

# 用位移非协调广义变分原理解含 裂纹体的圣维南扭转问题\*

范 秀 昌

(天津理工学院, 1987年8月30收到)

## 摘 要

本文根据钱伟长教授的弹性力学小位移非协调元的广义变分原理<sup>[1]</sup>采用裂纹尖端奇异元素<sup>[2]</sup>及本文作者给出的八节点等参数环绕元素, 对含有径向纵裂纹的圣维南扭转问题进行了有限元分析, 并与参考文献[2]的计算结果进行了比较。计算结果表明, 用本文提供的方法, 在自由度很低的情况下, 就可得到相当满意的收敛解答。

## 一、前 言

裂纹尖端处的应力场存在有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 的奇异性。近年来, 人们用有限元素方法对带有裂纹的物体进行分析时, 往往采用其位移场为裂纹尖端理论解的奇异元素。这种元素与其环绕元之间常存在有位移的不协调问题。解决这种不协调问题的办法有两种。一是加密环绕元的网格、减小奇异元的尺寸, 以高自由度换取计算精度; 另一种办法就是采用广义变分原理, 这就从理论上解决了上述不协调问题。本文采用钱伟长<sup>[1]</sup>教授给出的弹性力学小位移非协调元的广义变分原理, 对含有径向纵裂纹的圣维南扭转问题进行了分析。这里采用蔡承文教授给出的高阶奇应变单元<sup>[2]</sup>, 并取其位移解答的前四项。本文提出了一种可以适用于圣维南扭转的八节点等参数元素, 并取之为奇应变单元的环绕元。计算结果表明, 在很低的自由度情况下, 即可得到相当好的收敛解答, 并且精度也高于[2]。

## 二、原 理

这里采用钱伟长教授给出的适用于位移非协调的弹性力学广义变分原理, 其泛函为<sup>[1]</sup>:

$$\Pi_{IPA} = \sum_{m=1}^N \left\{ \iint_{S^{(m)}} \left[ \frac{1}{2} a_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\alpha\beta}^{(m)} e_{\gamma\delta}^{(m)} - \bar{F}_{\alpha} u_{\alpha}^{(m)} \right] dS \right\}$$

\* 钱伟长推荐。

$$\begin{aligned}
& - \int_{L_{\sigma}^{(m)}} \bar{p}_{\alpha} u_{\alpha}^{(m)} dL - \int_{L_u^{(m)}} (u_{\alpha}^{(m)} - \bar{u}_{\alpha}) \alpha_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}^{(m)} n_{\beta}^{(m)} dL \} \\
& - \sum_{(mm')} \int_{L^{(mm')}} (u_{\alpha}^{(m)} - u_{\alpha}^{(m')}) \frac{1}{2} \alpha_{\alpha\beta\gamma\delta} (e_{\gamma\delta}^{(m)} n_{\beta}^{(m)} + e_{\gamma\delta}^{(m')} n_{\beta}^{(m')}) dL \quad (2.1)
\end{aligned}$$

其中:  $N$ 为元素的数量;  $\iint_{S^{(m)}}$ 为在第  $m$  个元素的面积内积分,  $\int_{L_{\sigma}^{(m)}}$ 为在第  $m$  个元素已知外力边界上积分,  $\int_{L_u^{(m)}}$ 为在第  $m$  个元素已知位移边界上积分,  $\sum_{(mm')}$ 为在一切位移不协调公共边界上求和,  $\int_{L^{(mm')}}$ 为在位移不协调元素的不协调边界上积分,  $\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 为弹性常数张量,  $e_{\alpha\beta}^{(m)} = (u_{\alpha,\beta}^{(m)} + u_{\beta,\alpha}^{(m)})/2$ 为第  $m$  个元素的应变张量,  $\bar{F}_{\alpha}$ 为体力向量,  $u_{\alpha}^{(m)}$ 为第  $m$  个元素的位移向量,  $\bar{p}_{\alpha}$ 为元素的已知边界力向量,  $\bar{u}_{\alpha}$ 为元素的已知边界位移向量,  $n_{\beta}^{(m)}$ 为元素边界外法线的方向余弦,  $u_{\alpha}^{(m')}$ 为与第  $m$  个元素相邻的  $m'$  元素上的不协调位移向量,  $e_{\gamma\delta}^{(m')} = (u_{\gamma,\delta}^{(m')} + u_{\delta,\gamma}^{(m')})/2$ 为与第  $m$  个元素相邻的  $m'$  元素上的应变张量,  $n_{\beta}^{(m')}$ 为与第  $m$  个元素相邻的  $m'$  元素边界外法线的方向余弦。

将  $\Pi_{IPA}$  相对于宗量  $u_{\alpha}^{(m)}$ ,  $u_{\alpha}^{(m')}$  变分, 经采用格林公式后得

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_{IPA} = & \sum_{m=1}^N \left\{ - \iint_{S^{(m)}} [(\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}^{(m)})_{,\beta} - \bar{F}_{\alpha}] \delta u_{\alpha}^{(m)} dS \right. \\
& + \int_{L_{\sigma}^{(m)}} (\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}^{(m)} n_{\beta}^{(m)} - \bar{p}_{\alpha}) \delta u_{\alpha}^{(m)} dL \\
& \left. - \int_{L_u^{(m)}} (u_{\alpha}^{(m)} - \bar{u}_{\alpha}) \alpha_{\alpha\beta\gamma\delta} \delta e_{\gamma\delta}^{(m)} n_{\beta}^{(m)} dL \right\} \\
& - \sum_{(mm')} \int_{L^{(mm')}} \frac{1}{2} (u_{\alpha}^{(m)} - u_{\alpha}^{(m')}) \alpha_{\alpha\beta\gamma\delta} (\delta e_{\gamma\delta}^{(m)} n_{\beta}^{(m)} - \delta e_{\gamma\delta}^{(m')} n_{\beta}^{(m')}) dL \\
& + \sum_{(mm')} \int_{L^{(mm')}} \frac{1}{2} \alpha_{\alpha\beta\gamma\delta} (e_{\gamma\delta}^{(m)} n_{\beta}^{(m)} + e_{\gamma\delta}^{(m')} n_{\beta}^{(m')}) (\delta u_{\alpha}^{(m)} + \delta u_{\alpha}^{(m')}) dL \quad (2.2)
\end{aligned}$$

由于  $\delta u_{\alpha}^{(m)}$ ,  $\delta e_{\gamma\delta}^{(m)} n_{\beta}^{(m)}$ ,  $\delta e_{\gamma\delta}^{(m')} n_{\beta}^{(m')}$ ,  $\delta u_{\alpha}^{(m')}$  的任意性, 由上式得

$$(\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}^{(m)})_{,\beta} - \bar{F}_{\alpha} = 0 \quad \text{在 } S^{(m)} \text{ 上} \quad (2.3a)$$

$$\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta} n_{\beta}^{(m)} - \bar{p}_{\alpha} = 0 \quad \text{在 } L_{\sigma}^{(m)} \text{ 上} \quad (2.3b)$$

$$u_{\alpha}^{(m)} - \bar{u}_{\alpha} = 0 \quad \text{在 } L_u^{(m)} \text{ 上} \quad (2.3c)$$

$$u_{\alpha}^{(m)} = u_{\alpha}^{(m')} \quad \text{在 } L^{(m)} \text{ 上} \quad (2.3d)$$

$$\alpha_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}^{(m)} n_{\beta}^{(m)} = - \alpha_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}^{(m')} n_{\beta}^{(m')} \quad \text{在 } L^{(mm')} \text{ 上} \quad (2.3e)$$

上述诸式分别为平衡方程、力的边界条件、位移的边界条件、边界上位移的连续条件、边界

上应力的连续条件。

为了方便起见,  $\Pi_{IPA}$  可以改写成

$$\begin{aligned} \Pi_{IPA} = & \sum_{m=1}^N \left\{ \iint_{S^{(m)}} \left[ \frac{1}{2} a_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\alpha\beta}^{(m)} e_{\gamma\delta}^{(m)} - \bar{F}_\alpha u_\alpha^{(m)} \right] dS - \int_{L_\sigma^{(m)}} \bar{p}_\alpha u_\alpha^{(m)} dL \right. \\ & - \int_{L_u^{(m)}} (u_\alpha^{(m)} - \bar{u}_\alpha) a_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}^{(m)} n_\beta^{(m)} dL \\ & \left. - \sum_{m' \text{ of } m} \int_{L^{(mm')}} \frac{1}{2} (u_\alpha^{(m)} - u_\alpha^{(m')}) a_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}^{(m)} n_\beta^{(m)} dL \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

下面以矩阵形式给出  $\Pi_{IPA}$ , 为此令

$$\{u\}^{(m)} = [N]^{(m)} \{q\}^{(m)}, \quad \{\sigma\}^{(m)} = [a] \{e\}^{(m)}, \quad \{e\}^{(m)} = [D] \{u\}^{(m)} \quad (2.5a, b, c)$$

其中:  $\{u\}^{(m)}$  为元素的位移列阵;  $[N]^{(m)}$  为形状函数矩阵;  $\{q\}^{(m)}$  为元素节点位移列阵;  $\{\sigma\}^{(m)}$  为元素应力列阵;  $[a]$  为弹性矩阵;  $\{e\}^{(m)}$  为元素应变列阵;  $[D]$  为几何矩阵。

又令  $[n]^{(m)}$  代表方向余弦矩阵, 代入  $\Pi_{IPA}$  中经整理后得

$$\begin{aligned} \Pi_{IPA} = & \sum_{m=1}^N \left\{ \iint_{S^{(m)}} \left[ \frac{1}{2} \{q\}^{(m)T} [N]^{(m)T} [D]^T [a] [D] [N]^{(m)} \{q\}^{(m)} \right. \right. \\ & - \{q\}^{(m)T} [N]^{(m)T} \{\bar{F}\} \left. \right] dS \\ & - \int_{L_\sigma^{(m)}} \{q\}^{(m)T} [N]^{(m)T} \{\bar{p}\} dL - \int_{L_u^{(m)}} \{q\}^{(m)T} [N]^{(m)T} [n]^{(m)} \\ & \cdot [a] [D] [N]^{(m)} \{q\}^{(m)} dL \\ & + \int_{L_u^{(m)}} \{q\}^{(m)T} [N]^{(m)T} [n]^{(m)} [a] [D] \{\bar{u}\}^{(m)} dL \\ & - \sum_{m' \text{ of } m} \int_{L^{(mm')}} \frac{1}{2} \{q\}^{(m)T} [N]^{(m)T} [n]^{(m)} [a] [D] [N]^{(m)} \{q\}^{(m)} dL \\ & \left. + \sum_{m' \text{ of } m} \int_{L^{(mm')}} \frac{1}{2} \{q\}^{(m')T} [N]^{(m')T} [n]^{(m)} [a] [D] [N]^{(m)} \{q\}^{(m)} dL \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

若令

$$\begin{aligned} [K_1]^{(m)} = & \iint_{S^{(m)}} [N]^{(m)T} [D]^T [a] [D] [N]^{(m)} dS \\ & - 2 \int_{L_u^{(m)}} [N]^{(m)T} [n]^{(m)} [a] [D] [N]^{(m)} dL \\ & - \int_{L^{(mm')}} [N]^{(m)T} [n]^{(m)} [a] [D] [N]^{(m)} dL \end{aligned} \quad (2.7a)$$

$$[K_1]^{(mm')} = \int_{L^{(mm')}} [N]^{(m')T} [n]^{(m)} [a] [D] [N]^{(m)} dL \quad (2.7b)$$

$$\begin{aligned} \{Q\}^{(m)} = & \iint_{S^{(m)}} [N]^{(m)T} \{\bar{F}\} dS + \int_{L_\sigma^{(m)}} [N]^{(m)T} \{\bar{p}\} dL \\ & - \int_{L_u^{(m)}} [N]^{(m)T} [n]^{(m)} [a] [D] \{\bar{u}\}^{(m)} dL \end{aligned} \quad (2.7c)$$

则有

$$\begin{aligned} \Pi_{IPA} = & \sum_{m=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \{q\}^{(m)T} [K_1]^{(m)} \{q\}^{(m)} \right. \\ & \left. + \sum_{m' \text{ of } m} \frac{1}{2} \{q\}^{(m')T} [K_1]^{(mm')} \{q\}^{(m)} - \{q\}^{(m)T} \{Q\}^{(m)} \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

将上式按全结构叠加得

$$\Pi_{IPA} = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_2] \{q\} - \{q\}^T \{Q\} \quad (2.9)$$

其中  $[K_2]$  为  $[K_1]^{(m)}$ ,  $[K_1]^{(mm')}$  的组合矩阵,  $\{q\}$  为全结构的位移列阵,  $\{Q\}$  为结构的载荷列阵。

由  $\Pi_{IPA}$  的驻值条件得

$$[K_2^*] \{q\} = \{Q\} \quad (2.10)$$

其中

$$[K_2^*] = ([K_2] + [K_2]^T) / 2$$

(2.10) 式即为全结构的平衡方程。

### 三、元 素

#### 1. 裂纹尖端元素——圆形奇应变元素 (图 1)

众所周知, 在极坐标下等截面杆 Saint-Venant 扭转的位移场假设为

$$u_\rho = 0, \quad u_\theta = \varphi z \rho, \quad w = w(\rho, \theta) \quad (3.1)$$

其中  $u_\rho$ ,  $u_\theta$  为等截面杆横截面内的位移,  $\varphi$  为单位长度的扭转角,  $w$  是横截面翘曲函数, 它应满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.2)$$

及侧面、裂纹面的边界条件。侧面之边界条件通过广义变分原理得到满足, 而裂纹面呈自由表面的边界条件是

$$\left[ \varphi(\rho + x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right]_{\theta = \pm \pi} = 0 \quad (3.3)$$

同时满足 (3.2), (3.3) 式的位移函数取为<sup>[2]</sup>

$$\begin{aligned} w = & \varphi \left( -x_0 \rho \sin \theta - \frac{\rho^2}{2} \sin 2\theta \right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \left( \frac{\rho}{R_0} \right)^{2n-1} \sin \left( \frac{2n-1}{2} \theta \right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \left( \frac{\rho}{R_0} \right)^n \cos(n\theta) + w_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中:  $x_0$  为裂纹尖端的  $x$  坐标值 (见图 1),  $R_0$  为奇异元的半径,  $\rho$ ,  $\theta$  为以裂纹尖端为极点的极坐标分量,  $w_0$  为横截面的刚体位移。

因为裂纹尖端附近的渐近展开式为<sup>[2]</sup>

$$w = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} + \dots$$

与(3.4)式比较后可得

$$K_{II} = G \sqrt{\frac{\pi}{2R_0}} a_1 \quad (3.5)$$

由(3.1), (3.4)式可以得出裂纹尖端元素的  $\{q\}^{(m)}$ ,  $[N]^{(m)}$ ,  $[D]$ ,  $[a]$ ,  $[n]^{(m)}$  分别为

$$\{q\}^{(m)} = [\varphi \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{2n-1} \ a_{2n} \ w_0]^T \quad (3.6)$$

$$[N]^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ z\rho & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -x_0\rho\sin\theta - \frac{\rho^2}{2}\sin 2\theta \left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{1/2}\sin\frac{\theta}{2} & \frac{\rho}{R_0}\cos\theta & \dots & \left(\frac{\rho}{R_0}\right)^n \cos n\theta & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial \rho} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$[a] = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = GI \quad (3.9)$$

$$[n]^{(m)} = [\cos\theta \ \sin\theta] \quad (3.10)$$

## 2. 环绕元——八节点等参数元素 (图 2)

位移变换取为

$$u = -\varphi zy, \quad v = \varphi zx, \quad w = \sum_1^8 N_i(\xi, \eta) w_i \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad (3.11)$$

几何变换取为

$$\begin{cases} x = \sum_1^8 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y = \sum_1^8 N_i(\xi, \eta) y_i \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad (3.12)$$

其中

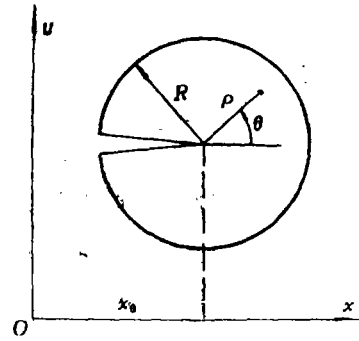


图 1 裂纹尖端奇应变单元

$$\begin{cases} N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1) & (i=1, 3, 5, 7) \\ N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) & (i=2, 6) \\ N_i = \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 + \xi_i \xi) & (i=4, 8) \end{cases} \quad (3.13)$$

由(3.11)式可以看出, 环绕元与奇异元间关于  $u, v$  是连续的, 而关于  $w$  是不连续的。由(3.11)式不难得出环绕元的位移阵列为

$$\{q\}^{(m)} = [\varphi \ w_1 \ w_2 \ \dots \ w_8]^T \quad (3.14)$$

令环绕元的1-2-3边与奇异元边界重合, 所以环绕元1-2-3边上的节点位移  $w_1, w_2, w_3$  就不是独立量, 它们取决于裂纹尖端元素的广义位移, 这样环绕元的广义位移阵列为

$$\{\hat{q}\} = [\varphi \ w_4 \ w_5 \ w_6 \ w_7 \ w_8 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{2n-1} \ a_{2n} \ w_9]^T \quad (3.15)$$

根据  $w_1, w_2, w_3$  与裂纹尖端元素位移间的关系, 不难得到

$$\{q\}^{(m)} = [T]_*^{(m)} \{\hat{q}\} \quad (3.16)$$

其中

$$[T]_*^{(m)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -x_0 R_e \sin \theta_1 - \frac{R_c^2}{2} \sin 2\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \frac{\theta_1}{2} & \cos \theta_1 & \dots & \sin \frac{2n-1}{2} \theta_1 & \cos n \theta_1 & 1 \\ -x_0 R_e \sin \theta_2 - \frac{R_c^2}{2} \sin 2\theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \frac{\theta_2}{2} & \cos \theta_2 & \dots & \sin \frac{2n-1}{2} \theta_2 & \cos n \theta_2 & 1 \\ -x_0 R_e \sin \theta_3 - \frac{R_c^2}{2} \sin 2\theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \frac{\theta_3}{2} & \cos \theta_3 & \dots & \sin \frac{2n-1}{2} \theta_3 & \cos n \theta_3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

称为变换矩阵。这里  $\theta_1, \theta_2$  和  $\theta_3$  分别为环绕元上 1, 2 和 3 点的极角。

环绕元的  $[N]^{(m)}, [D], [a], [n]^{(m)}$  分别为

$$[N]^{(m)} = \begin{bmatrix} -zy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ zx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$[a] = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = GI \quad (3.20)$$

$$[n]^{(m)} = [v_x \quad v_y] \quad (3.21)$$

其中  $v_x$ ,  $v_y$  分别为环绕元边界外法线的方向余弦。

#### 四、算 例

取半径为  $R$ , 沿整条半径贯穿有裂纹的无限长圆柱体为例进行计算, 并设其上作用有扭矩  $M$ 。该问题应力强度因子  $K_{II}$  的精确解为<sup>[2]</sup>

$$K_{II} = \frac{32}{15} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{R^5} \left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right) \approx 0.96927 \sqrt{\frac{M}{R^5}} \quad (4.1)$$

算例中取  $n=2$ ,  $R_0/R$  分别取为 0.08, 0.1, 0.12, 0.14。

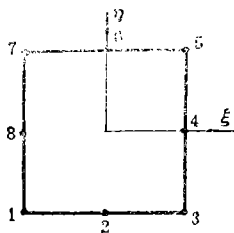


图 2 环绕元简图

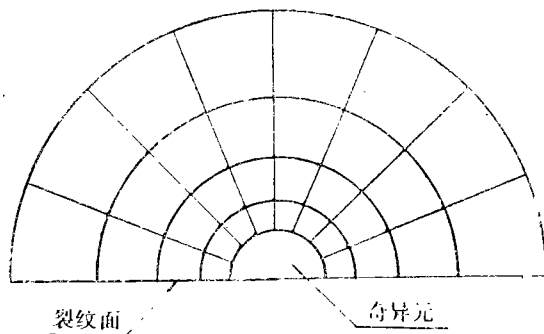
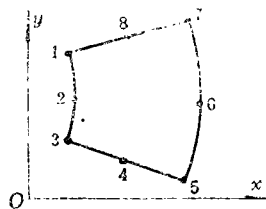


图 3 计算网格示意图

计算网格如图 3 所示。

计算结果列于表 1 内及图 4 上, 这里同时给出了参考文献 [2] 中的计算结果, 以进行比较。

由表 1 及图 4 可以看出, 采用广义变分原理及本文给出的具有纵向位移的平面等参数元素, 可以大大提高收敛速度, 在自由度很低的情况下即可得到相当精确的计算结果。例如本文结果在阶数为 192 时  $K_{II}/(M/\sqrt{R^5})$  之百分误差为 0.43228, 而文献 [2] 在阶数为 345 时相应值为 0.90。

表 1

	本文 计算 结果				参考文献 [2] 计算 结果			
	0.08	0.1	0.12	0.14	0.1	0.2	0.3	0.4
自由 度	192	163	140	114	345	240	177	135
$K_{II}/\sqrt{\frac{M}{R^5}}$	0.97346	1.00567	1.04451	1.08533	0.96053	0.94676	0.91764	0.88829
误差 (%)	0.43228	3.75540	7.76254	11.87396	0.90	2.32	5.32	8.35

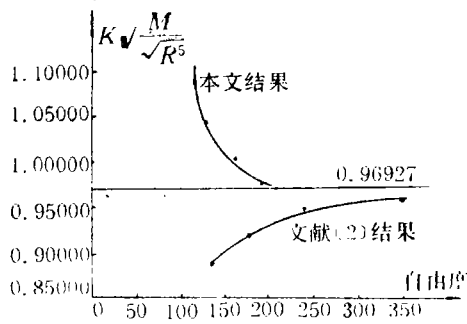


图 4 计算结果的比较

## 参 考 文 献

- [1] 钱伟长, 《广义变分原理》, 知识出版社 (1985).  
 [2] 蔡承文等, 计算 St. Venant 扭转时  $K_{II}$  的任意高阶奇应变单元, 固体力学学报, 1 (1983).

## Using Generalized Variational Principles to Resolve the St. Venant's Torsional Bar with a Crack

Fan Xio-zang

(Tianjin College of Technology, Tianjin)

### Abstract

According to generalized variational principles suitable for linear elastic incompatible displacement elements given by Professor Chien Wei-zang, using crack tip singular element and isoparametric surrounding element given by the author of this paper, we will study the St. Venant's torsional bar with a radial vertical crack and compare the present computed results with the results of reference [2]. The present computed results show that, using the method provided in this paper, satisfactory convergent solution can be obtained under lower degree of freedom.