应用数学和力学，第9卷第12期（1988年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

半线性二阶系统的奇异摄动现象*

林宗池　　林苏榕

（福建师范大学数学系）　　（福建广播电视大学数学科）

（1987年7月20日收到）

摘　要

本文研究半线性二阶系统的奇异摄动现象，在适当的假设下，借助于构造特殊的不变域，证得向量边值问题解的存在及其当$\varepsilon\to0^+$时的渐近性质，在这种不变域中解呈现所谓的边界层现象和角层现象．

一、引　　言

本文研究向量边值问题

$$\varepsilon x''=F(t,x,\varepsilon),\qquad a<t<b \tag{1.1}$$

$$x(a,\varepsilon)=A(\varepsilon),\qquad x(b,\varepsilon)=B(\varepsilon) \tag{1.2}$$

其中ε是正的小参数，x，F，A和B是N维向量．为明确起见，我们假定所有的向量是列向量，因此，向量x的转置是行向量，表为x^T．此外，$\|\cdot\|$将表示通常的N维欧氏模，即$\|x\|=(x^Tx)^{\frac{1}{2}}$．

在(1.1)、(1.2)中形式地令$\varepsilon=0$，我们就得到相应的、不要求边界条件的退化系统

$$F(t,u,0)=0 \tag{1.3}$$

众所周知，对于一维的问题，(1.1)、(1.2)的解的存在及其当$\varepsilon\to0^+$的渐近性质已研究得十分广泛，例如，可参看文[1]～[3]．然而，对于向量系统(1.1)、(1.2)的研究还很有限，只有Kelley[4]和Howes[5]做了一点工作．最近，O'Donnell[6]，章国华和刘光旭[7]，章国华和林宗池[8]等也研究了向量系统(1.1)和(1.2)的解的存在性及其当$\varepsilon\to0^+$时的渐近性质，这些工作实质上是在允许使用相应的纯量理论的假设下得到了(1.1)、(1.2)的解的按分量的估计．本文将进一步研究向量系统(1.1)、(1.2)和证明纯量理论如何能够用来研究高维的向量问题．我们完成这个任务主要依靠引进关于退化方程(1.3)的解的"向量稳定"的定义，然后利用(1.3)的稳定解去描述(1.1)、(1.2)的解关于$\varepsilon>0$很小时的性质，从而得到解的按向量的模的估计．

* 福建省科学基金资助课题．

二、某些预备结果

为了读者的方便，本文收集一些用来证明我们主要定理的结果。让我们研究一般的向量问题

$$x''=g(t,x),\qquad a<t<b \tag{2.1}$$

$$x(a)=A,\qquad x(b)=B \tag{2.2}$$

其中 x, g, A 和B是在R^N中，设 $r(t,\ x)$ 是在 $[a,\ b]\times R^N$ 中的 $C^{(2)}$类的实值函数，$W_1(t,x)$ ($W_2(t,x)$)是$r(\partial r/\partial t)$关于 x 的梯度和向量H是 r 关于x的 Hessian 矩阵。则 r 关于(2.1)的一阶、二阶导数可表为

$$r'=\frac{\partial r}{\partial t}+W_1^T x' \tag{2.3}$$

和

$$r''=\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+2W_2^T x'+x'^T H x'+W_1^T g \tag{2.4}$$

定义$\Omega=\{(t,x):\ a\leqslant t\leqslant b,\ r(t,x)\leqslant 0\}\subset R^{N+1}$.

下面定理是文[9]中定理 4 的特殊情况.

定理 1 假设Ω是一个有界集合和

(a) 上述的函数 r 满足

$$r''\geqslant 0,\qquad 当 r=r'=0时 \tag{2.5}$$

(b) 有一个在 $[a,b]$ 上的$C^{(2)}$类函数，它满足 (2.2) 和它的轨线包含在Ω中；

(c) 关于(2.1)的初值问题有唯一的解，则 Dirichlet 问题(2.1)、(2.2)有一个解$x(t)$，满足$r(t,x(t))\leqslant 0$，当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时。

这个定理使我们能够改变(2.1)、(2.2)的研究为去构造一个具有所要求的预期性质的解的不变域，本文的余下部分是由应用这些结果到摄动问题(1.1)、(1.2)所组成的。

三、奇异摄动现象

设 $u=u(t)$ 是退化系统 (1.3) 的解，它在 $[a,b]$ 中是连续的，同时，我们定义区域 $D(u)$：

$$D(u)=\{(t,x,\varepsilon):\ a\leqslant t\leqslant b,\ \|x-u(t)\|\leqslant d(t),\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\}$$

其中 ε_0 是小正数；$d(t)$是一个正的连续函数，使得

$$d(t)=\begin{cases}\|A(\varepsilon)-u(a)\|+\delta, & 若 a\leqslant t\leqslant a+\delta/2\\ \delta, & 若 a+\delta\leqslant t\leqslant b-\delta\\ \|B(\varepsilon)-u(b)\|+\delta, & 若 b-\delta/2\leqslant t\leqslant b\end{cases}$$

这里的 δ 是一个正的小常数。

我们假设，除了$x=0$ 外[1)]，对于$D(u)$中的所有(t,x,ε)

1) 若$x=0$，则方程(1.1)右边的函数与x无关，只依赖于t，可通过直接积分求解。

$$\frac{x^T}{\|x\|}F(t,x,\varepsilon)\geqslant f(t,\|x\|,\varepsilon)$$

其中$f=f(t,z,\varepsilon)$是定义在$\tilde{D}(z_0)=\{(t,z,\varepsilon)$: $a\leqslant t\leqslant b$, $|z-z_0(t)|\leqslant d(t)$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\}$中的适当光滑的实值函数，且满足$f(t,z_0,0)=0$。

这样的比较函数f的存在将使我们有可能去研究(1.1)、(1.2)的解的渐近性质，只要我们能够解决在$\tilde{D}(z_0)$中相应的纯量问题:

$$\varepsilon z''=f(t,z,\varepsilon);\qquad z(a,\varepsilon)=\|A(\varepsilon)-u(a)\|,\ z(b,\varepsilon)=\|B(\varepsilon)-u(b)\|$$

由于纯量问题理论的启发，我们现在来定义关于退化系统(1.3)的解的稳定性的两种类型。在这些定义中，我们暗中假定了函数f具有适当阶数的偏导数。

定义1 $F(t,u,0)=0$的解$u=u(t)$在$[a,b]$中是广义的I_q-稳定的，只要$f(t,z_0,0)=0$的解$z_0=z_0(t)$是I_q-稳定，即，如果存在一个正的常数m，使得，当$a\leqslant t\leqslant b$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$时，

$$\partial_z^j f(t,z_0,\varepsilon)\geqslant 0,\qquad j=0,1,\cdots,2q$$

且在$\tilde{D}(z_0)$中

$$\partial_z^{2q+1}f(t,z,\varepsilon)\geqslant m>0$$

其中
$$\partial_z^s f=\partial^s f/\partial z^s\qquad(s=0,1,\cdots)$$

定义2 $F(t,u,0)=0$的解$u=u(t)$在$[a,b]$中称为广义的II_n-稳定的，只要$f(t,z_0,0)=0$的解$z_0=z_0(t)$是II_n-稳定的，即，若存在一个正的常数m，使得，当$a\leqslant t\leqslant b$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$时，

$$\partial_z^j f(t,z_0,\varepsilon)\geqslant 0,\qquad 1\leqslant j\leqslant n-1$$

且在$\tilde{D}(z_0)$中

$$\partial_z^n f(t,z,\varepsilon)\geqslant m>0$$

下面定理是文[4]中定理3的推广。

定理2 假设

(a) 退化系统(1.3)有一个$C^{(2)}[a,b]$类的广义的I_q-稳定的解$u=u(t)$；

(b) 除了$y=0$外，对于所有的$(t,y,\varepsilon)\in\Omega_1$,

$$\frac{y^T}{\|y\|}[F(t,y+u,\varepsilon)-\varepsilon u'']\geqslant f(t,\|y+u\|,\varepsilon)-\varepsilon\|u''\|$$

其中

$$\Omega_1=\{(t,y,\varepsilon):\ a\leqslant t\leqslant b,\ \|y\|\leqslant D_L(t,\varepsilon)+D_R(t,\varepsilon)+\Gamma(\varepsilon),\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1\}$$

这里的ε_1是一个小正数，D_L, D_R和Γ将在稍后给出；

(c) 有一个正常数K，使得当$a\leqslant t\leqslant b$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$时，$K\geqslant(2q+1)!\|u''\|$。

则对于每一个ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$，边值问题(1.1)、(1.2)有一个解$x(t,\varepsilon)$，满足

$$\|x(t,\varepsilon)-u(t)\|\leqslant D_L(t,\varepsilon)+D_R(t,\varepsilon)+\Gamma(\varepsilon)$$

其中

$$D_L(t,\varepsilon)=\begin{cases}\|A(\varepsilon)-u(a)\|\exp[-(m\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{2}}(t-a)], & 若q=0\\ \|A(\varepsilon)-u(a)\|[1+\sigma\|A(\varepsilon)-u(a)\|^q\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t-a)]^{-1/q}, & 若q\geqslant 1\end{cases}$$

$$D_R(t,\varepsilon)=\begin{cases}\|B(\varepsilon)-u(b)\|\exp[-(m\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{2}}(b-t)], & 若q=0\\ \|B(\varepsilon)-u(b)\|[1+\sigma\|B(\varepsilon)-u(b)\|^q\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(b-t)]^{-1/q}, & 若q\geqslant 1\end{cases}$$

$$\Gamma(\varepsilon)=\begin{cases}C_0\varepsilon, & 若q=0\\ C_1\varepsilon^{1/(2q+1)}, & 若q\geqslant 1\end{cases}$$

其中$\sigma=m^{\frac{1}{2}}q[(q+1)(2q+1)!]^{-\frac{1}{2}}$和$C_i$ $(i=0,1)$是某一正的常数。

证明　$q=0$的情况已在文[4]中证明了。现在我们来证明$q\geqslant1$的情况。令$y(t,\varepsilon)=x(t,\varepsilon)-u(t)$，对于$(t,y,\varepsilon)\in\Omega_1$，我们定义

$$r(t,y)=\|y\|-\|A(\varepsilon)-u(a)\|[1+\sigma\|A(\varepsilon)-u(a)\|^q\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t-a)]^{-1/q}$$
$$-\|B(\varepsilon)-u(b)\|[1+\sigma\|B(\varepsilon)-u(b)\|^q\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(b-t)]^{-1/q}-\left(\frac{\varepsilon K}{m}\right)^{1/(2q+1)}$$

我们将应用定理1。易见，除了(a)外，所有假设都满足。在公式(2.3)、(2.4)中，我们有　$W_1(y)=y^T/\|y\|$ $(y\neq0)$ 和对于所有的t和y，$W_2(t,y)=0$，而且对于所有的$y\neq0$，$H(y)\geqslant0$。因为函数$\|y\|$是凸的，因而，如果我们证明，当$r(t,y)=0$时，

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+\frac{y^T}{\|y\|}\ \frac{1}{\varepsilon}[F(t,y+u,\varepsilon)-\varepsilon u'']\geqslant0$$

则(2.5)将是满足的。

设$r(t,y)=0$，经过简单计算后可得

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}=-m[\varepsilon(2q+1)!]^{-1}\|A(\varepsilon)-u(a)\|^{2q+1}[1+\sigma\|A(\varepsilon)$$
$$-u(a)\|^q\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t-a)]^{-(2q+1)/q}-m[\varepsilon(2q+1)!]^{-1}\|B(\varepsilon)-u(b)\|^{2q+1}$$
$$\cdot[1+\sigma\|B(\varepsilon)-u(b)\|^q\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(b-t)]^{-(2q+1)/q}$$

借助于 Taylor 定理和假设(a)，(b)，我们有

$$\frac{y^T}{\|y\|}\ \frac{1}{\varepsilon}[F(t,y+u,\varepsilon)-\varepsilon u'']\geqslant\frac{1}{\varepsilon}[f(t,\|y+u\|,\varepsilon)-\varepsilon\|u''\|]$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{2q}\frac{1}{j!}\partial^j_{\|y+u\|}f(t,\|u\|,\varepsilon)\|y\|^j+\frac{1}{\varepsilon(2q+1)!}\partial^{2q+1}_{\|y+u\|}$$
$$\cdot f(t,\theta\|y+u\|,\varepsilon)\|y\|^{2q+1}-\|u''\|$$
$$\geqslant m[\varepsilon(2q+1)!]^{-1}\Big\{\|A(\varepsilon)-u(a)\|^{2q+1}[1+\sigma\|A(\varepsilon)-u(a)\|^q\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t-a)]^{-(2q+1)/q}$$
$$+\|B(\varepsilon)-u(b)\|^{2q+1}[1+\sigma\|B(\varepsilon)-u(b)\|^q\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(b-t)]^{-(2q+1)/q}+\frac{\varepsilon K}{m}\Big\}-\|u''\|$$

因此，借助于假设(c)，得

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+\frac{y^T}{\|y\|}\ \frac{1}{\varepsilon}[F(t,y+u,\varepsilon)-\varepsilon u'']\geqslant\frac{K}{(2q+1)!}-\|u''\|\geqslant0$$

从定理1我们推得边值问题(1.1)、(1.2)有解$x(t,\varepsilon)$，满足

$$r(t,y(t,\varepsilon))=r(t,x(t,\varepsilon)-u(t))\leqslant0,$$

即

$$\|y(t,\varepsilon)\|=\|x(t,\varepsilon)-u(t)\|\leqslant\|A(\varepsilon)-u(a)\|[1+\sigma\|A(\varepsilon)-u(a)\|^q\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t-a)]^{-1/q}$$
$$+\|B(\varepsilon)-u(b)\|[1+\sigma\|B(\varepsilon)-u(b)\|^q\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(b-t)]^{-1/q}+C_1\varepsilon^{1/(2q+1)}$$
$$a\leqslant t\leqslant b$$

其中C_1为正常数。

定理3　假设

(a) 退化系统(1.3)有一个$C^{(2)}[a,b]$类的广义的I_n-稳定的解$u=u(t)$；

(b) 除了$y=0$外，对于所有的$(t,y,\varepsilon)\in\Omega_2$,

$$\frac{y^T}{\|y\|}[F(t,y+u,\varepsilon)-\varepsilon u'']\geqslant f(t,\|y+u\|,\varepsilon)-\varepsilon\|u''\|$$

其中

$$\Omega_2=\{(t,y,\varepsilon):\ a\leqslant t\leqslant b,\|y\|\leqslant W_L(t,\varepsilon)+W_R(t,\varepsilon)+C_2\,\varepsilon^{\frac{1}{n}}\ ,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1\}$$

这里的C_2和ε_1是正的常数，W_L和W_R将在下面给出。

(c) 存在两个正的常数K_1，k_0，使得当$a\leqslant t\leqslant b$，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$时，$f(t,z_0,\varepsilon)\geqslant -k_0\varepsilon$和$K_1\geqslant n!(k_0+\|u''\|)$，则对于每一个$\varepsilon$，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$，问题(1 1)、(1.2)有一解$x(t,\varepsilon)$，满足

$$\|x(t,\varepsilon)-u(t)\|\leqslant W_L(t,\varepsilon)+W_R(t,\varepsilon)+C_2\varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

$$W_L(t,\varepsilon)=\|A(\varepsilon)-u(a)\|[1+\sigma_1\|A(\varepsilon)-u(a)\|^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t-a)]^{-\frac{2}{n-1}}$$

$$W_R(t,\varepsilon)=\|B(\varepsilon)-u(b)\|[1+\sigma_1\|B(\varepsilon)-u(b)\|^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(b-t)]^{-\frac{2}{n-1}}$$

这里的$\sigma_1=(n-1)[m/2(n+1)!]^{\frac{1}{2}}$。

证明 这个定理的证明在许多方面跟定理2的证明相同，只要我们注意到函数$W_L>0$，现在是微分方程$\varepsilon W''=(m/n!)W^n$的解，它满足$W_L(a,\varepsilon)=\|A(\varepsilon)-u(a)\|$和$W_L'(a,\varepsilon)=-(2m/\varepsilon(n+1)!)^{\frac{1}{2}}\|A(\varepsilon)-u(a)\|^{(n+1)/2}$，并且注意到$W_R>0$是满足$W_R(b,\varepsilon)=\|B(\varepsilon)-u(b)\|$和$W_R'(b,\varepsilon)=[2m/\varepsilon(n+1)!]^{\frac{1}{2}}\|B(\varepsilon)-u(b)\|^{(n+1)/2}$的上述微分方程的解。于是，我们只要定义

$$r(t,y)=\|y\|-\|A(\varepsilon)-u(a)\|[1+\sigma_1\|A(\varepsilon)-u(a)\|^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t-a)]^{-\frac{2}{n-1}}$$
$$-\|B(\varepsilon)-u(b)\|[1+\sigma_1\|B(\varepsilon)-u(b)\|^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(b-t)]^{-\frac{2}{n-1}}-C_2\varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

其中$\sigma_1=(n-1)[m/2(n+1)!]^{\frac{1}{2}}$

余下部分几乎是重复定理2的证明。我们指出，在本定理中当$u(t)\equiv 0$时，即得文[5]中定理2.1的结果。

上面所发展的理论只关系到退化问题至少有一个$C^{(2)}[a,b]$类的稳定解，在退化解只有分段可微的一次导数的较弱的假设下也有可能去叙述和证明类似于定理2～3的结果，这是因为在第二节中引用的Kelley[4]的微分不等式定理应用到这种情况时只要做较小的修改。事实上，适当的微分不等式只要求在(a,b)上除了退化解的二阶导数不存在的点外处处成立就可以了。

现在让我们假设连续函数$u(t)$，除了在(a,b)中$u'(t_0^-)\neq u'(t_0^+)$的点t_0外，$u(t)$是$C^{(2)}[a,b]$类的。容易看到，在我们所考虑的问题的类型中，上述的情况是可能遇到的，即，如果$F(t,u,0)=0$的两个$C^{(2)}$类的解u_1和u_2在(a,b)中的点t_0相交，而$u_1'(t_0)\neq u_2'(t_0)$，那么由

$$u_0(t)=\begin{cases}u_1(t), & a\leqslant t\leqslant t_0\\ u_2(t), & t_0\leqslant t\leqslant b\end{cases}$$

确定的轨道$u_0(t)$就具有$u_0'(t_0^-)\neq u_0'(t_0^+)$的性质。如果两个函数$u_1$和$u_2$在$[a,b]$中都是稳定的，那么轨道$u_0$也是稳定的，并且对$u'(t_0^\pm)$加上适当的限制，就有理由期望问题(1.1)、(1.2)存在解$x=x(t,\varepsilon)$使得在(a,b)的每一个闭子区间中有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}x(t,\varepsilon)=u_0(t)$$

如果我们对解加上在点t_0的角层（内部校正层）函数，就会得到这种情况。我们有下列的结果。

定理4 假设

(a) 退化系统(1.3)有一个广义的I_q-稳定或广义的$\mathrm{I\!I}_n$-稳定的解$u=u(t)$，除了在(a,b)中$u(t_0^-)\neq u_0'(t_0^+)$和$\|u''(t_0^\pm)\|<\infty$（相应地，纯量问题$f(t,z_0,0)=0$的解$z_0(t)\geqslant 0$也有$z_0'(t_0^-)\neq z_0'(t_0^+)$和$|z_0''(t_0^\pm)|<\infty$且$z_0''(t)\geqslant 0$）的点$t_0$外，

(b) 除了$y=0$外，对于所有的$(t,y,\varepsilon)\in\Omega_1$(或$\Omega_2$)，

$$\frac{y^T}{\|y\|}[F(t,y+u,\varepsilon)-\varepsilon u'']\geqslant f(t,\|y+u\|,\varepsilon)-\varepsilon\|u''\|$$

(c) 有两个正的常数K_3，k_3使得，当$a\leqslant t\leqslant b$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$时，$K_3\geqslant\|u''\|(2q+1)!$（或$f(t,\|u\|,\varepsilon)\geqslant -k_3\varepsilon$和$K_3\geqslant n!(k_3+\|u''\|)$），

则存在一个$\varepsilon_0>0$，使得当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，$t\in[a,b]$时问题(1.1)、(1.2)分别有解$x_1(t,\varepsilon)$和$x_2(t,\varepsilon)$，满足

$$\|x_1(t,\varepsilon)-u(t)\|\leqslant z_0(t)+D_L(t,\varepsilon)+D_R(t,\varepsilon)+V(t,\varepsilon)+\Gamma(\varepsilon)$$

或

$$\|x_2(t,\varepsilon)-u(t)\|\leqslant z_0(t)+W_L(t,\varepsilon)+W_R(t,\varepsilon)+V(t,\varepsilon)+C\varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

其中C是一个正的常数，D_L，D_R和$\Gamma(\varepsilon)$如同定理2中给定的；W_L，W_R如同定理3中给定的；而$V(t,\varepsilon)$是如下的角层函数：

$$V(t,\varepsilon)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\varepsilon m^{-1})^{\frac{1}{2}}|z_0'(t_0^+)-z_0'(t_0^-)|\exp[-(m\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{2}}|t-t_0|], & 若q=0\\ \sigma_2\{1+q[\varepsilon(2q+2)!/2m]^{-\frac{1}{2}}\sigma_2^{q}|t-t_0|\}^{-1/q}, & 若q\geqslant 1\end{cases}$$

其中 $\sigma_2^{q+1}=\frac{1}{2}|z_0'(t_0^+)-z_0'(t_0^-)|[\varepsilon(2q+2)!/2m]^{\frac{1}{2}}$

证明 为方便起见，可设$u'(t_0^-)<u'(t_0^+)$，(相应地，$z_0'(t_0^-)<z_0'(t_0^+)$)，[若$u'(t_0^-)>u'(t_0^+)$，(相应地，$z_0'(t_0^-)>z_0'(t_0^+)$)，可令$x\to -x$就得到这种情形]。从纯量理论(参看[1])，我们知道，在上述的假设下，纯量问题

$$\varepsilon z''=f(t,z,\varepsilon)$$
$$z(a,\varepsilon)=\|A(\varepsilon)-u(a)\|,\ z(b,\varepsilon)=\|B(\varepsilon)-u(b)\|$$

有一个解$z_i=z_i(t,\varepsilon)$，($i=1$或2)，分别满足

$$|z_1(t,\varepsilon)-z_0(t)|\leqslant D_L(t,\varepsilon)+D_R(t,\varepsilon)+V(t,\varepsilon)+\Gamma(\varepsilon)$$

或

$$0\leqslant z_2(t,\varepsilon)-z_0(t)\leqslant W_L(t,\varepsilon)+W_R(t,\varepsilon)+V(t,\varepsilon)+C\varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

其中$z_0(t)\geqslant 0$是$f(t,z_0,0)=0$的解。D_L，D_R和$\Gamma(\varepsilon)$如同定理2中给定的，W_L，W_R如同定理3中给定的，而$V(t,\varepsilon)$是方程

$$\varepsilon V''=\frac{m}{(2q+1)!}V^{2q+1}或\varepsilon V''=\frac{m}{n!}V^n \tag{3.1}$$

在$(a,t_0)\cup(t_0,b)$中的解，它满足

$$V'(t_0^-,\varepsilon)=-V'(t_0^+,\varepsilon)=\frac{1}{2}|z_0'(t_0^+)-z_0'(t_0^-)|,\ V(t_0^-,\varepsilon)=V(t_0^+,\varepsilon)=\sigma_2$$

和前面相似，我们定义

$$r_1(t,y)=\|y(t,\varepsilon)\|-[z_0(t)+D_L(t,\varepsilon)+D_R(t,\varepsilon)+V(t,\varepsilon)+\Gamma(\varepsilon)]$$

或

$$r_2(t,y)=\|y(t,\varepsilon)\|-[z_0(t)+W_L(t,\varepsilon)+W_R(t,\varepsilon)+V(t,\varepsilon)+C\varepsilon^{\frac{1}{n}}]$$

最后，我们证明，在 $(a,t_0)\cup(t_0,b)$ 中，当 $r_i=r_i'=0$ 时，$r_i''\geqslant0$，$(i=1或2)$。事实上，在公式(2.3)、(2.4)中，我们有$W_1(y)=y^T/\|y\|(y\neq0)$和对所有的t和y，$W_2(t,y)=0$，而且，对于所有的$y\neq0$，$H(y)\geqslant0$。因为函数$\|y\|$是凸的，从而

$$r_i''\geqslant\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2}+\frac{y^T}{\|y\|}\frac{1}{\varepsilon}[F(t,y+u,\varepsilon)-\varepsilon\|u''\|],\qquad i=1或2$$

下面只证 $z_0(t)$ 是 II_n稳定的情况（I_q稳定的情况，证明类似）。设$r_2(t,\varepsilon)=0$，我们有

$$\frac{\partial^2 r_2}{\partial t^2}=z_0''(t)+W_L''+W_R''+V''\geqslant W_L''+W_R''+V''$$

借助于Taylor 定理和假设(a)，(b)，我们有

$$\frac{y^T}{\|y\|}\frac{1}{\varepsilon}[F(t,y+u,\varepsilon)-\varepsilon u'']\geqslant\frac{1}{\varepsilon}[f(t,\|y+u\|,\varepsilon)-\varepsilon\|u''\|]$$

$$\geqslant\frac{1}{\varepsilon}f(t,\|u\|,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j!}\partial^j_{\|y+u\|}f(t,\|u\|,\varepsilon)\|y\|^j$$

$$+\frac{1}{\varepsilon n!}\partial^n_{\|y+u\|}f(t,\theta\|y+u\|,\varepsilon)\|y\|^n-\|u''\|$$

$$\geqslant\frac{1}{\varepsilon}(-k_3\varepsilon)+\frac{m}{\varepsilon n!}[z_0(t)+W_L+W_R+V+C\varepsilon^{\frac{1}{n}}]^n-\|u''\|$$

$$\geqslant\frac{m}{\varepsilon n!}W_L^n+\frac{m}{\varepsilon n!}W_R^n+\frac{m}{\varepsilon n!}V^n+\frac{mC^n\varepsilon}{\varepsilon n!}-(k_3+\|u''\|)$$

因此，根据(a)，(c)，(3.1)和$\varepsilon W_L''=(m/n!)W_L^n$，$\varepsilon W_R''=(m/n!)W_R^n$，我们有

$$\frac{\partial^2 r_2}{\partial t^2}+\frac{y^T}{\|y\|}\frac{1}{\varepsilon}[F(t,y+u,\varepsilon)-\varepsilon u'']\geqslant\frac{mC^n}{n!}-(k_3+\|u''\|)$$

$$=\frac{K_3}{n!}-(k_3+\|u''\|)\geqslant0$$

因而，问题(1.1)、(1.2)有一个解$x_i(t,\varepsilon)$，$(i=1或2)$，满足

$$r_i(t,y_i(t,\varepsilon))=r_i(t,x_i(t,\varepsilon)-u(t))\leqslant0,\qquad i=1或2$$

即

$$\|x_1(t,\varepsilon)-u(t)\|\leqslant z_0(t)+D_L(t,\varepsilon)+D_R(t,\varepsilon)+V(t,\varepsilon)+\Gamma(\varepsilon)$$

或

$$\|x_2(t,\varepsilon)-u(t)\|\leqslant z_0(t)+W_L(t,\varepsilon)+W_R(t,\varepsilon)+V(t,\varepsilon)+C\varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

上述结果不难推广到有三个分支的退化轨道：

$$\tilde{u}_0(t)=\begin{cases}u_L(t), & a\leqslant t\leqslant t_1\\ u(t), & t_1\leqslant t\leqslant t_2\\ u_R(t), & t_2\leqslant t\leqslant b\end{cases}$$

其中解u_L，u_R和退化系统$F(t,u,0)=0$的中间解u相交，使得$u_L(t_1)=u(t_1)$，$u'_L(t_1)\neq u'(t_1)$，$u_R(t_2)=u(t_2)$和$u'_R(t_2)\neq u'(t_2)$；若$t_1=t_2$，这就变成了以上的退化轨道$u_0(t)$。

参 考 文 献

[1] Chang, K. W. and F. A. Howes, *Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo (1984).

[2] O'Malley, R. E., *Introduction to Singular Perturbation*, Academic Press, New York, London (1974).

[3] 章国华、林宗池，非线性边值的奇摄动，应用数学和力学，5, 5 (1984), 603—612.

[4] Kelley, W. G., A nonlinear singular perturbation problem for second order systems, *SIAM, J. Math. Anal.*, 10, 1 (1979), 32—37.

[5] Howes, F.A., Singularly perturbed semilinear systems, *Studies in Applied Math.*, 61 (1979), 185—209.

[6] O'Donnell, M. A., Boundary and corner layer behavior in singularly perturbed semilinear systems of boundary value problem, *SIAM, J. Math. Anal.*, 2 (1984).

[7] 章国华、刘光旭，奇摄动半线性系统的边界层和角层性质，应用数学和力学，5, 3 (1984), 337—344.

[8] Chang, K. W. and Lin Zong-chi, Singular perturbation for a class of semilinear second order systems with perturbation both in boundary and in operator, *Acta Mathematica Scientia*, 5, 2 (1985), 223—251.

[9] Kelley, W. G., A geometric method of studying two point boundary value problems for second order systems, *Rocky Mountain J. Math.*, 7 (1977), 251—263.

Singularly Perturbed Phenomena of Semilinear Second Order Systems

Lin Zong-chi

(Fujian Normal University, Fuzhou)

Lin Su-rong

(Fujian TV University, Fuzhou)

Abstract

In this paper we consider singular perturbed phenomena of semilinear second order systems. Under appropriate assumptions, the existence and asymptotic behavior as $\varepsilon\to 0^+$ of solution of vector boundary value problem are proved by constructing special invariant regions in which solutions display so-called boundary layer phenomena and angular layer phenomena.