1^TV_2A_1x\}$

且　$C_1<C$

令　$(C-C_1)/C=\nu_1 \qquad 1\geqslant\nu_1>0$

于是　$\forall x\in\{x|V_1(x)=C\}\cap\mathring{\mathrm{H}}_+$

有

$$A_1x\in\{x|V(x)\leqslant(1-k_1)C\}$$

其中　$k_1=\min(\mu_1,\ \nu_1) \qquad 0<k_1\leqslant 1$

相仿　$\forall x\in\{x|V_2(x)=C\}\cap\mathrm{H}_-$

有　$A_2x\in\{x|V(x)\leqslant(1-k_2)C\}$

$k_2=\min(\mu_2,\ \nu_2), \qquad 0<k_2\leqslant 1$

ν_2有类似ν_1的定义．考虑由$x_0\in\{x|V(x)=C\}$出发的序列x_n，根据上述分析，有

$$V(x_n)\leqslant\prod_{i=1}^{p}(1-k_1^{(i)})\prod_{j=1}^{q}(1-k_2^{(j)})C$$

其中，　$p+q=n$；$1\geqslant k_1^{(i)}>0$；$1\geqslant k_2^{(j)}>0$；$i==1,\ p$；$j=1,\ q$

于是有　$\lim\limits_{n\to\infty}V(x_n)=0\Longrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

推论1　对于系统(3.3)，如果存在$V\in\widetilde{\mathrm{V}}_{A_1}\cap\widetilde{\mathrm{V}}_{A_2}$，那么$x=0$是渐近稳定的．

证明　令$V_1=V_2=V$，显然(3.6)满足．所以推论成立．

四、二阶分段线性系统的渐近稳定性

考虑二阶分段线性系统

$$\begin{cases} x_{n+1}=a_1x_n+b_1x_{n-1} & x_n\geqslant 0 \\ x_{n+1}=a_2x_n+b_2x_{n-1} & x_n<0 \end{cases} \tag{4.1}$$

(1.1)式可重写为下式

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}=A(x_n)\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix},\quad A(x_n)=\begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & x_n\geqslant 0 \\ \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & x_n<0 \end{cases} \tag{4.2}$$

这里我们假设每一子系统是稳定的，因此系数a_i，b_i $(i=1,2)$必须满足下列限制：

$$a_i+b_i<1,\ b_i-a_i<1,\ b_i>-1 \qquad i=1,2 \tag{4.3}$$

根据定理4，如果$\bigcap\limits_{i=1}^{2}\widetilde{\mathrm{V}}_{A_i}\neq\phi$，那么对于系统(4.1)，原点是渐近稳定的，下面我们求$\widetilde{\mathrm{V}}_{A_i}$，$i=1,2$

令　$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

其中a，b满足(4.3)

$$V=\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & \eta \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

要求V正定，必须有$\eta>\mu^2$。

利用(4.4)和(4.5)，有

$$A^TVA-V=\begin{bmatrix} 2a\mu+\eta+a^2-1 & (b-1)\mu+ab \\ (b-1)\mu+ab & b^2-\eta \end{bmatrix}$$

要求上述矩阵负定，必须有

$$2a\mu+\eta+a^2-1<0 \tag{4.6}$$

$$(1-2b+b^2)\mu^2+2a\mu\eta+\eta^2-2ab\mu+(a^2-b^2-1)\eta+b^2<0 \tag{4.7}$$

当a，b固定，(4.6)在(μ,η)平面是一直线的一侧；(4.7)是一椭圆的内部，因为有

$$\Delta=(2a)^2-4(1+b^2-2b)=4(a-b+1)(a+b-1)<0$$

容易证明上述直线和椭圆是相切的，因此对系统(4.1)我们求得：

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{A_1}=&\{(\mu,\eta)\,|\,\eta>\mu^2\}\cap\{(\mu,\eta)\,|\,(1+b_1^2-2b_1)\mu^2\\&+2a_1\mu\eta+\eta^2-2a_1b_1\mu+(a_1^2-b_1^2-1)\eta+b_1^2<0\}\\ \tilde{V}_{A_2}=&\{(\mu,\eta)\,|\,\eta>\mu^2\}\cap\{(\mu,\eta)\,|\,(1+b_2^2-2b_2)\mu^2\\&+2a_2\mu\eta+\eta^2-2a_2b_2\mu+(a_2^2-b_2^2-1)\eta+b_2^2<0\}\end{aligned}$$

如果$\tilde{V}_{A_1}\cap\tilde{V}_{A_2}\neq\phi$，那么原点是渐近稳定的，且具有二次Lyapunov函数

$$V(x)=x^T\begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & \eta \end{bmatrix}x$$

这个条件易用计算机辅助画图判断。

例1

$$x_{n+1}=0.5x_n-0.6x_{n-1} \qquad x_n\geqslant 0$$

$$x_{n+1}=0.7x_n-0.4x_{n-1} \qquad x_n<0$$

我们用计算机绘出$\tilde{V}_{A_1}$和$\tilde{V}_{A_2}$，如图1所示。从$x_0=1.0$，$x_1=1.0$出发的序列x_n绘在图3上。从图1中可见$\tilde{V}_{A_1}$和$\tilde{V}_{A_2}$确定相交，因此原点是渐近稳定的，见图3。

例2

$$x_{n+1}=1.5x_n-0.9x_{n-1} \qquad x_n\geqslant 0$$

$$x_{n+1}=-1.5x_n-0.9x_{n-1} \qquad x_n<0$$

做法同例1，序列x_n的初值$x_0=0.1$，$x_1=0.1$，图4中可见x_n发散。图2表示$\tilde{V}_{A_1}$与$\tilde{V}_{A_2}$不交。

五、结　束　语

我们已经给出了线性时不变离散系统Lyapunov方程解集的一些几何性质，并把这些结果应用到分段线性离散系统，得到了系统的原点是渐近稳定的一些充分条件。必须指出这些条件只是充分的，能否得到充要的条件呢？另外，对于一个子系统是不稳定的或二子系统都不稳定的情形如何呢？这些问题都是很有意义的，当然也是十分困难的，有待进一步地研究。

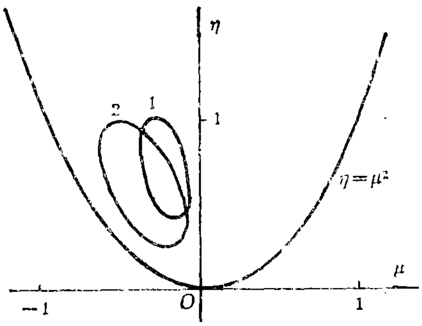

图 1

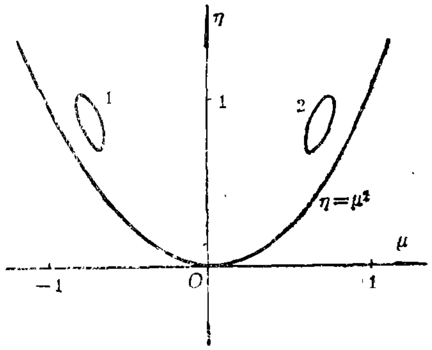

图 2

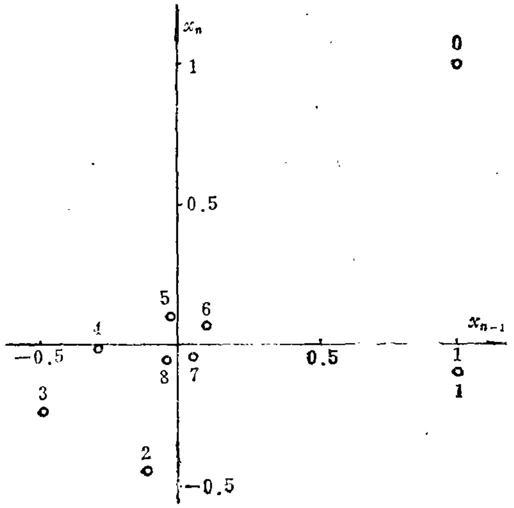

图 3

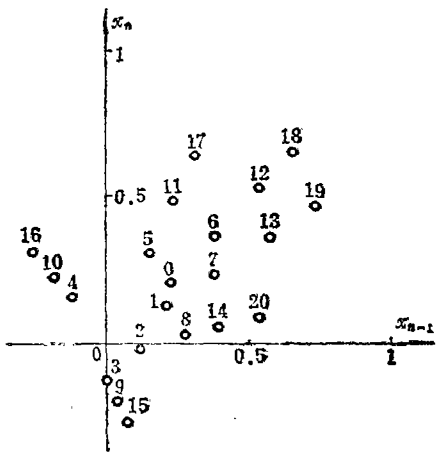

图 4

参 考 文 献

[1] Brayton, R. K. and C. H. Tong, Stability of dynamical systems: A constructive approach, *IEEE Trans. Circuits System*, **26** (1979), 224.

[2] Chan, K. S. and H. Tong, A note on sub-system stability and system stability, *J. Eng. Math.*, **1** (1984), 43.

[3] Chan, K. S. and H. Tong, On the use of the deterministic Lyapunov function for the ergodicity of stochastic difference equations, *Adv. Appl. Prob.*, **17** (1985), 666.

[4] 黄琳,《系统和控制理论中的线性代数》, 科学出版社 (1984).

[5] Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton University Press (1972).

[6] Tong, H., *Threshold Models in Nonlinear Time Series Analysis*, Lecture Notes in Statistics 21, Springer-Verlag, Heidelberg (1983).

[7] Willson, A. N., A stability criterion for nonautonomous difference equations, with application to the design of a digital FSK oscillator, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 21 (1974), 124.

Some Problems of Second Method of Lyapunov in Discrete Systems

Li Zhong   Huang Lin

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

The geometric properties of the solution set of Lyapunov equation of linear time-invariant discrete system are discussed. Furthermore, the stability of piecewise linear discrete systems is studied and some sufficient conditions are obtained for the asymptotical stability of piecewise linear discrete systems in which each sub-system is stable. The results are applied to second order piecewise linear systems.