 应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性生态系统的复杂动力学行为研究(Ⅱ)*

昝廷全

（兰州大学，1988年5月18日收到）

摘　要

本文是文献[1]的继续，主要讨论了非线性生态系统的一维简单模型所呈现出的复杂动力学行为：定点运动、周期运动和混沌运动等；简要论述了这种简单模型所显示出的复杂动力学行为的普适性，这可由M．Feigenbaum第一常数和第二常数描述．最后，本文还讨论了非线性生态系统在从未分岔状态逼近分岔点时会由于接近失稳而发生的"单边慢化现象"，这在生态资源的开发利用和人工生态系统的设计与管理中具有重要的理论意义和实践意义．

一、引　言

我们在文献[1]中已经指出，非线性生态系统的动态行为一方面受制于环境的非平衡约束，另一方面更主要地取决于系统的内部相互作用．本文通过对非线性生态系统的简单一维模型的讨论说明在一定的种群生态系统中存在复杂的动力学行为．而且，上述这些复杂的动力学行为都是由确定性方程得出的结果．

非线性生态系统的动态行为可以由一组偶合的非线性的常微分方程组或偏微分方程组描述，也可由非线性的迭代方程（组）来描述．方程含有一个或几个控制参数．随着参数的变化，系统可以呈现定常状态、周期状态、拟周期状态和混沌状态等．这些状态相互转变，不断演化，就构成了非线性生态系统的多样性和复杂性．

人们通常用微分方程

$$d\vec{x}/dt=f(\alpha,\vec{x}) \tag{1.1}$$

或迭代方程

$$x_{i,n+1}=f(\alpha,x_{i,n}) \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{1.2}$$

来描述生态系统的动态行为．其中$\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$是状态变量向量，$\alpha$是控制参数．由于（1.1）和（1.2）式右端$f(\alpha,\vec{x})$和$f(\alpha,x_{i,n})$中不明显地含有时间$t$，所以称为自治动力系统．对于函数$f$的表达式中显含时间$t$的非自治动力系统，可以通过适当的变量代换化为自

* 吴学谋推荐．
本研究得到中科院青年奖励基金和兰州大学青年科研基金资助．

治动力系统。因此，本文主要讨论生态系统为自治动力系统的情况。

为了研究问题的方便起见，我们把非线性生态系统分成两种类型：第一种类型，生态系统的状态变量向量为有限维的，它常以n个常微分方程来描述；第二种类型，向量$\vec{x}$是无限维的，它常以偏微分方程组来描述。本文主要研究第一种情况。

如果生态系统（1.1）在很长时间以后，其状态稳定下来不随时间而变化，即有

$$f(\alpha,\vec{x})=0 \tag{1.3}$$

由（1.3）确定的状态变量向量$\vec{x}_s$称为（1.1）的定态解。对有限维情况，就是要解非线性代数方程组；对无限维情况，就是要解常微分方程组或偏微分方程组的非线性边值问题。为了研究非线性生态系统的动态行为及其机制问题，我们从求解定态解开始研究各种解的转化，这就要研究解的稳定性及其个数的变化这两个问题。下面，我们首先建立非线性生态系统的一维数学模型，然后再利用前述方法研究其动态行为及其变化机制。

二、模型建立

为说明问题方便起见，我们从简单的一维模型开始我们对非线性生态系统复杂动力学行为的讨论。与生物种群世代之间有完全重叠（如人类种群）情况相反的极端情况是在相继的世代之间完全没有重叠，种群实际上由单一世代构成，所以种群增长分步进行[2]。周期性的蝉，它每隔7、13、或17年出现一次成虫期就是很好的例子。若用n代表时间，x_n代表世代n的种群密度，x_{n+1}代表世代$n+1$的种群密度。x_{n+1}一方面和x_n成正比，另一方面食物的来源却因种群的存在而减少。在这种情况下，把世代$n+1$的种群密度x_{n+1}和世代n的种群密度x_n联系起来的如下迭代方程是适当的数学模型

$$x_{n+1}=f(\alpha,x_n)=\alpha x_n(1-x_n) \tag{2.1}$$

其中α为控制参数$\alpha\in(0,4)$，$x\in(0,1)$

适当进行变量代换和恰当定义参数α之后，(2.1)可写为

$$x_{n+1}=f(\alpha,x_n)=1-\alpha x_n^2 \tag{2.2}$$

其中$\alpha\in(0,2)$，$x\in(-1,1)$。$f(\alpha,x_n)$是x_n的非线性函数，它依靠于参数α。显然，我们不能单值确定逆函数$f^{-1}(\alpha,x_{n+1})$。这说明没有世代重叠的种群变化是不可逆的。

虽然上述模型具有明显的简单性，稍后的分析将表明它仍然显示了非线性生态系统的难以置信的复杂动力学行为：从简单的定点运动到多重周期运动和混沌运动。我们首先研究一维非线性生态系统的重要性还在于，高维非线性生态系统在演化过程中会发生状态变量的归并现象。快变量在变化过程中逐渐被耗尽，只有慢变量才对生态系统的最终状态起决定作用[3]。其相空间体积在演化过程中不断收缩，结果在很多截面上很接近一维映象。因此，对一维非线性生态系统的研究是研究高维非线性生态系统的基础。

三、动态行为分析

我们选择三种情况进行讨论，这三种情况分别为$0<\alpha<0.75$，$0.75\leqslant\alpha<1.25$和$\alpha>\alpha_\infty=1.401155225\cdots$。

（1） 第一种情况：$0<\alpha<0.75$。在区间（$-1,1$）内选定初始种群密度x_0，以x_0出发进行迭代

$$x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to \cdots$$

可以发现在某一x_N之后会出现

$$x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \cdots = x_\infty$$

的情况。令$x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \cdots = x_\infty = x^*$，这种定态过程称为不动点运动。$x_N$前面的过程称为暂态过程。这时，(2.2)式变为

$$x^* = f(\alpha,\ x^*) = 1 - \alpha x^{*2} \tag{3.1}$$

（3.1）式称为不动点方程，解得：

$$x_1^* = \frac{\sqrt{1+4\alpha}-1}{2\alpha},\quad x_2^* = -\frac{\sqrt{1+4\alpha}+1}{2\alpha}$$

下面分析x_1^*和x_2^*的稳定性：

设$x_n = x^* + \varepsilon_n$，代入（2.1）式有：

$$x_{n+1} = f(\alpha, x_n) = f(\alpha, x^* + \varepsilon_n)$$

对上式在x^*附近作泰勒级数展开可得：

$$x_{n+1} = f(\alpha, x^*) + f'(\alpha, x^*)\varepsilon_n + \cdots \tag{3.2}$$

利用不动点方程（3.1）式我们得到：

$$x^* + \varepsilon_{n+1} \approx x^* + f'(\alpha, x^*)\varepsilon_n$$

$$\therefore\quad \varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n = f'(\alpha, x^*) \tag{3.3}$$

稳定条件为

$$|\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n| < 1$$

所以，当

$$|f'(\alpha, x^*)| < 1 \tag{3.4}$$

时，定态分支解是稳定的。

由（3.1）式

$$f(\alpha, x^*) = 1 - \alpha x^{*2}$$

$$\therefore |f'(\alpha, x^*)| = 2\alpha x^*$$

当$\alpha = 0.50$时，

$$|f'(\alpha, x_1^*)| = |\sqrt{1+4\alpha}-1| < 1,\ |f'(\alpha, x_2^*)| = |\sqrt{1+4\alpha}+1| > 1$$

所以，当$\alpha = 0.5$时，x_1^*是稳定不动点，x_2^*是不稳定不动点。

（2） 第二种情况：$0.75 \leqslant \alpha < 1.25$

当α从0.5增加到0.75时

$$|f'(\alpha, x_1^*)| = |\sqrt{1+4\alpha}-1| = 1$$

稳定不动点开始失稳，分岔为新的不动点

$$x_1^* = x_3^* = 1 - \alpha x_2^{*2} = 1 - \alpha x_4^{*2} \tag{3.5}$$

$$x_2^* = x_4^* = 1 - \alpha x_1^{*2} = 1 - \alpha x_3^{*2} \tag{3.6}$$

为叙述方便起见，我们定义一个新函数

$$\begin{aligned} F(2, \alpha, x) \triangleq f[\alpha, f(\alpha, x)] &= 1 - \alpha(1 - \alpha x^2)^2 \\ &= f^{(2)}(\alpha, x) = f \circ f(\alpha, x) \end{aligned} \tag{3.7}$$

（3.7）式的意思是迭代两次。类似地，叠代m次可以记为$F(m, \alpha, x)$。由此可以把（3.5）和（3.6）式统一写成

$$x_i^* = F(2, \alpha, x_i^*) \qquad (i = 1, 2) \tag{3.8}$$

这时，不动点x_i^*的稳定条件为

$$|F'(2,a,x_i^*)|=|f'(a,x_1^*)\circ f'(a,x_2^*)|<1 \tag{3.9}$$

证明

$$F(2,a,x_1)=f(a,f(a,x_1))=f(a,x_2)$$

$$\frac{dF(2,a,x_1)}{dx_1}=\frac{df(a,x_2)}{dx_2}\circ\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{df(a,x_1)}{dx_1}\circ\frac{df(a,x_2)}{dx_2}=f'(a,x_1)\circ f'(a,x_2)$$

类似地

$$F(2,a,x_2)=f(a,f(a,x_2))=f(a,x_1)$$

$$\frac{dF(2,a,x_2)}{dx_2}=\frac{df(a,x_1)}{dx_1}\circ\frac{dx_1}{dx_2}=\frac{df(a,x_2)}{dx_2}\circ\frac{df(a,x_1)}{dx_1}$$

$$=f'(a,x_1)\circ f'(a,x_2)$$

在这种情况下，x_1^*和x_2^*的稳定性完全一致。设它们在$a=a_c$时同时失稳，联系方程组

$$x_i^*=F(2,a,x_i^*) \qquad (i=1,2)$$

和

$$|F'(2,a,x_i^*)|=1 \qquad (i=1,2)$$

即可求得

$$a_c=1.25$$

当$a>1.25$时，又出现4个稳定不动点x_1^*，x_2^*，x_3^*和x_4^*。其稳定条件为

$$|F'(4,a,x_i^*)|=\prod_{i=1}^{4}|f'(a,x_i^*)|<1 \qquad (i=1,2,3,4) \tag{3.10}$$

在4点周期之后，相继出现$n=3,4,5,\cdots$等稳定2^n点周期，相应的稳定范围愈来愈窄。一般地，其稳定条件为

$$\left.\begin{aligned}&|F'(m,a,x_i^*)|=\prod_{i=1}^{m}|f'(a,x_i^*)|<1 \qquad (i=1,2,\cdots,m)\\&F(m,a,x)=f(a,\overbrace{f(a,f(a,\ \cdots,\ f(a,x))\cdots)}^{m})\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

当a增加到$a=a_\infty=1.401155225\cdots$时迅速达到无穷长周期$P\to\infty(n\to\infty)$。这意味着该非线性生态系统没有周期或者说是不可逆的，使得相空间中的各点既使十分靠近也不会重复，趋于满足各态历程原理。

（3） 第三种情况：$a>a_\infty=1.401155225\cdots$。

这时，出现看起来似乎是连续分布在一定区间内的随机分布的点——混沌带（chaos regime）。混沌带内蕴合有十分丰富的信息：奇怪吸引子和分维数等等，我们将另辟专文详细探讨非线性生态系统的混沌运动及其内在机制。这里我们仅仅指出，混沌带并非乱成一片，混沌带内有不少可以明显被看到的透明处，存在有周期窗口。它被放大后又是整个图案的重复，存在着无穷嵌套的自相似结构，这是与非线性生态系统的动力随机性密切相关的几何性质的表现。

四、几点讨论

前面我们讨论了非线性生态系统的简单一维模型的复杂动力学行为：不动点运动→周期

运动→混沌运动．人们自然要问，研究这种行为特征有无重要意义？也就是说，这种行为特征有没有普遍性．美国青年物理学家M．Feigenbaum 的工作肯定了在通往混沌区的途径中存在着规律性．

（1） M．Feigenbaum第一常数δ

设分岔点为

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_N,\alpha_{N+1},\cdots,\alpha_\infty,\ \boxed{\text{混沌区}}$$

M．Feigenbaum的研究表明，从分岔点α_{n-1}到α_n以公比为δ的几何级数形式迅速收敛到$n\to\infty$时的α_∞，其收敛方程为

$$\alpha_n=\alpha_\infty-\text{const}\ \frac{1}{\delta^n} \tag{4.1}$$

其中
$$\delta=\lim_{n\to\infty}\delta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\alpha_{n+1}-\alpha_n} \tag{4.2}$$

由（4.2）式确定的δ即称为M．Feigenbaum 第一常数．在我们的例子中

$$\delta=4.6692016091029909\cdots \tag{4.3}$$

该常数的发现是混沌动力学领域中的重大突破，它说明了从分岔到混沌和分岔序列的演替规律．进一步的研究表明，δ也同样适用于嵌套在混沌带中的二、三、…级分岔序列．

（2） M．Feigenbaum第二常数β

根据由分岔谱和混沌带所具有的无穷嵌套的自相似几何结构，可以明确看到同一行为在不同层次上重复出现，只是尺度越来越小，每一级相差β倍．混沌带中的周期窗口的尺寸在每次分岔以后也缩小β倍．这个缩小因子在$n\to\infty$时趋于一个普适常数

$$\beta=2.502907975095\cdots \tag{4.4}$$

也就是说，如果把$F(2,\alpha,x),F(4,\alpha,x),\cdots$等的图像都画出来，就可以看到$F(2n,\alpha,x)$的中心部分很象是把$F(n,\alpha,x)$的图象缩小$\beta$倍后再颠倒过来的结果，这时$x$本身的尺寸也要变化$\beta$倍．

M.Feigenbaum 证明，当$n\to\infty$时，各种属于（2.2）式一类的非线性迭代最后都趋于一个与$f(\alpha,x)$的形式无关的函数$g(x)$，它由函数方程

$$g(x)=-ag(g(x/a)) \tag{4.5}$$

决定，且满足标度不变性方程

$$Tg(x)=g(x) \tag{4.6}$$

即如果$g(x)$是它的解，则$ag(x/a)$ 也是它的解，其中a是任意常数，T为标度算子．

（3） 单边慢化现象

在非线性生态系统从不断分岔到混沌区的演进过程中，会发生临界单边慢化现象．在从分岔点α_{n-1}正向逼近α_n时，迭代过程的收敛速度很慢．这是因为从未分岔的状态逼近分岔点时，由于接近失稳而发生慢化，而α从大到小的一侧逼近分岔点时，由于始终处于稳定点上而不会感到慢化，故称为非线性生态系统的单边慢化现象．

据连续相变理论，收敛到不动点的距离按指数缩小，即

$$\varepsilon_n=x_n-x^*\ \propto\ e^{-n/\tau}$$
$$\varepsilon_{n+1}=x_{n+1}-x^*\ \propto\ e^{-(n+1)/\tau}=\varepsilon_n e^{-1/\tau}$$

式中τ为时间常数．

另一方面

$$e_{n+1}=F'(m,\alpha,x^*)e_n$$

所以

$$\tau=\frac{1}{\ln|F'(m,\alpha,x^*)|} \tag{4.7}$$

通常取

$$\tau=\frac{1}{|\alpha-\alpha_n|^{\Delta}} \tag{4.8}$$

式中Δ为慢化指数。α和α_n越靠近，τ就越大。

非线性生态系统单边慢化现象的发现，说明生态系统的正向演化和逆向演化之间存在着质的差异[4~5]。有些生态系统，例如绿洲生态系统，一旦被破坏而发生失稳，要想回复则需要相当长的时间。这对于自然生态资源的开发利用和人工生态系统的设计、管理与调控都具有深刻的理论意义和重要的现实意义。

致谢　新疆大学物理系任光耀先生与笔者进行过有益的讨论，在此表示衷心的谢忱。

参 考 文 献

[1] 昝廷全，非线性生态系统的复杂动力学行为研究(Ⅰ)，应用数学和力学，9，10 (1988)，925—931

[2] May, M., *Theoretical Ecology*, Blackwell Scientific Publishers (1981), 23—37.

[3] Haken, H., *Synergetics: An Introduction*, Springer (1977), 59—173.

[4] 昝廷全等，泛系生态聚类生克分析，科学探索，3 (1988)，47—48.

[5] 昝廷全、赵松岭，生态系统的热力学理论，《首届全国熵与交叉科学学术会议论文集》，气象出版社（待出版）.

Research on the Complicated Dynamical Behaviors of Nonlinear Ecosystems (Ⅱ)

Zan Ting-quan

(*Lanzhou University, Lanzhou*)

Abstract

This paper is a further study of reference [1]. In this paper, we mainly discuss the complicated dynamical behaviors resulting from a simple one-dimensional model of nonlinear ecosystems: fixed point motion, periodic motion and chaotic motion etc., and briefly discuss the universality of the complicated dynamical behaviors, which can be described by the first and the second M. Feigenbaum constants. At last, we discuss the "one-side lowering phenomenon" due to unstabilization when the nonlinear ecosystem approaches bifurcation points from unbifurcation side. It is of important theoretical and practical meanings both in the development and utilization of ecological resources and in the design and management of artifitial ecosystems.