

# 矩形板的侧屈\*

成祥生

(同济大学, 1987年4月27日收到)

## 摘 要

本文研究矩形板的侧向屈曲问题.文中分别讨论了有集中力, 均布荷载及集中力偶作用之下矩形板发生侧向屈曲时的最小临界荷载.文中使用了能量法.

## 一、前 言

梁的侧屈问题在文献[1~4]中都有介绍,但对板的侧屈问题研究极少.实际上,描述板的侧屈的微分方程很困难,因此使用能量法是适宜的.本文用能量法讨论了矩形板的侧屈问题,文中分别讨论了有集中力,均布荷载和集中力偶作用的情形.

## 二、能 量 原 理

为确定矩形薄板发生侧屈时最小的临界荷载,我们使用了最小势能原理去求出当屈曲系统的总势能为驻值时的最小荷载.由于在薄板中面内的刚度较大,因此薄板在中面内的弯曲可被忽略,当外荷载接近于临界值时,薄板将产生扭转并伴随着侧向弯曲,偏离了原始的平的中面位置,于是薄板发生侧屈.对于一各向同性等厚矩形板当产生扭转和弯曲时,整个系统的形变势能是<sup>[2]</sup>

$$U = \frac{D}{2} \iint [w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2\mu w_{xx}w_{yy} + 2(1-\mu)w_{xy}^2] dx dy \quad (2.1)$$

其中  $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$  是板的弯曲刚度;  $E, h, \mu$  分别为板材料的弹性模量、厚度和泊松比.  $w$  为挠曲函数;  $w_{xx}, w_{yy}$  等为挠曲函数对相应下标的偏导数; 以上二重积分遍及板的中面区域.

若坐标轴取成如图1所示.设薄板在顶边 ( $y=b$ ) 受分布的中面荷载作用而屈曲,则外力的势能可表示为

$$V = - \int q(x) \Delta_y(x) dx \quad (2.2)$$

其中  $q(x)$  为位于板中面内并沿  $y$  方向作用的分布荷载,  $\Delta_y(x)$  为板发生侧向弯曲时,荷载  $q$  的

\* 潘立宙推荐.

作用点在铅直方向（沿 $y$ 轴）的位移，它们都是坐标 $x$ 的函数。上面的积分是沿着荷载作用的边界上进行的。

于是系统的总势能为

$$\Pi = U + V \quad (2.3)$$

根据 Rayleigh-Ritz 法<sup>[2,5]</sup>，系统达到稳定平衡的极限时，其总势能为最小，即

$$\delta\Pi = 0 \quad (2.4)$$

从而可确定最小的临界荷载。

在公式 (2.1) 中的挠曲函数  $w(x, y)$  应事先选择，使它满足薄板全部几何边界条件。

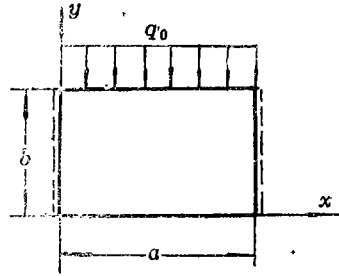


图 1

### 三、矩形板侧屈的几种情形

**情形A** 设有一矩形板，两对边简支，另外两对边自由，在顶边（自由边 $y=b$ ）上有一均布荷载 $q_0$ 作用，如图 1 所示。今选取如下的挠曲函数

$$w = [f_1 + (f_2 - f_1) \frac{y}{b}] \sin \frac{\pi x}{a} \quad (3.1)$$

其中 $a$ 和 $b$ 分别为薄板沿 $x$ 轴和 $y$ 轴边的长度，而 $f_1$ 和 $f_2$ 分别为矩形板下面和上面自由边中点的横向挠度，它们都是未知的参数。不难看出，函数 (3.1) 能满足该薄板的全部几何边界条件。

先计算薄板的形变势能，为此将函数 (3.1) 代入 (2.1) 进行积分，可得

$$U = \frac{1}{2} [A(f_1^2 + f_2^2 + f_1 f_2) + \frac{B}{2}(f_1^2 + f_2^2 - 2f_1 f_2)] \quad (3.2)$$

其中

$$A = \pi^4 b D / 6a^3, \quad B = 2(1 - \mu)\pi^2 D / ab \quad (3.3)$$

再计算外力的势能 $V$ ，因在 (2.2) 中的 $\Delta_y(x)$ 由几何分析可知

$$\Delta_y = -\frac{1}{2} (w \cdot w_y) \quad (3.4)$$

将 (3.1) 和 (3.4) 代入 (2.2) 积分后可得

$$V = -\frac{1}{4} q_0 \frac{a}{b} (f_2^2 - f_1 f_2) \quad (3.5)$$

将 (3.2) 和 (3.5) 代入 (2.3)，并由 (2.4) 对两个参数 $f_1$ 和 $f_2$ 进行变分，可得下面关于参数 $f_1$ 和 $f_2$ 的齐次线性代数方程组

$$\left. \begin{aligned} (2A+B)f_1 + (A-B+C)f_2 &= 0 \\ (A-B+C)f_1 + (2A+B-2C)f_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

其中

$$C = \frac{1}{2} q_0 \frac{a}{b} \quad (3.7)$$

求方程组 (3.6) 的非零解，则必须上式的系数行列式为零，于是得到板的稳定性方程

$$C^2 + 6AC - 3A(A+2B) = 0 \quad (3.8)$$

由此可求出它的最小的正实根

$$C = -3A + [6A(2A+B)]^{1/2} \quad (3.9)$$

注意到 (3.3) 和 (3.7), 可得到矩形板在均布荷载  $q_0$  作用之下发生侧向屈曲时的最小的临界荷载

$$(q_0)_{cr} = \frac{2\pi^2 D}{a^2} \left[ -\frac{\pi^2}{2} \frac{b^2}{a^2} + \pi \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\pi^2}{3} \frac{b^2}{a^2} + 2(1-\mu)} \right] \quad (3.10)$$

对于方板的情形, 于是  $b/a=1$ , 若取  $\mu=0.3$ , 可得

$$(q_0)_{cr} = 36.88483D/a^2 \quad (3.11)$$

由 (3.10) 可看出, 临界荷载和板的边长比及弯曲刚度有关。

**情形B** 设有一矩形板, 两对边简支, 两对边自由, 在顶边 (自由边  $y=b$ ) 的中点  $E(a/2, b)$  有一铅直的集中力  $P$  作用, 如图 2 所示。

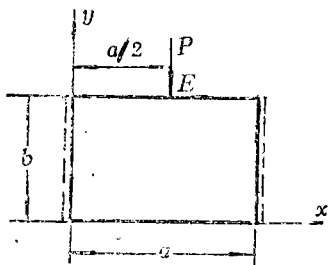


图 2

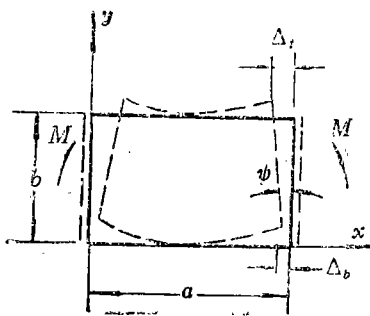


图 3

在这问题中, 挠曲函数仍应用 (3.1) 式, 故形变势能也和 (3.2) 相同。由 (2.2) 式所计算的外力的势能就变为

$$V = -\frac{1}{2} P(w \cdot w_y)_E \quad (3.12)$$

这是因为在集中力  $P$  的作用点  $E(a/2, b)$  处, 在铅直方向的位移是  $\Delta_E = (w \cdot w_y)_E / 2$ , 其中下标  $E$  表示该括号中的量应取点  $E(a/2, b)$  处的值。

类似于情形  $A$  的计算, 可得到关于参数  $f_1$  和  $f_2$  的齐次线性代数方程组, 求方程组的非零解, 得到板的稳定性方程并求出它的最小的正实根, 从而得到该矩形板在集中荷载  $P$  作用之下发生侧向屈曲时的最小的临界荷载

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 D}{a} \left[ -\frac{\pi^2}{2} \frac{b^2}{a^2} + \pi \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\pi^2}{3} \frac{b^2}{a^2} + 2(1-\mu)} \right] \quad (3.13)$$

对于方板,  $b/a=1$ , 若取  $\mu=0.3$ , 可得

$$P_{cr} = 18.44293D/a \quad (3.14)$$

**情形C** 设在以上情形的矩形板的简支端各作用一力偶  $M$ , 如图 3 所示。

在这情形下, 挠曲函数和形变势能仍然分别和 (3.1) 式和 (3.2) 式相同。外力的势能应用下式来计算

$$V = -2M\psi \quad (3.15)$$

角  $\psi$  如图中所示, 并且

$$\psi = (\Delta_i - \Delta_b)/b \quad (3.16)$$

其中 $\Delta_i$ 和 $\Delta_b$ 的意义也如图3中所示, 其值按如下的公式计算

$$2\Delta_i = \frac{1}{2} \int_0^a (w^2)_{y=b} dx, \quad 2\Delta_b = \frac{1}{2} \int_0^a (w^2)_{y=0} dx \quad (3.17)$$

将挠曲函数(3.1)代入(3.17)进行积分, 并由(3.16)和(3.15)可得

$$V = - \frac{\pi^2}{4ab} M(f_2^2 - f_1^2) \quad (3.18)$$

类似于以前的计算, 可得到板的稳定性方程如下

$$C_1^2 - 3A(A+2B) = 0 \quad (3.19)$$

其中 $A$ 和 $B$ 由(3.3)表示, 而

$$C_1 = \pi^2 M/ab \quad (3.20)$$

求出方程(3.19)的最小的正实根 $C_{1min} = \sqrt{3A(A+2B)}$ , 注意到(3.3)和(3.20), 可得到矩形板在一对集中力偶 $M$ 作用之下发生侧向屈曲时的最小的临界荷载

$$M_{cr} = \pi \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \frac{\pi^2}{6} \frac{b^2}{a^2} + 4(1-\mu) \right]} D \quad (3.21)$$

对于方板,  $b/a=1$ , 取 $\mu=0.3$ , 可得

$$M_{cr} = 4.68346D \quad (3.22)$$

**情形D** 设一矩形板, 两对边夹住, 两对边自由, 在顶边(自由边 $y=b$ )上有一均布荷载 $q_0$ 作用, 如图4所示。

在这种情形下, 选取如下的挠曲函数

$$w = (f_1 + \frac{f_2 - f_1}{b} y) (\cos \frac{2\pi x}{a} - 1) \quad (3.23)$$

其中各符号与情形A中的相同, 经过类似于以上情形的计算, 可得到该矩形板发生侧屈时的最小的临界荷载

$$(q_0)_{cr} = \frac{16}{3} \frac{\pi^2}{a^2} D \left[ -\pi^2 \frac{b^2}{a^2} + \pi \frac{a}{b} \sqrt{\frac{4}{3} T^2 \frac{b^2}{a^2} + 2(1-\mu)} \right] \quad (3.24)$$

对于方板,  $b/a=1$ , 取 $\mu=0.3$ , 可得到

$$(q_0)_{cr} = 111.47457D/a^2 \quad (3.25)$$

**情形E** 对于两边夹住, 两对边自由的矩形板, 在顶边(自由边 $y=b$ )的中点 $E(a/2, b)$ 有一铅直的集中力作用, 如图5所示。进行类似于以上情形的计算, 可得到该矩形板在集中力

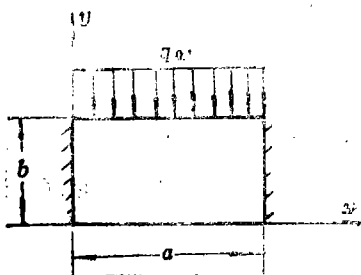


图 4

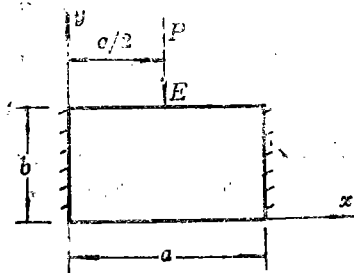


图 5

作用下发生侧屈时的最小的临界荷载

$$P_{cr} = 2 \frac{\pi^2}{a} D \left[ -\pi^2 \frac{b^2}{a^2} + 2\pi \frac{b}{a} \sqrt{\frac{1}{3} \pi^2 \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{2} (1-\mu)} \right] \quad (3.26)$$

对于方板,  $b/a=1$ , 取  $\mu=0.3$ , 可得

$$P_{cr} = 41.80256 D/a \quad (3.27)$$

情形F 对于两对边夹住, 两对边自由的矩形板, 在夹住端各作用一力偶  $M$ , 如图6所示. 进行类似的计算, 可得到该矩形板发生侧屈时的最小的临界荷载

$$M_{cr} = 2\pi \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\pi^2}{3} \frac{b^2}{a^2} + 2(1-\mu)} D \quad (3.28)$$

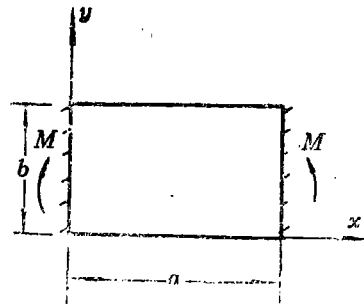


图 6

对于方板, 取  $\mu=0.3$ , 则得

$$M_{cr} = 13.60691 D \quad (3.29)$$

#### 四、结 束 语

1. 本文用能量法给出了矩形板在几种受力情形下发生侧向屈曲时的最小的临界荷载。
2. 所有的板的侧屈临界荷载都和薄板的弯曲刚度及边长比有关。
3. 由于所选用的挠曲函数不是唯一的, 故由不同的挠曲函数所得到的解答一般也不相同, 近似解的好坏, 主要取决于所选择的挠曲函数。

#### 参 考 文 献

[1] Chajes, L., *Principles of structural Stability Theory*, Prentice-Hall, Inc. (1974).  
 [2] Timoshenko, S., *Theory of Elastic Stability*, (1926).  
 [3] Clark, J. W. and H. N. Hill, Lateral buckling of beams, *Transactions ASCE*, 127 (1962).  
 [4] Galambos, T. V., Inelastic lateral buckling of beams, *Jour. of Struct. Division*, ASCE, 89, ST5 (1963).  
 [5] 钱伟长, 《变分法及有限元》(上册), 科学出版社 (1980).

## Lateral Instability of Rectangular Plates

Chéng Xiang-sheng

(Tongji University, Shanghai)

### Abstract

This paper investigates the problems of lateral buckling of rectangular plates. In the text we discuss the minimum critical load of the lateral buckling occurring on rectangular plates under a concentrated force, uniformly distributed load and the concentrated couples, respectively. The energy method is used in this article.