

空化起始条件的确定*

黄景泉

(西北工业大学, 1987年3月30日收到)

摘 要

本文讨论了自由气核的发育、平衡和稳定, 说明空化的产生乃是自由气核发育到临界半径的结果, 并由此导出了空化起始的条件。

一、自由气核的发育

在实际水中, 存在着大量充满未溶解空气和水蒸汽的自由气核。在负压场中, 空化正是由这些自由气核的不断发育而形成的^[1]。

考虑任一自由气核, 当其在水中改变尺寸时, 周围液体的速度势可表为^[2]

$$\phi = \frac{R^2}{r} \cdot \frac{dR}{dt} \quad (1.1)$$

式中, $R=R(t)$ 为自由气核半径; r 为从自由气核中心计起的径向距离; t 为时间。

任意水质点相对于气核中心的径向速度可由式(1.1)得出为

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{dR}{dt} \quad (1.2)$$

略去重力的作用, 液体的运动方程为^[3]

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = F(t) = \frac{p_\infty}{\rho} \quad (1.3)$$

式中, ρ 为水的密度; p 为水中任意点处的压力; p_∞ 为水中无穷远处的压力, 该处 $u=0$, $\phi=0$ 。

当 $r=R$ 时, 由式(1.3)得出自由气核壁的运动方程式为

$$-R \frac{dU}{dt} - \frac{3}{2} U^2 = \frac{p_\infty - p}{\rho} \quad (1.4)$$

这里, $U=dR/dt$ 为自由气核壁的径向速度; $p=p(R)$ 为自由气核壁外侧处水的压力。

自由气核的发育非常迅速, 气核体积的变化过程可视为绝热过程, 因而有

* 钱伟长推荐。

1984年4月18日第一次收到。

$$p = p_1 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + p_v - \frac{2\sigma}{R} \quad (1.5)$$

式中, R_0 为气核初始半径; p_1 为初始时刻 ($R=R_0$, $\dot{R}=0$) 气核内的空气压力; $p_v = p_v(T)$ 为气核内的蒸汽压力; $\sigma = \sigma(T)$ 为水的表面张力; γ 为空气的绝热系数。

将式(1.5)代入式(1.4)得

$$\begin{aligned} R \frac{dU}{dt} + \frac{3}{2} U^2 &= \frac{1}{2R^2U} \cdot \frac{d}{dt} (R^3 U^2) = \frac{p - p_\infty}{\rho} \\ &= C_0^2 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{\rho R} - \frac{1}{\rho} (p_\infty - p_v) \end{aligned} \quad (1.6)$$

式中, $C_0^2 = p_1/\rho$

积分式(1.6)得

$$\begin{aligned} U = \frac{dR}{dt} &= \left\{ \frac{2C_0^2}{3(1-\gamma)} \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \right] + \frac{2\sigma}{\rho R} \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^2 - 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \frac{(p_\infty - p_v)}{\rho} \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - 1 \right] \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

或

$$dt = \frac{dR}{\left\{ \frac{2C_0^2}{3(1-\gamma)} \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \right] + \frac{2\sigma}{\rho R} \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^2 - 1 \right] + \frac{2}{3} \frac{(p_\infty - p_v)}{\rho} \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - 1 \right] \right\}^{1/2}} \quad (1.8)$$

对式(1.8)进行数值积分, 即可得出不同 p_∞ 下, 气核半径随时间的变化关系, 如图 1 所示(电算结果见表 1)。

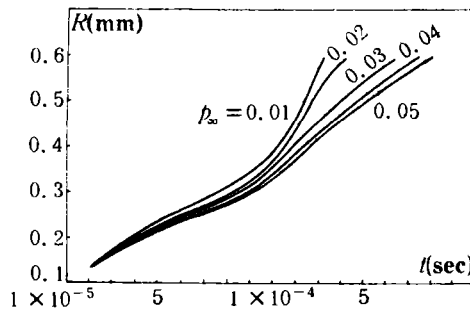


图1 $R=f(t)$ 曲线

二、自由气核的平衡和稳定

由式(1.6)有

$$R \frac{dU}{dt} + \frac{3}{2} U^2 = C_0^2 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{\rho R} - \frac{1}{\rho} (p_\infty - p_v) = f(R, T) \quad (2.1)$$

函数 $f(R, T)$ 相当于促使气核半径变化的力, 当其为正值时 (内压 > 外压) 促使气核增长, 负值时 (内压 < 外压) 促使气核溃灭。

令 $\partial f / \partial R = 0$, 得出在恒定温度下, $f(R, T)$ 极小值所对应的气核半径 R_0 。

$$R_c = \left(\frac{2\sigma}{3\rho C_0^2 R_0^3 \gamma} \right)^{\frac{1}{1-3\gamma}} \quad (2.2)$$

水温 T 和自由气核初始半径 R_0 既定时, R_c 为常值。当 $T=15^\circ\text{C}$, $R_0=10^{-1}\text{mm}$ 时, $R_c=0.5778\text{mm}$ 。

当气核半径 $R > R_c$ 时, 有 $\partial f / \partial R > 0$, 气核处于不稳定状态。

当气核半径 $R < R_c$ 时, 有 $\partial f / \partial R < 0$, 气核处于稳定状态。

可见, 在既定温度下, R_c 值为气核保持稳定状态的最大半径, 称为自由气核的临界半径。在负压场中, 气核将不断发育, 半径逐渐增大, 当其等于或超过临界值 R_c 时便失去稳定。此时, 气核周围的水大量汽化, 气核迅速发育而形成宏观的气泡, 即为空泡。这种现象即为空化现象。

设自由气核由初始半径 R_0 发育为 R_c 所需的时间为 t_{R_c} , 则由图1可以查得 p_∞ 与 t_{R_c} 之间的关系, 如图2所示。

由图2可以看出, 在通常的负压下, 气核由初始半径 $R_0=10^{-1}\text{mm}$ 发育到临界半径 R_c 所需的时间约为 10^{-4} 秒。这个时间的数量级是非常小的, 因而可以说对于一般的绕流物体而言, 空化的形成几乎是瞬时的。即使在高频振荡的压力场中, 也会有足够的时间使气核发育到其临界半径。

当 $f(R, T)=0$ 时, 气核处于平衡状态(内压=外压), 相应的气核半径 R_c 称为平衡半径, 由式(2.1)列出平衡半径所应满足的方程式为

$$C_0^2 \left(\frac{R_0}{R_c} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{\rho R_c} - \frac{1}{\rho} (p_\infty - p_v) = 0 \quad (2.3)$$

当水温及 R_0 为定值时, R_c 的值随 p_∞ 而变化, 其关系如图3所示。

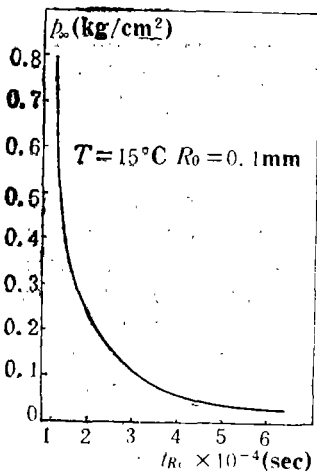


图2 $t_{R_c} \sim p_\infty$ 曲线

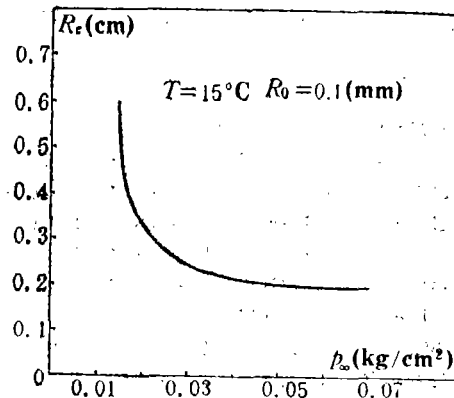


图3 $R_c \sim p_\infty$ 曲线

由图3可见, p_∞ 在一定范围内, 自由气核具有确定的平衡半径。在这个压力范围内, 自由气核将发育到 $R=R_c$ 为止, 而不形成空泡。 p_∞ 在 0.015kg/cm^2 附近有一极限值, 此时曲线斜率趋于无穷大, 表明当 p_∞ 小于此极限值时, 气核不存在平衡状态, 气核将不断发育, 直至 $R=R_c$, 从而形成空泡。

p_∞ 的这个极限值, 可以确定如下:

依前述, 当 $R=R_c$ 时, 函数 $f(R, T)$ 具有最小值。由式(2.3)即有

$$f(R, T)_{\min} = \left[C_0^2 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{\rho R} - \frac{1}{\rho} (p_{\infty} - p_v) \right]_{\min}$$

$$= \left[C_0^2 \left(\frac{R_0}{R_c} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{\rho R_c} - \frac{1}{\rho} (p_{\infty} - p_v) \right] = 0 \quad (2.4)$$

由此得出气核具有平衡状态的最小 p_{∞} 值为

$$p_{\infty \min} = \rho C_0^2 \left(\frac{R_0}{R_c} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R_c} + p_v \quad (2.5)$$

再由式(2.2)解出 $\rho C_0^2 R_0^{3\gamma}$ 代入上式, 最后得

$$p_{\infty \min} = \frac{2\sigma(1-3\gamma)}{3R_c\gamma} + p_v \quad (2.6)$$

当水温 $T=15^\circ\text{C}$, $R_0=10^{-1}\text{mm}$ 时, 由式(2.6)求得 $p_{\infty \min}=0.01542\text{kg/cm}^2$ 。这个值略低于该温度下水的饱和蒸汽压力值。

三、空化起始条件的确定

综上所述, 可以给出产生空化的条件:

- 1) 如果 $p_{\infty} > p_{\infty \min}$, 则不产生空化现象;
- 2) 如果 $p_{\infty} \leq p_{\infty \min}$, 则产生空化现象。

对于水下运动器件而言, p_{∞} 取物体表面的最小压力; 对于振荡压力场, 由于其半周期

表1 自由气核半径随时间的变化关系 ($T=15^\circ\text{C}$, $R_0=10^{-1}\text{mm}$)

| R (mm) | $p_{\infty}=0.01$ (kg/cm ²) | $p_{\infty}=0.02$ (kg/cm ²) | $p_{\infty}=0.03$ (kg/cm ²) | $p_{\infty}=0.04$ (kg/cm ²) | $p_{\infty}=0.05$ (kg/cm ²) | $p_{\infty}=0.1$ (kg/cm ²) | $p_{\infty}=0.2$ (kg/cm ²) | $p_{\infty}=0.3$ (kg/cm ²) |
|-------------|--|--|--|--|--|---|---|---|
| | t (s) | t (s) | t (s) | t (s) | t (s) | t (s) | t (s) | t (s) |
| 0.12 | 1.7136×10^{-5} | 1.7228×10^{-5} | 1.7321×10^{-5} | 1.7416×10^{-5} | 1.7513×10^{-5} | 1.8022×10^{-5} | 1.9192×10^{-5} | 2.0632×10^{-5} |
| 0.14 | 2.1627×10^{-5} | 2.1760×10^{-5} | 2.1895×10^{-5} | 2.2032×10^{-5} | 2.2173×10^{-5} | 2.2922×10^{-5} | 2.4714×10^{-5} | 2.7107×10^{-5} |
| 0.16 | 2.6269×10^{-5} | 2.6460×10^{-5} | 2.6656×10^{-5} | 2.6857×10^{-5} | 2.7064×10^{-5} | 2.8190×10^{-5} | 3.1112×10^{-5} | 3.6057×10^{-5} |
| 0.18 | 3.1333×10^{-5} | 3.1611×10^{-5} | 3.1898×10^{-5} | 3.2196×10^{-5} | 3.2505×10^{-5} | 3.4250×10^{-5} | 3.9570×10^{-5} | 5.7137×10^{-5} |
| 0.20 | 3.6936×10^{-5} | 3.7342×10^{-5} | 3.7766×10^{-5} | 3.8211×10^{-5} | 3.8678×10^{-5} | 4.1465×10^{-5} | 5.4376×10^{-5} | 8.9412×10^{-5} |
| 0.30 | 7.4967×10^{-5} | 7.7393×10^{-5} | 8.0022×10^{-5} | 8.2873×10^{-5} | 8.7314×10^{-5} | 1.5365×10^{-4} | 1.3102×10^{-4} | 1.9033×10^{-4} |
| 0.40 | 1.3217×10^{-4} | 1.4196×10^{-4} | 1.5655×10^{-4} | 1.8570×10^{-4} | 2.8347×10^{-4} | 2.1784×10^{-4} | 1.6450×10^{-4} | 1.2589×10^{-4} |
| 0.50 | 2.0952×10^{-4} | 2.4160×10^{-4} | 3.5985×10^{-4} | 4.2563×10^{-4} | 3.9404×10^{-4} | 2.6720×10^{-4} | 1.9526×10^{-4} | 1.5011×10^{-4} |
| 0.60 | 3.0570×10^{-4} | 3.9839×10^{-4} | 6.0291×10^{-4} | 5.3436×10^{-4} | 4.7566×10^{-4} | 3.1907×10^{-4} | 2.2507×10^{-4} | 1.7385×10^{-4} |

一般远大于 t_{R_c} , 可以不考虑压力的波动, 并有 $p_{\infty} = p_a - p$ 。 p_a 为振荡器处的静水压力; p 为振荡器所产生的压力幅值。

四、凡点说明

讨论中略去了水的可压缩性, 因为它们只有在空泡溃灭的最后阶段才具有明显的作用^[3]。

在空泡发育和溃灭过程中, 水的粘性作用将产生阻尼和消耗一定的能量。由于水的粘性很小, 相对而言, 它对空化起始的影响可以忽略不计^[3]。

本文是针对水介质而言的。但所得基本结论亦可沿用于其它液体。

参 考 文 献

- [1] D·罗斯, 《水下噪声原理》, 《水下噪声原理》翻译组译, 海洋出版社, 北京 (1983)。
- [2] Lamb, H., *Hydrodynamics*, reprint, Dover Publications, Inc., New York (1945)。
- [3] Knapp, R. T., J. W. Daily and F. G. Hammitt, *Cavitation*, McGraw-Hill, New York (1970)。

Conditions for Incipient Cavitation Formation

Huang Jing-chuan

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an)

Abstract

The growth, equilibrium and stabilization of free gas nucleus are analyzed. It is shown that the cavitation results from growth of free gas nucleus to critical radius and conditions of cavitation have been derived.