

湍流速度和耗散率联合几率密度函数的 输运方程

陈义良 斯蒂夫·波柏

(中国科学技术大学) (美国康奈尔大学)

(蔡树棠推荐, 1987年10月30日收到)

摘 要

根据湍流动能耗散率满足对数正态分布的假定, 给出耗散率的随机模型, 并对速度的Langevin模型^[6]进行了修正, 从而建立起完全封闭的湍流速度和耗散率联合几率密度函数的输运方程. 为检验模型的可靠性, 用 Monte Carlo 方法对输运方程进行了数值求解, 给出衰变湍流和均匀剪切湍流的满意结果.

一、引 言

用求解几率密度函数(以下简称Pdf)输运方程的方法, 计算湍流和湍流燃烧问题时, 湍流输运过程(包括雷诺应力和标量的湍流扩散通量)和化学反应过程可以精确计算, 毋须模拟. 但是粘性引起的耗散, 和脉动压力梯度引起的湍流各向同性化过程仍须模拟. 由于避免了对一些重要过程的模拟, 又可以提供比统计矩模型方法更多的信息, Pdf方法受到了越来越多的重视^[1~4].

用Lagrangian的观点可以很清楚地解释Pdf方程的模拟和它的求解方法. 流场中, 流体颗粒遵从Lagrangian的运动方程

$$dx_i^* = u_i^* dt \quad (1.1)$$

$$du_i^* = \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i \right) dt \quad (1.2)$$

其中带星号的变量 x_i^* 和 u_i^* 是流体颗粒的空间坐标和速度分量; 不带星号的变量 x_i , u_i 和 p 是Euler的空间坐标、速度分量和压力; ρ 和 ν 是流体的密度和运动粘性系数, 为方便起见, 可以假定为常数.

将方程(1.2)右端中的压力和速度分解为它们的平均值和脉动值两部分, 则(1.2)式为

$$du_i^* = \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} - \nu \nabla^2 \langle u_i \rangle \right) dt + \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i' \right) dt \quad (1.3)$$

这里用尖角括号表示平均值, 撇表示脉动值. (1.3)式中平均量可以用统计方法得到, 但是对包含脉动量的项必须进行模拟. 由Pope^[5]建议, 并由Haworth和Pope^[6]发展的Langevin模型, 实际上是假定方程(1.3)右端的第二项对流体颗粒的影响是随机的. 可以用一个类似于

描述固体颗粒在液体中作布朗运动时的扩散过程来模拟。在平均压力梯度和这个随机因素的作用下，流体颗粒速度的变化为

$$du_i^* = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} dt + G_{ij}(u_i^* - \langle u_j \rangle) dt + (c_0 \langle \varepsilon \rangle)^{1/2} dw_i \quad (1.4)$$

由于平均速度引起的粘性力很小，这项已被略去。(1.4)式右端的第二项为平移项，与流体颗粒的脉动速度成比例，比例系数 G_{ij} 是一个二阶张量，它是局部平均量的函数

$$G_{ij} = (\alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 b_{ij}) / \tau + H_{ijkl} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_l} \quad (1.5)$$

其中 δ_{ij} 为单位张量，各向异性张量

$$b_{ij} = \frac{1}{2} \langle u_i' u_j' \rangle / k - \frac{1}{3} \delta_{ij}$$

α_1 , α_2 和四阶张量 H_{ijkl} 的计算详见文献[6]。湍流时间尺度 τ 定义为

$$\tau = k / \langle \varepsilon \rangle \quad (1.6)$$

(1.4)式右端的第三项是一个各向同性的Weiner过程，其增量 dw_i 为

$$dw_i = (dt)^{1/2} \xi_i \quad (1.7)$$

ξ_i 为满足标准联合正态分布的随机向量，因而

$$\langle dw_i \rangle = 0$$

$$\langle dw_i dw_j \rangle = dt \cdot \delta_{ij}$$

在计算中， ξ_i 由随机数产生器给出。

用文献[4]介绍的方法，从方程(1.1)和(1.4)可以推出速度分量的联合Pdf $f(V, \mathbf{x}, t)$ 的方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + V_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial V_i} - G_{ij} \frac{\partial}{\partial V_i} [f(V_j \\ - \langle u_j \rangle)] + \frac{1}{2} c_0(\varepsilon) \frac{\partial^2 f}{\partial V_i^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

对于几率密度函数而言，速度向量 V 、位置向量 \mathbf{x} 和时间 t 都是自变量，但仅速度向量具有密度的性质，即满足归一化的条件

$$\int f(V; \mathbf{x}, t) dV = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(V; \mathbf{x}, t) dV_1 dV_2 dV_3 = 1$$

故在它和其它变量之间用分号隔开，以示区别。

在方程(1.4)中，假定了二阶张量 G_{ij} 是局部平均量的函数，Weiner过程的系数也仅决定于局部平均的耗散率。这意味着，对于流场结构仅依赖于平均量的湍流，模型方程(1.4)是适用的。但是，当流场变化很大时，上述模型就不一定适用。比如，在壁面边界层中，或混合层的初始阶段，平均参数的梯度很大。外部进入某个区域的流体颗粒往往来不及与周围流体达到平衡状态。这时需要考虑流体颗粒本身的参数对其运动过程的影响。另一方面，在速度随机模型的系数中，用到了平均耗散率。这个量无法在Pdf方法中得出，需要用其它方法或假定给出，因此方程是不封闭的。Pope和Haworth^[7]用流体颗粒的耗散率代替方程(1.4)的局部平均耗散率，并提出一个耗散率的松弛模型来计算流体颗粒的耗散率。但它仅适用于没有平均速度梯度的流动。

由于测量上的困难，有关耗散率几率分布的实验数据很少。Monin和Lyaglom^[8]根据在大

雷诺数的流动中, 能量串级规律的观察, 提出耗散率满足对数正态分布的假定. 本文的目的, 是从这个假定出发, 给出湍流动能耗散率的随机模型, 进而建立起通用的速度和耗散率的联合Pdf方程. 下节讨论湍流动能耗散率的随机模型, 第三节讨论对速度随机模型的修正, 第四节给出速度和耗散率的联合Pdf方程在均匀湍流中的计算结果, 第五节是简单结论.

二、湍流动能耗散率的随机模型

Kolmogorov^[8]指出, 由一系列独立的破碎过程产生的颗粒群, 其颗粒大小的几率分布可以用对数正态分布来近似. 实际上, 湍流能量在不同大小涡旋之间的能量串级过程与此很类似. 在此基础上, Monin 和 Yaglom^[9]证明了湍流能量的耗散率也可以用对数正态分布来近似. 下面我们就利用这个结果, 建立耗散率的随机模型.

用 ε 和 $\langle \varepsilon \rangle$ 表示耗散率的随机量和平均值. 首先给出新随机变量 $\chi = \varepsilon / \langle \varepsilon \rangle$ 的 Pdf 的一个重要性质. 很显然, 它应该满足正态分布

$$P(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\chi - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2.1)$$

其中 $\mu = \langle \chi \rangle$ 为均值, 方差的平方 $\sigma^2 = \langle (\chi - \mu)^2 \rangle$. 无量纲耗散率的 m 阶统计矩为

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{\varepsilon}{\langle \varepsilon \rangle} \right)^m \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[m\chi] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\chi - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] d\chi \\ &= \exp\left(m\mu + \frac{1}{2}m^2\sigma^2\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

令 $m=1$, 可得

$$\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2 \quad (2.3)$$

也就是说, 随机变量 χ 的平均值和方差之间存在简单的关系.

假定随机变量 χ 随时间的变化可以用正态扩散过程

$$d\chi^* = -\frac{a}{\tau}(\chi^* - \mu)dt + bdw \quad (2.4)$$

来模拟. 其中 a 和 b 为常数, τ 为湍流时间尺度 (见(1.6)). 从方程(2.4)可以直接写出其均值和均方值的微分方程

$$\frac{d}{dt} \langle \chi \rangle = -\frac{a}{\tau} (\langle \chi \rangle - \mu) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \chi^2 \rangle &= \langle (\chi + d\chi)^2 \rangle - \langle \chi^2 \rangle = \frac{2\langle \chi d\chi \rangle + \langle d\chi^2 \rangle}{dt} \\ &= -\frac{2a}{\tau} (\langle \chi^2 \rangle - \mu \langle \chi \rangle) + b^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

稳定状态时有

$$\langle \chi \rangle = \mu = -\frac{1}{2}\sigma^2 \quad (2.7)$$

$$b^2 = \frac{2a}{\tau} (\langle \chi^2 \rangle - \mu \langle \chi \rangle) \quad (2.8)$$

根据几率的计算性质, 要求 $\langle \chi^2 \rangle = \mu^2 + \sigma^2$, 于是(2.8)式可以进一步写为

$$b^2 = 2a\sigma^2/\tau \quad (2.9)$$

将式(2.7)和(2.9)代入方程(2.4)得

$$d\chi^* = -\frac{a}{\tau} \left(\chi^* + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \left(\frac{2a\sigma^2}{\tau} \right)^{1/2} dw \quad (2.10)$$

根据关系式

$$\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle \exp[\chi] = q(\chi, t) \quad (2.11)$$

可以进一步推出耗散率的随机模型

$$\begin{aligned} d\varepsilon^* &= \frac{\partial q}{\partial t} dt + \frac{\partial q}{\partial \chi} d\chi + \frac{\partial^2 q}{\partial^2 \chi} d\chi^2 + \dots \\ &\approx \varepsilon^* \left\{ \frac{a}{\tau} \left(\frac{\sigma^2}{2} - \ln \frac{\varepsilon^*}{\langle \varepsilon \rangle} \right) + \frac{d \ln \langle \varepsilon \rangle}{dt} \right\} dt + \left(\frac{2a\sigma^2 \varepsilon^2}{\tau} \right)^{1/2} dw \end{aligned} \quad (2.12)$$

根据常用的耗散率的输运方程, 在均匀湍流中有

$$\frac{d \ln \langle \varepsilon \rangle}{dt} = \frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} \frac{d \langle \varepsilon \rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau} (c_{e2} - c_{e1} \frac{P}{\langle \varepsilon \rangle}) = -\frac{s}{\tau} \quad (2.13)$$

其中 P 为湍流动能产生率, c_{e1} 和 c_{e2} 为两个模型常数. 代入方程(2.12), 最后得

$$d\varepsilon^* = \varepsilon^* \left\{ \frac{a}{\tau} \left(\frac{\sigma^2}{2} - \ln \frac{\varepsilon^*}{\langle \varepsilon \rangle} \right) - \frac{s}{\tau} \right\} dt + \left(\frac{2a\sigma^2 \varepsilon^2}{\tau} \right)^{1/2} dw \quad (2.14)$$

三、对速度随机模型的修正

我们假定速度的随机模型仍为方程(1.4)的形式, 但作两点修正. 一是随机项中, 用流体颗粒的随机耗散率代替原来的局部平均耗散率; 二是平移项中的二阶张量系数 G_{ij} 有待重新确定. 从方程(1.1), (2.14)及作如上修正后的方程(1.4)可以直接写出速度和耗散率联合 Pdf 的方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + V_j \frac{\partial f}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial V_j} - G_{ij} \frac{\partial}{\partial V_i} [f(V_j - \langle u_j \rangle)] + \frac{1}{2} c_0 \varepsilon \frac{\partial^2 f}{\partial V_i^2} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ f \frac{\varepsilon}{\tau} \left[a \left(\frac{\sigma^2}{2} - \ln \frac{\varepsilon}{\langle \varepsilon \rangle} \right) - s \right] \right\} + \frac{a\sigma^2}{\tau} \frac{\partial^2 (f\varepsilon^2)}{\partial \varepsilon^2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

根据Kolmogorov^[8]第一相似假定, 在完全发展的均匀湍流中, 速度的Pdf达到自相似状态, 仅与局部平均耗散率有关, 与边界条件及耗散率的几率分布无关. 下面就用这个性质对平移项的二阶张量系数进行一些修正.

在均匀湍流中, 脉动速度和耗散率的联合Pdf $g(\mathbf{v}, \varepsilon; t)$ 的方程为^[4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= \left\{ \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - G_{ij} \right\} \frac{\partial (g v_j)}{\partial v_i} + \frac{1}{2} c_0 \varepsilon \frac{\partial^2 g}{\partial v_i^2} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ g \frac{\varepsilon}{\tau} \left[a \left(\frac{\sigma^2}{2} - \ln \frac{\varepsilon}{\langle \varepsilon \rangle} \right) - s \right] \right\} + \frac{a\sigma^2}{\tau} \frac{\partial^2 (g\varepsilon^2)}{\partial \varepsilon^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

这里 $\mathbf{v} = \mathbf{V} - \langle \mathbf{u} \rangle$. 令 $p(\varepsilon)$ 为耗散率的Pdf, 而 $q(\mathbf{v} | \varepsilon^*)$ 为脉动速度在 $\varepsilon = \varepsilon^*$ 时的条件 Pdf, 则

$$g(\mathbf{v}, \varepsilon; t) = p(\varepsilon; t) q(\mathbf{v} | \varepsilon^*; t) \quad (3.3)$$

从方程(3.2)可得速度的条件Pdf的方程

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -K_{ij} \frac{\partial(qv_j)}{\partial v_j} + \frac{1}{2} c_0 \varepsilon \frac{\partial^2 q}{\partial v_i^2} + O_1 \quad (3.4)$$

其中

$$K_{ij} = -\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + G_{ij} \quad (3.5)$$

O_1 为与耗散率有关的项,若 $q(\mathbf{v}|\varepsilon^*)$ 与 ε 无关,则 $O_1=0$.

方程(3.4)的各项乘以 $v'_\alpha v'_\beta$,并进行积分,可得条件协方差的变化方程

$$\frac{d}{dt} \langle u'_\alpha u'_\beta | \varepsilon^* \rangle = K_{\alpha j} \langle u'_\beta u'_j | \varepsilon^* \rangle + K_{\beta j} \langle u'_\alpha u'_j | \varepsilon^* \rangle + c_0 \varepsilon^* \delta_{\alpha\beta} + O_2 \quad (3.6)$$

O_2 为与耗散率有关的项,若 $q(\mathbf{v}|\varepsilon^*)$ 与 ε 无关,则 $O_2=0$.

从方程(3.4)和(3.6)可以看出,若初始的速度分布为联合正态分布,要保持这个性质的充分条件是方程(3.6)的右边与 ε 无关.令

$$\bar{K}_{ij} = -\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \bar{G}_{ij} \quad (3.7)$$

\bar{G}_{ij} 为由(1.5)式定义的二阶张量系数.若定义张量

$$K_{ij} = \bar{K}_{ij} + \frac{1}{2} c_0 (\langle \varepsilon \rangle - \varepsilon) C_{ij}^{-1} \quad (3.8)$$

这里 C_{ij}^{-1} 为雷诺应力矩阵 $C_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$ 的逆矩阵.代入方程(3.6)得

$$\frac{d}{dt} \langle u'_i u'_j | \varepsilon^* \rangle = \bar{K}_{ii} C_{ji} + \bar{K}_{ji} C_{ii} + c_0 \langle \varepsilon \rangle \delta_{ij} \quad (3.9)$$

则方程满足自相似条件.从方程(3.5), (3.7)和(3.8)可得二阶张量系数

$$G_{ij} = \bar{G}_{ij} + \frac{1}{2} c_0 (\langle \varepsilon \rangle - \varepsilon) C_{ij}^{-1} \quad (3.10)$$

对于非均匀的湍流,速度和耗散率不再彼此独立, G_{ij} 还要作进一步讨论.从方程(3.1)可以推出雷诺应力的方程.由于Langevin方程(1.4)是模拟粘性耗散和脉动压力对湍流的影响,因此在湍流动能的方程中,由此产生的项应缩并为

$$2 \langle G_{ij} u'_i u'_j \rangle + 3 c_0 \langle \varepsilon \rangle = -2 \langle \varepsilon \rangle \quad (3.11)$$

或

$$\langle G_{ij} u'_i u'_j \rangle = -\left(1 + \frac{3}{2} c_0\right) \langle \varepsilon \rangle \quad (3.12)$$

令

$$G_{ij} = \bar{G}_{ij} + \bar{G}_{ij} \quad (3.13)$$

因为 \bar{G}_{ij} 满足方程(3.12),所以我们要求

$$\langle \bar{G}_{ij} u'_i u'_j \rangle = 0 \quad (3.14)$$

对于均匀湍流,从方程(3.10),我们有

$$\bar{G}_{ij} = \frac{1}{2} c_0 (\langle \varepsilon \rangle - \varepsilon) C_{ij}^{-1} \quad (3.15)$$

因为速度与耗散率无关, $\langle \varepsilon u'_i u'_j \rangle = \langle \varepsilon \rangle C_{ij}$,方程(3.14)是满足的.对于一般剪切湍流,选择 \bar{G}_{ij} 使之满足方程(3.14)不是唯一的,一个方便的选择是令

$$\bar{G}_{ij} = \frac{1}{2} c_0 (\langle \varepsilon \rangle - \varepsilon) C_{ij}^{-1} + \frac{1}{2} c_0 C_{ij}^{-2} \langle \varepsilon' u_i' u_j' \rangle \quad (3.16)$$

该式右端的第一项与方程(3.15)一致, 第二项是在非均匀湍流中, ε 与 ε' 彼此耦合时, 为保证方程(3.14)成立所必须的。最后得

$$G_{ij} = \bar{G}_{ij} + \frac{1}{2} c_0 (\langle \varepsilon \rangle - \varepsilon) C_{ij}^{-1} + \frac{1}{2} c_0 C_{ij}^{-2} \langle \varepsilon' u_i' u_j' \rangle \quad (3.17)$$

由于粘性耗散和脉动压力项对平均速度无影响, 为此还要在速度的随机模型中加上一项

$$\frac{1}{2} c_0 \langle \varepsilon' u_i' \rangle C_{ij}^{-1} \quad (3.18)$$

于是通用的速度随机模型为

$$du_i^* = \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{2} c_0 \langle \varepsilon' u_i' \rangle C_{ij}^{-1} \right. \\ \left. + G_{ij} (u_j^* - \langle u_j \rangle) \right] dt + (c_0 \varepsilon^*)^{1/2} dw_i \quad (3.19)$$

G_{ij} 由方程(3.17)决定。

四、在均匀湍流中的应用

由方程(1.1)、(3.19)和(2.14)可得速度和耗散率的联合Pdf的输运方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + V_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{2} c_0 \langle \varepsilon' u_i' \rangle C_{ij}^{-1} \right) \frac{\partial f}{\partial V_i} \\ - G_{ij} \frac{\partial}{\partial V_j} [f(V_i - \langle u_j \rangle)] + \frac{1}{2} c_0 \varepsilon \frac{\partial^2 f}{\partial V_i^2} \\ - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ f \frac{\varepsilon}{\tau} \left[a \left(\frac{\sigma^2}{2} \varepsilon - \ln \frac{\varepsilon}{\langle \varepsilon \rangle} \right) - s \right] \right\} + \frac{a \sigma^2}{\tau} \frac{\partial^2 (f \varepsilon^2)}{\partial \varepsilon^2} \quad (4.1)$$

下面我们应用方程(4.1), 对衰变湍流(无切应力)和均匀的剪切湍流进行数值求解。对于均匀湍流, 方程简化为^[4]

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2} c_0 \langle \varepsilon' u_i' \rangle C_{ij}^{-1} \frac{\partial g}{\partial v_i} + \left\{ \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - G_{ij} \right\} \frac{\partial}{\partial v_i} (g v_j) \\ + \frac{1}{2} c_0 \varepsilon \frac{\partial^2 g}{\partial v_i^2} - \frac{\varepsilon}{\partial \varepsilon} \left\{ g \frac{\varepsilon}{\tau} \left[a \left(\frac{\sigma^2}{2} \varepsilon \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \ln \frac{\varepsilon}{\langle \varepsilon \rangle} \right) - s \right] \right\} + \frac{a \sigma^2}{\tau} \frac{\partial^2 (g \varepsilon^2)}{\partial \varepsilon^2} \quad (4.2)$$

在该方程中, 除时间变量外, 还有四个自变量 v_1, v_2, v_3 和 ε 。用Monte Carlo方法求解^[4]。

1. 衰变湍流

在进口装有格栅的风洞中, 格栅后的流场, 平均速度梯度为零, 湍流动能和耗散率不断衰减, 并趋于各向同性, 初始产生的切应力减小并趋于零。

有关各向同性化过程的速度及变化规律的计算结果, 及与实验数据的比较在文献[6]中有详尽的讨论。本文的目的在于检验耗散率随机模型的可靠性, 只讨论湍流动能及其耗散率的衰减规律。实验表明, 格栅湍流按照幂函数规律衰减

$$\frac{k}{k_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-m}, \quad \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\langle \varepsilon \rangle_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-n} \quad (4.3)$$

式中带下标0的量为在参考时刻 t_0 的湍流动能和耗散率。实验给出的指数 m 和 n 与流动雷诺数及下游离格栅的距离有关。一般取 $m=1.0\sim 1.25$, $n=m+1$ 。

图1为计算给出的湍流动能和耗散率随时间衰减的曲线。在双对数坐标中,两者皆为直线,完全符合幂函数衰减的规律。直线的斜率为衰减函数的指数,它们分别为 $m=1.09$, $n=1.94$,与实验值基本吻合。

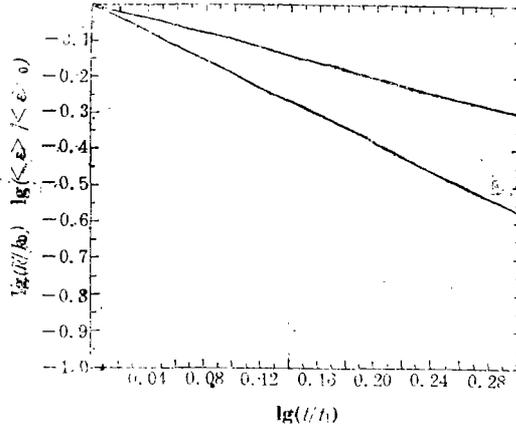


图1 衰变湍流中,湍流动能和耗散率的衰减曲线

2. 均匀剪切湍流

Tavoularis和Corrsin^[10]对所谓近似均匀的剪切湍流进行了广泛的测量,得到了详细的结果。在这种流动的一定区域中,流动满足:

- (1) 统计上定常的二维流动,唯一非零的平均速度为 $\langle u_1 \rangle$,横向的速度梯度为常数

$$\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_2} = \text{常数} \neq 0, \quad \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_3} = 0$$

- (2) 在任何一个 (x_2, x_3) 平面上,脉动速度和脉动压力在统计上是均匀的,即

$$\frac{\partial \langle \rangle}{\partial x_2} = \frac{\partial \langle \rangle}{\partial x_3} = 0$$

- (3) 所有的平均量对某一个惯性坐标系是定常的。

图2~7为其计算结果。在这些图中,参数 $s = \partial \langle u_1 \rangle / \partial x_2$ 可以理解为平均运动时间的倒数, $q^2 = 2k$ 。图2为湍流动能产生率与耗散率之比随无量纲时间 st 的变化。图3给出湍流时间尺度与平均运动时间尺度之比 $sq^2 / \langle s \rangle$ 随无量纲时间 st 的变化。从图2和3上看不出,发展是否有平衡状态,但计算达到的值与实验值 $p / \langle \varepsilon \rangle = 1.8$, $sq^2 / \langle \varepsilon \rangle = 12$ 很接近。图4为在三个坐标方向上,湍流动能分数随无量纲时间的变化曲线。很显然,它们的渐近值 $\langle u_1'^2 \rangle / q^2 = 0.52$ 、 $\langle u_2'^2 \rangle / q^2 = 0.19$ 和 $\langle u_3'^2 \rangle / q^2 = 0.29$,与Tavoularis和Corrsin得到的实验值0.529, 0.187和0.284很接近。图5和6分别为关联系数 $\langle u_1' u_2' \rangle / (\langle u_1'^2 \rangle \langle u_2'^2 \rangle)^{1/2}$ 和切应力与湍流动能之比 $\langle u_1' u_2' \rangle / q^2$ 随无量纲时间的变化关系,它们的渐近值分别为0.46和0.148,接近实验值0.45和0.14。图7表明,湍流尺度 $l = q^3 / \langle \varepsilon \rangle$ 随时间直接上升,这也与实验测量的趋势一致。

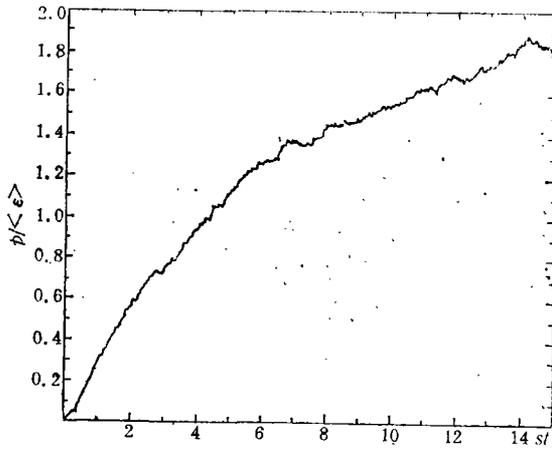


图2 均匀剪切流中，湍流动能产生率与耗散率之比的变化曲线

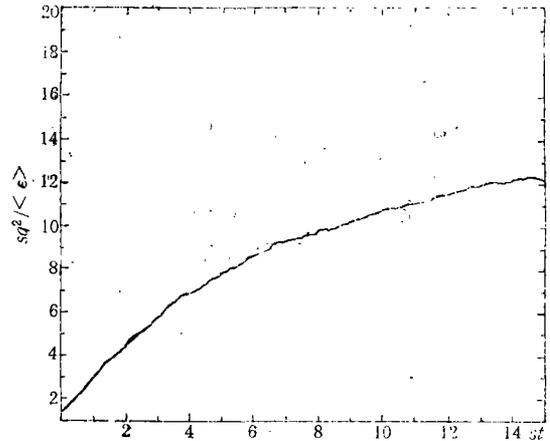


图3 均匀剪切流中，湍流时间尺度与平均运动时间尺度之比的变化曲线

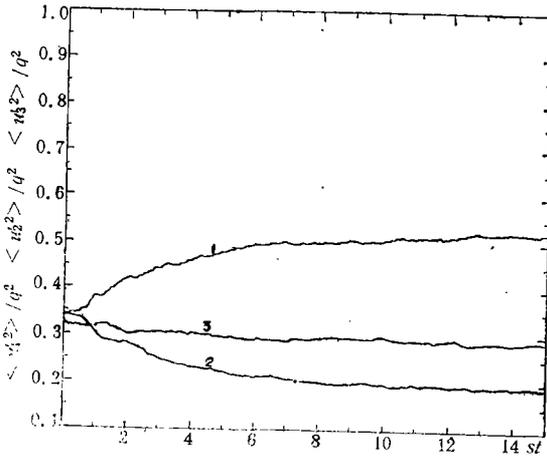


图4 均匀剪切流中，三个坐标方向上湍流动能分数的变化曲线

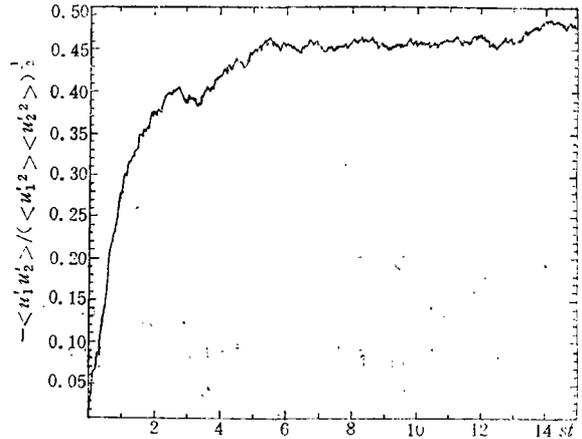


图5 均匀剪切流中，关联系数的变化曲线

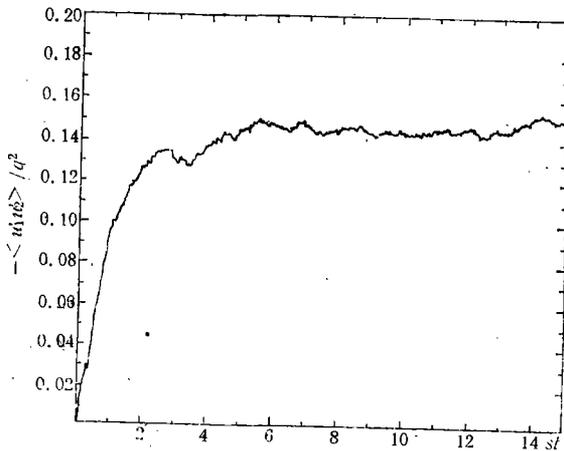


图6 均匀剪切流中，切应力与湍流动能之比的变化曲线

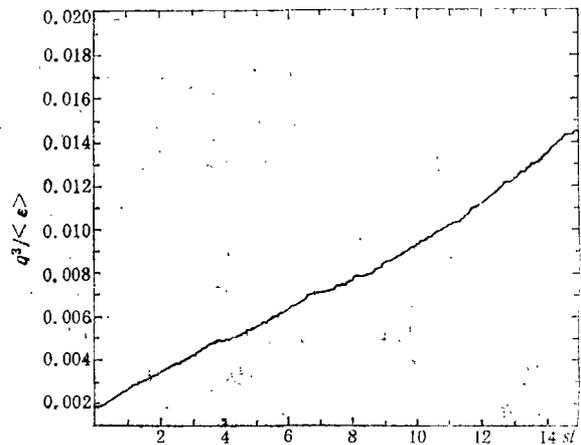


图7 均匀剪切流中，湍流尺度的变化曲线

五、结 论

本文发展的速度和耗散率的联合Pdf方程,是完全封闭的。预计可以应用到许多类型的流动(边界层类型和有回流区的流动)的计算。均匀湍流的计算表明,该输运方程能够给出合理的结果。

正如引言中提出,我们的最终目的是要发展一个通用的随机模型。最近,我们已将该文发展的方程应用于二维管道流场的计算,初步计算表明,结果是满意的。

参 考 文 献

- [1] Lundgren, T. S., Model equation for nonhomogeneous turbulence, *Phys. Fluids*, 12 (1969), 485.
- [2] Dopazo, C. and E. E. O'Brien, Statistical treatments of non-isothermal chemical reactions in turbulence, *Combustion Science and Technology*, 13 (1976), 99.
- [3] Pope, S. B., The probability approach to the modeling of turbulent reacting flows, *Combustion and Flame*, 27 (1976), 299.
- [4] Pope, S. B., Pdf methods for turbulent reactive flows, *Progress of Energy and Combustion Science*, 11 (1985), 119.
- [5] Pope, S. B., A lagrangian two-time probability density function equation for inhomogeneous turbulent flows, *Phys. Fluids*, 26 (1983), 3448.
- [6] Haworth, D. C. and S. B. Pope, A generalized Langevin model for turbulent flows, *Phys. Fluids*, 29 (1986), 387.
- [7] Pope, S. B. and D. C. Haworth, The mixing layer between turbulent fields of different scales, *Fifth Symposium on Turbulent Shear Flows*, Cornell University (1985).
- [8] Monin, A. S. and Yaglon, *Statistical Fluid Mechanics* (ed. J. L. Lumley), The MIT Press, Cambridge (1975).
- [9] Kolmogorov, A. N., Logarithmically normal distribution of fragmentary particle sizes, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 31 (1941), 99.
- [10] Tavoularis, S. and S. Corrsin, Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with a uniform mean temperature gradient, *J. Fluid Mech.*, 104 (1981), 311.

The Evolution Equation of Joint Pdf of Turbulent Velocity and Dissipation

Chen Yi-liang

(University of Science and Technology of China, Hefei)

Pope, S. B.

(Cornell University, U. S. A.)

Abstract

According to the hypothesis that the dissipation of turbulent kinetic energy satisfies lognormal distribution, a stochastic model of dissipation is provided and the Langevin mode of velocity is modified. Then a joint pdf equation of turbulent velocity and dissipation is derived. We solve numerically the joint pdf equation using Monte Carlo method and obtain satisfactory results for decaying turbulence and homogeneous turbulent shear flow. The preliminary results show that the model is well working.