应用数学和力学,第 25 卷 第 7 期(2004 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 03_0763_08

一类含慢变量奇摄动非线性系统初始层现象

黄蔚章, 陈育森

(福建师范大学 福清分校, 福建 福清 350300)

(我刊原编委林宗池推荐)

摘要: 研究含有慢变量的一类奇摄动非线性系统初始层现象,通过引进不同量级的伸长变量,构造不同 厚度 的初始层校正项,得到了摄动解关于小参数的 N 阶近似展开式,揭示了摄动解呈现的 层中层 现象,并利用不动点原理证明了摄动解的存在,给出了解的一致有效的渐近展开式

关 键 词: 奇摄动; 初始层; 渐近展开

中图分类号: O175.1; 文献标识码: A

引 言

关于奇摄动非线性初值问题的 层中层 现象的研究已有一些工作[1~3] 但对含慢变量系统的研究工作还为数不多,本文研究含慢量的一类奇摄动非线性系统初值问题:

$$\boldsymbol{x} = (t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{1}$$

$$^{3}\boldsymbol{y} = (t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ \boldsymbol{y}), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{x}(0, \ ) = \boldsymbol{A}(\ ), \ \boldsymbol{y}(0, \ ) = \boldsymbol{B}(\ ), \ \boldsymbol{y}\ (0, \ ) = \boldsymbol{C}(\ ), \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ , \ , \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 均为 n 维列向量 当 0^+ 时, 相应的退化问题

$$\boldsymbol{x} = (t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{0} = (t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{0}) \tag{5}$$

文中恒设:

( ) 退化问题(4)、(5)在定解条件 $\boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{A}_0$ 下存在唯一充分光滑的解 $(\boldsymbol{X}_0(t), \boldsymbol{Y}_0(t))$

( ) $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ 及其 Jacobi 矩阵 $_x, \ _y, \ _x, \ _y, \ _z$ 关于各变量充分光滑

( ) $_y(t, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{0})$ 非奇异, $_z(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0), \boldsymbol{0})$ 的特征值具有负实部, $_z^{-1}(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0), \boldsymbol{0}) \ _y(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0), \boldsymbol{0})$ 的特征值具有正实部

$$(\ )\ \boldsymbol{A}(\ ) = \boldsymbol{A}_0 + \sum_{i=1} \boldsymbol{A}_i \ ^i, \ \boldsymbol{B}(\ ) = \boldsymbol{B}_0 + \sum_{i=1} \boldsymbol{B}_i \ ^i, \ \boldsymbol{C}(\ ) = \boldsymbol{C}_0 + \sum_{i=1} \boldsymbol{C}_i \ ^i, \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}(0), \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{Y}(0), \boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{C}(0)$

收稿日期: 2002_03_03; 修订日期: 2003_11_02

基金项目: 福建省教育厅科研项目(JB00040)

作者简介: 黄蔚章(1946),女,福建福州人,教授(联系人. Tel: + 86_591_5239719; Fax: + 86_591_5235603; E_mail: CYS202@163.com).

方程(4)、(5)是一个向量代数方程和一个一阶向量微分方程组成的系统, 其解显然不可能同时满足(3)的三个条件　注意到变量 $\boldsymbol{y}$ 的二阶导数项和一阶导数项前面所带小参数　的量级不同以及系统含有慢变量, 在 $t=0$ 附近可能产生不同 厚度 的初始层　为此引进两个不同量级的伸长变量, 构造不同 厚度 的初始校正项, 得到了摄动解关于　的 N 阶近似展开式　利用不动点原理证明了解的存在性和渐近展开式的一致有效性

1　初始层校正项

为了得到 $t=0$ 附近的初始层校正项, 令两个伸长变量分别为:

$$=\frac{t}{},\quad s=\frac{}{}=\frac{t}{{}^{2}}, \tag{7}$$

并构造两个不同 厚度 的初始层校正项

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}(\ ,\ )\sim \boldsymbol{u}_0(\ )+\boldsymbol{u}_1(\ )\ +\boldsymbol{u}_2(\ )\ {}^2+\ , \\ \boldsymbol{v}(\ ,\ )\sim \boldsymbol{v}_0(\ )+\boldsymbol{v}_1(\ )\ +\boldsymbol{v}_2(\ )\ {}^2+\ , \end{cases} \tag{8}$$

和

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}(s,\ )\sim \boldsymbol{u}_0(s)+\boldsymbol{u}_1(s)\ +\boldsymbol{u}_2(s)\ {}^2+\ , \\ \boldsymbol{v}(s,\ )\sim \boldsymbol{v}_0(s)+\boldsymbol{v}_1(s)\ +\boldsymbol{v}_2(s)\ {}^2+\ , \end{cases} \tag{9}$$

令

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}(t,\ )+\ {}^2\boldsymbol{u}(\ ,\ )+\ {}^4\boldsymbol{u}(s,\ ), \\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Y}(t,\ )+\ \boldsymbol{v}(\ ,\ )+\ {}^2\boldsymbol{v}(s,\ ), \end{cases} \tag{10}$$

这里 $\boldsymbol{X}(t,\ ),\ \boldsymbol{Y}(t,\ )$ 是外解, 具有如下形式的展开式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}(t,\ )\sim \boldsymbol{X}_0(t)+\boldsymbol{X}_1(t)\ +\boldsymbol{X}_2(t)\ {}^2+\ , \\ \boldsymbol{Y}(t,\ )\sim \boldsymbol{Y}_0(t)+\boldsymbol{Y}_1(t)\ +\boldsymbol{Y}_2(t)\ {}^2+\ , \end{cases} \tag{11}$$

把(10)代入(1),(2)并令

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\ (t,\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}), \\ {}^3\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t^2}=f(t,\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y},\ \ \boldsymbol{Y}), \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}}=\left[\ (t,\boldsymbol{X}(t)+\ {}^2\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{Y}(t)+\ \boldsymbol{v})-\ (t,\boldsymbol{X}(t),\ \boldsymbol{Y}(t))\right]_{t=}\ , \\ {}^2\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\ {}^2}=\left[\left(t,\boldsymbol{X}(t)+\ {}^2\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{Y}(t)+\ \boldsymbol{v},\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t}+\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}}\right)-\right. \\ \qquad\left.\left(t,\boldsymbol{X}(t),\ \boldsymbol{Y}(t),\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t}\right)\right]_{t=}\ , \end{cases} \tag{13}$$

和

$$\begin{cases} {}^2\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}=\left[\ (t,\boldsymbol{X}(t)+\ {}^2\boldsymbol{u}(\ )+\ {}^4\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{Y}(t)+\ \boldsymbol{v}(\ )+\ {}^2\boldsymbol{v})-\right. \\ \qquad\left.(t,\boldsymbol{X}(t)+\ {}^2\boldsymbol{u}(\ ),\ \boldsymbol{Y}(t)+\ \boldsymbol{v}(\ ))\right]_{t=\ {}^2s,\ =\ s}, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}s^2}=\left\{\left(t,\boldsymbol{X}(t)+\ {}^2\boldsymbol{u}(\ )+\ {}^4\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{Y}(t)+\ \boldsymbol{v}(\ )+\ {}^2\boldsymbol{v},\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t}+\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}}+\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}s}\right)-\right. \\ \qquad\left.\left(t,\boldsymbol{X}(t)+\ {}^2\boldsymbol{u}(\ ),\ \boldsymbol{Y}(t)+\ \boldsymbol{v}(\ ),\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t}+\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}}\right)\right\}_{t=\ {}^2s,\ =\ s} \end{cases} \tag{14}$$

把(8)、(9)和(11)代入(12)、(13)、(14)并把各等式的右边关于 幂展开, 比较 同次幂的系数, 于是由(12)得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_0 = \ (t, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0), \\ \boldsymbol{0} = \ (t, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{0}), \end{cases} \tag{15$_0$}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_i}{\mathrm{d}t} = \ _x(t, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0)\boldsymbol{X}_i + \ _y(t, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0)\boldsymbol{Y}_i + \ _i(t), \\ \ _x(t, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{0})\boldsymbol{X}_i + \ _y(t, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{0})\boldsymbol{Y}_i + \ _i(t) = \ \boldsymbol{Y}_{i-3}(t), \end{cases} \tag{15$_i$}$$

$$(i = 1, 2, \ )$$

其中 $_i(t)$ 是 $t, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_1, \ , \boldsymbol{X}_{i-1}, \boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{Y}_1, \ , \boldsymbol{Y}_{i-1}$ 的已知函数, $_i(t)$ 是 $t, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_1, \ , \boldsymbol{X}_{i-1}, \boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{Y}_1, \ , \boldsymbol{Y}_{i-1}$ 和 $\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{Y}_1, \ , \boldsymbol{Y}_{i-1}$ 的已知函数 规定下标为负的项为零, 下同 由(13)得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_0}{\mathrm{d}} = \ _y(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0))\boldsymbol{v}_0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}} = - \ _z^{-1}(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0), \boldsymbol{0}) \ _y(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0), \boldsymbol{0})\boldsymbol{v}_0 \end{cases} \tag{16$_0$}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_i}{\mathrm{d}} = \ _y(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0))\boldsymbol{v}_i + \ _i(\ ), \\ \ _z(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0), \boldsymbol{0}) \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}} + \ _y(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0), \boldsymbol{0})\boldsymbol{v}_i + \ _i(\ ) = \ \boldsymbol{v}_{i-1}, \end{cases} \tag{16$_i$}$$

$$(i = 1, 2, \ ),$$

其中 $_i(\ )$ 是 $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ , \boldsymbol{u}_{i-1}$ 和 $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ , \boldsymbol{v}_{i-1}$ 的不含常数项的多项式, 其系数是 $_0$ 的多项式 $_i(\ )$ 是类似于 $_i(\ )$ 的关于 $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ , \boldsymbol{u}_{i-1}, \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ , \boldsymbol{v}_{i-1}$ 及其 $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ , \boldsymbol{v}_{i-1}$ 的多项式 由(14)得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_0}{\mathrm{d}s} = \ _y(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0), \boldsymbol{0})\boldsymbol{v}_0, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}s^2} = \ _z(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0), \boldsymbol{0}) \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}s}, \end{cases} \tag{17$_0$}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_i}{\mathrm{d}s} = \ _y(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0), \boldsymbol{0})\boldsymbol{v}_i + \ _i(s), \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}s^2} + \ _z(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0), \boldsymbol{0}) \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}s} + \ _i(s), \end{cases} \tag{17$_i$}$$

其中 $_i(s)$ 是关于 $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ , \boldsymbol{u}_{i-1}$ 和 $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ , \boldsymbol{v}_{i-1}$; $_i(s)$ 是关于 $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ , \boldsymbol{u}_{i-1}, \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ , \boldsymbol{v}_{i-1}$ 和 $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ , \boldsymbol{v}_{i-1}$ 的不含常数项的多项式, 其系数是 s 的多项式

为给出问题(15)$_i$(16)$_i$(17)$_i$($i = 0, 1, 2, \ $) 的定解条件, 令

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}(0) + \ ^2\boldsymbol{u}(0) + \ ^4\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{A}(\ ), \\ \boldsymbol{Y}(0) + \ \boldsymbol{v}(0) + \ ^2\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{B}(\ ), \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} + \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}}\Big|_{=0} + \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} = \ \boldsymbol{C}(\ ) \end{cases} \tag{18}$$

那么把(8), (9), (11)和(6)代入(18)得到:

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_i(0) + \ \boldsymbol{u}_{i-2}(0) + \ \boldsymbol{u}_{i-4}(0) = \ \boldsymbol{A}_i, \\ \boldsymbol{Y}_i(0) + \ \boldsymbol{v}_{i-1}(0) + \ \boldsymbol{v}_{i-2}(0) = \ \boldsymbol{B}_i, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_i}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} + \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}}\Big|_{=0} + \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} = \ \boldsymbol{C}_i \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2, \ ), \tag{19}$$

由假设条件( ) 知问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1}{\mathrm{d}t} = \ _x(t, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0)\boldsymbol{X}_1 + \ _y(t, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0)\boldsymbol{Y}_1 + \ _1(t), \\ \ _x(t, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{0})\boldsymbol{X}_1 + \ _y(t, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{0})\boldsymbol{Y}_1 + \ _1(t) = \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{14$_1$}$$

满足定解条件 $\boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{A}_1$ 的解唯一存在 从而问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_0}{\mathrm{d}} = \ _y(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0))\boldsymbol{v}_0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}} = - \ _z^{-1}(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0), \boldsymbol{0}) \ _y(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0), \boldsymbol{0})\boldsymbol{v}_0, \end{cases} \tag{15$_0$}$$

满足定解条件 $\boldsymbol{u}_0(+ \ ) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v}_0(0) = \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{Y}_1(0)$ 的解唯一存在, 且当 $+$ 时呈指数型衰减 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_0}{\mathrm{d}s} = \ _y(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0))\boldsymbol{v}_0, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}s^2} = \ _z(0, \boldsymbol{X}_0(0), \boldsymbol{Y}_0(0), \boldsymbol{0})\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}s}, \end{cases} \tag{16$_0$}$$

满足定解条件 $\boldsymbol{u}_0(+ \ ) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v}_0(+ \ ) = \boldsymbol{0}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} = \boldsymbol{C}_0 - \left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} - \left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}}\right|_{=0}$ 的解同样唯一存在, 且当 $s \ +$ 时呈指数型衰减 一般地由递推方程(15)$_i$、(16)$_i$ 和(17)$_i$ 分别满足定解条件

$$\boldsymbol{X}_i(0) = \boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{u}_{i-2}(0) - \boldsymbol{u}_{i-4}(0), \tag{20}$$

$$\boldsymbol{u}_i(+ \ ) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{v}_i(0) = \boldsymbol{B}_{i+1} - \boldsymbol{Y}_{i+1} - \boldsymbol{v}_{i-2}(0), \tag{21}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_i(+ \ ) = \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{v}_i(+ \ ) = \boldsymbol{0}, \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} = \boldsymbol{C}_i - \left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} - \left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}}\right|_{=0}, \end{cases} \tag{22}$$

可依次唯一地确定 $(\boldsymbol{X}_i(t), \boldsymbol{Y}_i(t))$, $(\boldsymbol{u}_i(\ ), \boldsymbol{v}_i(\ ))$ 和 $(\boldsymbol{u}_i(s), \boldsymbol{v}_i(s))$ 由 $_i(\ )$, $_i(\ )$, $_i(s)$ 和 $_i(s)$ 的结构可知, 当 $, s \ +$ 时, $\boldsymbol{u}_i(\ )$, $\boldsymbol{v}_i(\ )$, $\boldsymbol{u}_i(s)$ 和 $\boldsymbol{v}_i(s)$ $(i = 1, 2, \ )$ 均呈指数型衰减 于是对任意的正整数 N, 得到问题(1)、(2) 的 N 阶近似展开式

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_N(t, \ ) = \displaystyle\sum_{i=0}^{N}\left[\boldsymbol{X}_i(t) + \ ^2\boldsymbol{u}_i\left(\frac{t}{}\right) + \ ^4\boldsymbol{u}_i\left(\frac{t}{^2}\right)\right] \ ^i, \\ \boldsymbol{y}_N(t, \ ) = \displaystyle\sum_{i=0}^{N}\left[\boldsymbol{Y}_i(t) + \ \boldsymbol{v}_i\left(\frac{t}{}\right) + \ ^2\boldsymbol{v}_i\left(\frac{t}{^2}\right)\right] \ ^i \end{cases} \tag{23}$$

2 渐近展开式的一致性

本节将证明存在 $\boldsymbol{R}_N(t, \ )$, $\boldsymbol{Q}_N(t, \ )$ 使得

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t, \ ) = \boldsymbol{x}_N(t, \ ) + \boldsymbol{R}_N(t, \ ), \\ \boldsymbol{y}(t, \ ) = \boldsymbol{y}_N(t, \ ) + \boldsymbol{Q}_N(t, \ ), \end{cases} \tag{24}$$

为方程(1) ~ (3) 的解且 $\boldsymbol{R}_N(t, \ )$, $\boldsymbol{Q}_N(t, \ ) = O(\ ^{N+1})$,

由 $\boldsymbol{x}_N(t, \ )$, $\boldsymbol{y}_N(t, \ )$ 的构造知 $\boldsymbol{R}_N(t, \ )$, $\boldsymbol{Q}_N(t, \ )$ 必须满足初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_N}{\mathrm{d}t} = \quad (t, \boldsymbol{x}_N + \ \boldsymbol{R}_N, \boldsymbol{Y}_N + \ \boldsymbol{Q}_N) - \quad (t, \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{y}_N) + \boldsymbol{G}(t, \ ) \quad ^{N+1}, \\ {}^3 \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{Q}_N}{\mathrm{d}t^2} = \quad (t, \boldsymbol{x}_N + \ \boldsymbol{R}_N, \boldsymbol{y}_N + \ \boldsymbol{Q}_N, \ \boldsymbol{y}_N + \ \boldsymbol{Q}_N) - \\ \qquad\qquad (t, \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{y}_N, \ \boldsymbol{y}_N) + \boldsymbol{F}(t, \ ) \quad ^{N+1}, \end{cases} \tag{25}$$

$$\boldsymbol{R}_N(0, \ ) = \ (\ ) \ ^{N+1}, \ \boldsymbol{Q}_N(0, \ ) = \ (\ ) \ ^{N+1}, \ \boldsymbol{Q}_N(0, \ ) = \ (\ ) \ ^{N+1}, \tag{26}$$

其中 $(\ )$, $(\ )$, $C(E)$ 当 E y 0^+ 时有界, $\boldsymbol{G}(t, E)$, $\boldsymbol{F}(t, E)$ 当 E y 0^+ 时关于 t 一致有界# 为证明(25)、(26) 的解的存在性及量级估计, 设 $\boldsymbol{S}_N = E\boldsymbol{Q}_N^{c}$ 那么(25)、(26) 等价于一阶方程组:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_N^{c} \\ E\boldsymbol{Q}_N^{c} \\ E^2\boldsymbol{S}_N^{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_x(\#) & {}_y(\#) & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \\ {}_x(\#\#) & {}_y(\#\#) & {}_z(\#\#) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_N \\ \boldsymbol{Q}_N \\ \boldsymbol{S}_N \end{bmatrix} +$$

$$E^{N+1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}(t, E) \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F}(t, E) \end{bmatrix} + \boldsymbol{NE}(\boldsymbol{R}_N, \boldsymbol{Q}_N, \boldsymbol{S}_N), \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_N(0, E) \\ \boldsymbol{Q}_N(0, E) \\ \boldsymbol{S}_N(0, E) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(E) \\ B(E) \\ EC(E) \end{bmatrix} E^{N+1}, \tag{28}$$

其中

$$\boldsymbol{NE}(\boldsymbol{R}_N, \boldsymbol{Q}_N, \boldsymbol{S}_N) =$$

$$\begin{bmatrix} (t, \boldsymbol{x}_N + \ \boldsymbol{R}_N, \boldsymbol{y}_N + \ \boldsymbol{Q}_N) - \ (\#) - \ {}_x(\#)\boldsymbol{R}_N - \ {}_y(\#)\boldsymbol{Q}_N \\ \boldsymbol{0} \\ (t, \boldsymbol{x}_N + \ \boldsymbol{R}_N, \boldsymbol{y}_N + \ \boldsymbol{Q}_N, E\boldsymbol{y}_N + \ \boldsymbol{S}_N) - \ (\#\#) - \ {}_x(\#\#)\boldsymbol{R}_N - \ {}_y(\#\#)\boldsymbol{Q}_N - \ {}_z(\#\#)\boldsymbol{S}_N \end{bmatrix},$$

符号(#), (##) 分别表示点 $(t, \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{y}_N)$ 和 $(t, \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{y}_N, E\boldsymbol{y}_N)$#

用 $\boldsymbol{LE}$表示与(27) 对应的线性微分算子:

$$\boldsymbol{LE}(\boldsymbol{R}_N, \boldsymbol{Q}_N, \boldsymbol{S}_N) \ S \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_N^{c} \\ E\boldsymbol{Q}_N^{c} \\ E^2\boldsymbol{S}_N^{c} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}_x(\#) & {}_y(\#) & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \\ {}_x(\#\#) & {}_y(\#\#) & {}_z(\#\#) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_N \\ \boldsymbol{Q}_N \\ \boldsymbol{S}_N \end{bmatrix}, \tag{29}$$

那么有

$$\boldsymbol{LE}(\boldsymbol{R}_N, \boldsymbol{Q}_N, \boldsymbol{S}_N) = E^{N+1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}(t, E) \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F}(t, E) \end{bmatrix} + \boldsymbol{NE}(\boldsymbol{R}_N, \boldsymbol{Q}_N, \boldsymbol{S}_N)\# \tag{30}$$

以 $\boldsymbol{C}^{(0)}$, $\boldsymbol{C}^{(1)}$ 分别表示连续或连续可微的向量函数对 $(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t))$ 所组成的空间, 其中 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为 n 维列向量, 并规定 $\boldsymbol{C}^{(i)}$ 的范数 $+(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t))+_i = \ +\boldsymbol{a}(t)+_i + \ +\boldsymbol{b}(t)+_i + \ +\boldsymbol{c}(t)+_i (i = 0, 1)$ 对 n 维列向量 $\boldsymbol{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), \ , \ , a_n(t))$ 规定

$$+\boldsymbol{a}(t)+_0 = \max_{1[\ i[\ n}\left(\sup_t a_i(t)\right), \quad +\boldsymbol{a}(t)+_1 = \max_{1[\ i[\ n}\left(\sum_{j=0}^{1} \sup_t a_i^{(j)}(t)\right), \tag{31}$$

以 $\boldsymbol{C}^{(1)}$ 表示 $\boldsymbol{C}^{(1)}$ 中当 $t = 0$ 时取零值的向量函数对所组成的子空间# 记

$$\boldsymbol{h}(E) = (A(E), B(E), C(E)), \quad \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3)$$

其中

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{R}_N(t, E) - A(E)E^{N+1},\quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{Q}_N(t, E) - B(E)E^{N+1},$$

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{S}_N(t, E) - C(E)E^{N+1}\#$$

由(28)、(30)得初值问题

$$\begin{cases} \boldsymbol{LEw} = \boldsymbol{H}(t, E)E^{N+1} + \boldsymbol{NE}(\boldsymbol{w} + E^{N+1}\boldsymbol{h}(E)), \\ \boldsymbol{w}(0) = \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{32}$$

其中 $+\boldsymbol{H}(t, E)+_0 = O(1)$, $+\boldsymbol{h}(E)+_0 = O(1)$

由微分方程理论知, 初值问题 $\boldsymbol{LEX} = \boldsymbol{p}(t)$, $X(0) = 0$ 存在唯一解 $X(t)\ I\ \boldsymbol{C}^{(1)}$, 且存在正常数 M, 使得

$$+X+_1 [\ E^{-2}M+\boldsymbol{p}(t)+_0\# \tag{33}$$

定义算子方程

$$\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{TEw}(t), \tag{34}$$

其中 $\boldsymbol{TEw} = \boldsymbol{L}_E^{-1}[\boldsymbol{H}(t, E)E^{N+1} + \boldsymbol{NE}(\boldsymbol{w} + E^{N+1}\boldsymbol{h}(E))]\#$ 用 $\boldsymbol{S}_1^{(N-2)}$ 表示 $\boldsymbol{C}^{(1)}$ 中的球#

$$\boldsymbol{S}_1^{(N-2)} = \left\{\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w}\ I\ \boldsymbol{C}^{(1)},\ +\boldsymbol{w}+_1 [\ E^{N-2}\right\}\# \tag{35}$$

定理 1 在假设条件( )~( )下, 初值问题(27)、(28), 当 $E > 0$ 充分小时存在解 $(\boldsymbol{R}_N(t), \boldsymbol{Q}_N(t), \boldsymbol{S}_N(t))\ I\ \boldsymbol{C}^{(1)}$, 且在 $\boldsymbol{S}_t^{(N-2)}(N \setminus 5)$ 上是唯一的#

证明 要证明本定理只要证明算子 $\boldsymbol{TE}$ 是 $\boldsymbol{S}_1^{(N-2)}$ 上的压缩算子:

( ) 当 $N \setminus 5$ 时, 若 $\boldsymbol{w}\ I\ \boldsymbol{S}_1^{(N-2)}$ 则 $\boldsymbol{TEw}\ I\ \boldsymbol{S}_1^{(N-2)}$ 事实上, 由(33)知

$$+\boldsymbol{TEw}+_1 [\ E^{-2}M[+\boldsymbol{H}(t, E)+_0 E^{N+1} + +\boldsymbol{NE}(\boldsymbol{w} + E^{N+1})\boldsymbol{h}(E)+]\#$$

利用微分中值定理可得

$$(t, \boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{w}_1 + A(E)E^{N+1}, \boldsymbol{y}_N + \boldsymbol{w}_2 + B(E)E^{N+1}) -$$

$$(\#) - {}_x(\#)(\boldsymbol{w}_1 + A(E)E^{N+1}) - {}_y(\#)(\boldsymbol{w}_2 + B(E)E^{N+1}) =$$

$$[{}_x(\#\#\#) - {}_x(\#)](\boldsymbol{w}_1 + A(E)E^{N+1}) + [{}_y(\#\#\#) - {}_y(\#)](\boldsymbol{w}_2 + B(E)E^{N+1}),$$

$$(t, \boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{w}_1 + A(E)E^{N+1}, \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{w}_2 + B(E)E^{N+1}, E\boldsymbol{y}_N^{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{w}_3 + C(E)E^{N+2}) -$$

$$(\#\#) - {}_x(\#\#)(\boldsymbol{w}_1 + A(E)E^{N+1}) - {}_y(\#\#)(\boldsymbol{w}_2 + B(E)E^{N+1}) -$$

$${}_z(\#\#)(\boldsymbol{w}_3 + C(E)E^{N+2}) = [{}_x(\#\#\#\#) - {}_x(\#\#)](\boldsymbol{w}_1 + A(E)E^{N+1}) +$$

$$[{}_y(\#\#\#\#) - {}_y(\#\#)](\boldsymbol{w}_2 + B(E)E^{N+1}) +$$

$$[{}_z(\#\#\#\#) - {}_z(\#\#)](\boldsymbol{w}_3 + C(E)E^{N+2}),$$

这里省略号(###)表示 $[t, \boldsymbol{x}_N + H_1(\boldsymbol{w}_1 + A(E)E^{N+1}), \boldsymbol{y}_N + H_1(\boldsymbol{w}_2 + B(E)E^{N+1})]$, (####)表示 $[t, \boldsymbol{x}_N + H_2(\boldsymbol{w}_1 + A(E)E^{N+1}), \boldsymbol{y}_N + H_2(\boldsymbol{w}_2 + B(E)E^{N+1}), E\boldsymbol{y}_N^{\boldsymbol{c}} + H_2(\boldsymbol{w}_3 + C(E)E^{N+2})]$, $0 < H_1$, $H_2 < 1\#$ 由 , 的光滑性知, 当 $\boldsymbol{w}\ I\ \boldsymbol{S}_1^{(N-2)}$ 时, 存在正常数 M_1 使得

$$+\boldsymbol{NE}(\boldsymbol{w} + E^{N+1}\boldsymbol{h}(E))+ [\ M_1 E^{2N-4},$$

又由 $+\boldsymbol{H}(t, E)+_0$ 的有界性知存在 $M_2 > 0$, 使得 $+\boldsymbol{H}(t, E)+_0 [\ M_2$ 故

$$+\boldsymbol{TEw}+ [\ \boldsymbol{E}^2 M(M_2 E^{N+1} + M_1 E^{2N-4}) [\ E^{N-2}\# EM(M_2 + M_1 E^{N-5}),$$

当 $\boldsymbol{N} \setminus 5$ 时, 取 $E > 0$ 充分小使得 $EM(M_2 + M_1 E^{N-5}) [\ 1$, 那么 $\boldsymbol{TEw}\ I\ \boldsymbol{S}_1^{(N-2)}\#$

( ) 若 $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}^*\ I\ \boldsymbol{S}_1^{(N-2)}$, 则存在 $0 < k < 1$ 使得当 $N \setminus 5$ 时, 有 $+\boldsymbol{TEw} - \boldsymbol{TEw}^*+_1 [\ k+\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}^*+_1$, 其中 $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3)$, $\boldsymbol{w}^* = (\boldsymbol{w}_1^*, \boldsymbol{w}_2^*, \boldsymbol{w}_3^*)$, 事实上, 由(33)知

$$+\boldsymbol{TEw} - \boldsymbol{TEw}^*+_1 [\ E^{-2}M+\boldsymbol{NE}(\boldsymbol{w} + E^{N+1}\boldsymbol{h}(E)) - \boldsymbol{NE}(\boldsymbol{w}^* + E^{N+1}\boldsymbol{h}(E))+_0\#$$

利用微分中值定理可得

$$
\begin{aligned}
&(t, x_N + w_1 + A(\varepsilon)\varepsilon^{N+1}, y_N + w_2 + B(\varepsilon)\varepsilon^{N+1}) - \\
&\quad (t, x_N + w_1^* + A(\varepsilon)\varepsilon^{N+1}, y_N + w_2^* + B(\varepsilon)\varepsilon^{N+1}) - \\
&\quad {}_x(\#)(w_1 - w_1^*) - {}_y(\#)(w_2 - w_2^*) = \\
&\quad [{}_x(.) - {}_x(\#)](w_1 - w_1^*) + [{}_y(.) - {}_y(\#)](w_2 - w_2^*), \\
&(t, x_N + w_1 + A(\varepsilon)\varepsilon^{N+1}, y_N + w_2 + B(\varepsilon)\varepsilon^{N+1}, \varepsilon y'_N + w_3 + C(\varepsilon)\varepsilon^{N+2}) - \\
&\quad (t, x_N + w_1^* + A(\varepsilon)\varepsilon^{N+1}, y_N + w_2^* + B(\varepsilon)\varepsilon^{N+1}, \varepsilon y'_N + w_3^* + C(\varepsilon)\varepsilon^{N+2}) - \\
&\quad {}_x(\#\#) - {}_x(\#\#)(w_1 - w_1^*) - {}_y(\#\#)(w_2 - w_2^*) - {}_z(\#\#)(w_3 - w_3^*) = \\
&\quad \left[{}_x\left(\begin{matrix}, \\ ,\end{matrix}\right) - {}_x(\#\#)\right](w_1 - w_1^*) + \\
&\quad \left[{}_y\left(\begin{matrix}, \\ ,\end{matrix}\right) - {}_y(\#\#)\right](w_2 - w_2^*) + \left[{}_z\left(\begin{matrix}, \\ ,\end{matrix}\right) - {}_z(\#\#)\right](w_3 - w_3^*),
\end{aligned}
$$

这里(.)表示点$(t, x_N + w_1^* + A(\varepsilon)\varepsilon^{N+1} + H_3(w_1 - w_1^*),\ y_N + w_2^* + B(\varepsilon)\varepsilon^{N+1} + H_3(w_2 - w_2^*))$，$\left(\begin{matrix}, \\ ,\end{matrix}\right)$表示点$(t, x_N + w_1^* + A(\varepsilon)\varepsilon^{N+1} + H_4(w_1 - w_1^*),\ y_N + w_2^* + B(\varepsilon)\varepsilon^{N+1} + H_4(w_2 - w_2^*),\ \varepsilon y'_N + w_3^* + C(\varepsilon)\varepsilon^{N+2}) + H_4(w_2 - w_2^*))$，$0 < H_3, H_4 < 1$。由 , 的光滑性知，当$w, w^* \in S_1^{(N-2)}$时有

$$
\| NE(w + \varepsilon^{N+1}h(\varepsilon)) - NE(w^* + \varepsilon^{N+1}h(\varepsilon)) \|_0 \leq M_1\varepsilon^{N-2}\| w - w^* \|_0,
$$

从而有

$$
\| TEw - TEw^* \|_1 \leq \varepsilon^{-2}M \cdot M_1\varepsilon^{N-2}\| w - w^* \|_0,
$$

故当$N \geq 5$时，取$\varepsilon > 0$充分小使$\varepsilon^{N-4}MM_1 < k < 1$，那么$\| TEw - TEw^* \|_1 \leq k\| w - w^* \|_0 \leq k\| w - w^* \|_1$，综合( )( )，$TE$是$S_1^{(N-2)}$上的压缩算子，故在$S_1^{(N-2)}$内存在唯一的$w$，使得$w = TEw$，即$LEw = H(t, \varepsilon)\varepsilon^{N+1} + NE(w + \varepsilon^{N+1}h(\varepsilon))$。故初值问题(32)存在解$w \in C^{(1)}$，且在$S_1^{(N-2)}(N \geq 5)$上唯一，从而初值问题(27)、(28)，当$\varepsilon > 0$充分小时存在解，且在$S_1^{(N-2)}(N \geq 5)$上唯一。定理证毕。由定理1即可推得。

定理2 在假设条件( )~( )下，初值问题(1)~(3)当$\varepsilon > 0$充分小时，存在解$(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$，且当$N \geq 5$时，有一致有效的渐近展开式

$$
\begin{aligned}
x(t, \varepsilon) &= x_N(t, \varepsilon) + R_N(t, \varepsilon), \\
y(t, \varepsilon) &= y_N(t, \varepsilon) + Q_N(t, \varepsilon), \\
y'(t, \varepsilon) &= y'_N(t, \varepsilon) + \varepsilon^{1}S_N(t, \varepsilon),
\end{aligned}
$$

且关于t，$\| R_N(t, \varepsilon) \|_0, \| Q_N(t, \varepsilon) \|_0, \| S_N(t, \varepsilon) \|_0 = O(\varepsilon^{N-2})$。

事实上定理1，2中$N \geq 5$是不必要的，因为初值问题(32)在球$S_0^{(N+1)} = \left\{ w \mid w \in C^{(1)}, \| w \|_0 \leq \varepsilon^{N+1} \right\}$中是唯一的。否则，设另有一解$w = (w_1, w_2, w_3) \in S_0^{(N+1)}$，$\| w - w \|_0 \leq \| w - w \|_1 \leq \varepsilon^{-2}M\| NE(w + \varepsilon^{N+1}h(\varepsilon)) - NE(w + \varepsilon^{N+1}h(\varepsilon)) \|_0 \leq \varepsilon^{-2}M \cdot M_1\varepsilon^{N+1}\| w - w \|_0$得出矛盾，由此得出初值问题(27)、(28)在球$S_0^{(N+1)}$中是唯一的。

另方面令

$$
N_N = R_{N+3} + x_{N+3} - x_N, \quad G_N = Q_{N+3} + y_{N+3} - y_N,
$$

由定理2知$\| R_{N+3}(t, \varepsilon) \|_0, \| Q_{N+3}(t, \varepsilon) \|_0 = O(\varepsilon^{N+1})$。由$(x_N, y_N)$，$(x_{N+3}, y_{N+3})$的构造

知

$$+ x_{N+3} - x_{N+0}, \quad + y_{N+3} - y_{N+0} = O(E^{N+1}),$$

所以 $+ N_{N+0}$、$+ G_{N+0} = O(E^{N+1})$# 因为(N_N, G_N)与(R_N, Q_N)同时满足初值问题(27)、(28)，所以 $R_N = N_N$, $Q_N = G_N$，因此有

定理 3　在假设条件( )~( )下，初值问题(27)、(28)当 $E > 0$ 充分小时，有解$(R_N(t, E), Q_N(t, E), S_N(t, E))$ I $C^{(0)}$，且在 $S_0^{(N+1)}$ 上唯一#

由此推出

定理 4　在假设条件( )~( )下，初值问题(1)~(3)当 $E > 0$ 充分小时，存在解$(x(t, E), y(t, E))$，且对任意的正整数 N 有一致有效的渐近展开式

$$x(t, E) = x_N(t, E) + O(E^{N+1}),$$

$$y(t, E) = y_N(t, E) + O(E^{N+1}),$$

$$yc(t, E) = y_N^{c}(t, E) + O(E^{N+1}),$$

这里 $x(t, E)$, $y_N(t, E)$ 由(23)给出#

[参 考 文 献]

[1]　陈育森，黄蔚章. 奇摄动非线性系统初值问题的套层解[J]. 应用数学学报，2001，**24**(1)：49) 55.

[2]　陈育森，黄蔚章. 双参数奇摄动非线性系统套层解[A]. 见：陈树辉等编. 现代数学和力学会议文集(MMM_Ø)[C]. 广州：中山大学出版社，2001，446) 451.

[3]　林宗池. 某类奇摄动边值问题的多重边界层现象[J]. 福建师大学报(自然科学版)，1993，**9**(3)：15) 23.

Initial Layer Phenomena for a Class of Singular Perturbed Nonlinear System with Slow Variables

HUANG Wei_zhang,　CHEN YU_sen

(Fujian Normal Uiversity Fuqing Branch, Fuqing, Fujian 350300, P.R.China)

Abstract: The initial layer phenomena for a class of singular perturbed nonlinear system with slow variables are studied. By introducing stretchy variables with different quantity levels and constructing the correction term of initial layer with different / thickness0, the N_order approximate expansion of perturbed solution concerning small parameter is obtained, and the/ multiple layer0 phenomena of perturbed solutions are revealed. Using the fixed point theorem, the existence of perturbed solution is proved, and the uniformly valid asymptotic expansion of the solutions is given as well.

Key words: singular perturbation; initial layer; asymptotic expansion