

# 应力协调迭代法在高速冲击动力 有限元中的应用\*

宋 顺 成

(上海市应用数学和力学研究所; 内蒙古金属材料研究所, 1988年2月12日收到)

## 摘 要

在EPIC<sup>[2][3]</sup>, NONSAP<sup>[4]</sup>等弹塑性冲击动力有限元程序中, 有一个共同的弱点是都采取了静力有限元方法, 把位移函数用线性插值表示, 单元之间应力是非协调的。因此应用虚功原理的基础不合理。

为了克服以上困难, 本文引入一个新的方法, 即协调应力迭代法。实例表明, 这种方法在冲击动力有限元计算中是稳定和精确的, 同时具有减小单元刚度的作用。

## 一、引 言

在EPIC<sup>[2][3]</sup>, NONSAP<sup>[4]</sup>等弹塑性冲击动力有限元程序中, 有一个共同的弱点是都采取了静力有限元方法, 把位移函数用线性插值表示, 单元之间应力是非协调的。因此应用虚功原理的基础不合理。

为了克服以上困难, 本文引入一个新的方法, 即协调应力迭代法。在这个方法中, 我们虽然仍假设位移函数为线性函数, 但是每个步长的计算都重新构造应力场以满足虚功方程的需要。本文的重点是合理地构造这个协调的应力场, 而没有进行严格的数学证明。尽管如此, 我们已经通过多种计算实例证明了这种方法的有效性。实例表明, 这种方法在冲击动力有限元计算中是稳定和精确的, 同时具有减小单元刚度的作用。

## 二、协调应力迭代法

在以往的冲击动力有限元程序中, 位移分量都用线性函数表示。因此单元内的应力为常应力, 单元之间应力是非协调的。这样应用虚功原理的基础不合理。该虚功原理表示为,

$$\int_{\Omega} \rho [\ddot{u}]^T \delta \ddot{u} d\Omega = - \left[ \int_{\Omega} [\delta \bar{\sigma}]^T \bar{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma} [\delta \bar{u}]^T \bar{q} dT \right] \quad (2.1)$$

\* 钱伟长推荐。

本文是由钱伟长教授指导下完成的博士论文的一部分。

其中  $\rho$  是单元密度;  $\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{u}$  分别是应力矢量, 表面力矢量, 加速度矢量;  $\delta\tilde{u}$ ,  $\delta\tilde{\varepsilon}$  分别是虚位移矢量, 虚应变矢量.

本文引入一种新的方法, 即应力协调迭代法以克服上述困难. 其迭代步骤如下.

在冲击动力有限元程序中我们用截面三角形单元处理轴对称问题, 用四面体单元处理三维问题. 其优点在文献[2]中有较详细的论述.

首先我们用线性函数表示  $t$  时刻单元内的位移矢量、速度矢量、加速度矢量和虚位移矢量.

$$\tilde{u}^{(e)t} = \sum_{i=1}^k L_i^{(e)t} \tilde{u}_i^{(e)t} \quad (2.2)$$

$$\tilde{v}^{(e)t} = \sum_{i=1}^k L_i^{(e)t} \tilde{v}_i^{(e)t} \quad (2.3)$$

$$\tilde{a}^{(e)t} = \sum_{i=1}^k L_i^{(e)t} \tilde{a}_i^{(e)t} \quad (2.4)$$

$$\delta\tilde{u}^{(e)t} = \sum_{i=1}^k L_i^{(e)t} \delta\tilde{u}_i^{(e)t} \quad (2.5)$$

其中  $L_i$  在轴对称问题中表示面积坐标, 在三维问题中表示体积坐标,  $k$  是单元结点数. 于是可以求得  $t$  时刻单元内的常应变矢量或常应变率矢量,

$$\tilde{\varepsilon}^{(e)t} = \mathbf{B}^T(\tilde{\nabla}) \tilde{u}^{(e)t} + \tilde{\delta}_i^{c,t} \quad (2.6)$$

$$\tilde{\dot{\varepsilon}}^{(e)t} = \mathbf{B}^T(\tilde{\nabla}) \tilde{v}^{(e)t} + \tilde{\delta}_i^{s,t} \quad (2.7)$$

其中  $\mathbf{B}(\tilde{\nabla})$  是应变算子矩阵;  $\tilde{\delta}_i^{c,t}$ ,  $\tilde{\delta}_i^{s,t}$  是由于单元刚体位移或刚体位移速度引起的应变或应变率修正量.

在轴对称问题中

$$\mathbf{B}(\tilde{\nabla}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{1}{r} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{s_r}^{c,t} &= -\gamma_{rz}^{(e)t} \sin^{-1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z^{(e)t}}{\partial r} - \frac{\partial u_r^{(e)t}}{\partial z} \right) \right] \\ \delta_{s_z}^{c,t} &= \gamma_{rz}^{(e)t} \sin^{-1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z^{(e)t}}{\partial r} - \frac{\partial u_r^{(e)t}}{\partial z} \right) \right] \\ \delta_{\gamma_{rz}}^{c,t} &= 2 \left( \varepsilon_r^{(e)t} - \varepsilon_z^{(e)t} \right) \sin^{-1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z^{(e)t}}{\partial r} - \frac{\partial u_r^{(e)t}}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

在三维问题中

$$\mathbf{B}(\tilde{\nabla}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\epsilon_x}^{e,t} &= \gamma_{xz}^{(e),t} \sin^{-1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x^{(e),t}}{\partial z} - \frac{\partial u_z^{(e),t}}{\partial x} \right) \right] \\ &\quad - \gamma_{xy}^{(e),t} \sin^{-1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y^{(e),t}}{\partial x} - \frac{\partial u_x^{(e),t}}{\partial y} \right) \right] \\ \delta_{\gamma_{xy}}^{e,t} &= 2(\epsilon_x^{(e),t} - \epsilon_y^{(e),t}) \sin^{-1} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y^{(e),t}}{\partial x} - \frac{\partial u_x^{(e),t}}{\partial y} \right) \right) \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

类似 $\delta_i^{e,t}$ 可以计算 $\delta_i^{e,t}$ 分量。

根据(2.6)或(2.7)可以计算 $t$ 时刻单元内的常应力矢量。

在弹性范围内

$$\bar{\sigma}_i^{(e),t} = \mathbf{A} \bar{\epsilon}^{(e),t} - \bar{Q}^{(e),t} \quad (2.12)$$

其中 $\mathbf{A}$ 是弹性常数矩阵， $\bar{Q}^{(e),t}$ 是人工粘性矢量。该人工粘性首先是由 von Naumann 和 Richtmyer<sup>[5]</sup>建议的。

对于轴对称问题

$$\mathbf{A} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$[\bar{Q}^{(e),t}]^T = [Q^{(e),t} \quad Q^{(e),t} \quad Q^{(e),t} \quad 0] \quad (2.14)$$

对于三维问题

$$\mathbf{A} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$[\bar{Q}^{(e),t}]^T = [Q^{(e),t} \quad Q^{(e),t} \quad Q^{(e),t} \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (2.16)$$

人工粘性矢量的非零分量与单元的体积应变率及单元的最小高度有关，

$$\left. \begin{aligned} Q^{(e)t} &= C_L(\rho C_0 h |\dot{\epsilon}_V|)^{(e)t} + C_0^2 [\rho h^2 (\dot{\epsilon}_V)^2]^{(e)t} && \text{当 } \dot{\epsilon}_V^{(e)t} < 0 \\ Q^{(e)t} &= 0 && \text{当 } \dot{\epsilon}_V^{(e)t} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

其中  $C_L$ ,  $C_0^2$  为无量纲系数, 一般取  $C_L=0.5$ ,  $C_0^2=0.4^{[6]}$ .

当材料变形超过弹性极限时, 单元内的应力由 Levy-Mises 理论给出.

$$\bar{\sigma}_c^{(e)t} = \bar{S}^{(e)t} - (\bar{P}^{(e)t} + \bar{Q}^{(e)t}) \quad (2.18)$$

其中  $\bar{S}^{(e)t}$  为单元的塑性偏应力矢量;  $\bar{P}^{(e)t}$  为静水压力矢量, 其分量形式和  $\bar{Q}^{(e)t}$  的分量形式相同, 而非零分量的计算由 Mie-Grüneisen 状态方程确定.

$$\left. \begin{aligned} S_j^{(e)t} &= \frac{2}{3} \left( \frac{\dot{\epsilon}_x^{(e)t}}{\dot{\epsilon}^{(e)t}} \right) \sigma_s^{(e)t} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

其中  $\sigma_s^{(e)t}$  是材料的拉伸强度,  $\dot{\epsilon}^{(e)t}$  是相当应变率.

$$P^{(e)t} = (k_1 \mu + k_2 \mu^2 + k_3 \mu^3)^{(e)t} \left( 1 - \frac{\Gamma_m \mu}{2} \right)^{(e)t} + \Gamma_m \rho^0 E_m^{(e)t} \quad (2.20)$$

其中  $\mu = \rho/\rho_0 - 1 = V_0/V - 1$ ;  $E_m^{(e)t}$  为单元的比内能, 由应力做功求得;  $k_1, k_2, k_3$  是材料常数;  $\Gamma_m$  是 Grüneisen 系数.

(2.12) 或 (2.18) 确定了  $t$  时刻单元内的常应力, 但是这样求得的应力场是非协调应力场. 为了适合虚功方程 (2.1) 所需要的连续条件, 我们以该单元的常应力为基础重新构造单元内的应力.

$$\bar{\sigma}_N^{(e)t} = f(\bar{\sigma}_c^{(e)t}) \quad (2.21)$$

当把 (2.4), (2.5), (2.21) 代入到 (2.1) 并把各单元装配在一起, 可以求得  $t$  时刻单元结点的加速度矢量.

$$\ddot{u}_i^{(e)t} = \frac{\sum_i \bar{F}_i^{(e)t}}{\sum_i M_i^{(e)t}} \quad (2.22)$$

其中  $M_i^{(e)t}$  是对角形单元质量矩阵中对应于结点  $i$  的对角形元素,  $\bar{F}_i^{(e)t}$  是单元中结点  $i$  上的相当力向量.

于是通过积分可以求得  $t + \Delta t$  时刻单元结点的位移速度和结点坐标, 完成一个循环.

$$\dot{u}_i^{(e)t+\Delta t} = \dot{u}_i^{(e)t-} + \ddot{u}_i^{(e)t}(\Delta t) \quad (2.23)$$

$$\bar{u}_i^{(e)t+\Delta t} = \bar{u}_i^{(e)t} + \dot{u}_i^{(e)t}(\Delta t) \quad (2.24)$$

$$\bar{x}_i^{(e)t+\Delta t} = \bar{x}_i^{(e)t_0} + \bar{u}_i^{(e)t+\Delta t} \quad (2.25)$$

其中  $t-$  为上一个步长时刻,  $t+$  为下一个步长时刻,  $\Delta t$  为这两个步长的平均值.

### 三、协调应力的构造及结点力的计算

根据 (2.12) 或 (2.18) 求出单元内的常应力矢量, 于是我们可以定义结点处的应力矢量为相邻单元常应力矢量的加权平均.

$$\bar{\sigma}_i^{(e)t} = \frac{\sum_i \bar{\sigma}_c^{(e)t} V^{(e)t}}{\sum_i V^{(e)t}} \quad (3.1)$$

在此基础上可以重新构造单元内的应力矢量, 即给出(2.21)的确定形式.

$$\bar{\sigma}_N^{(e)t} = \sum_{i=1}^k N_i^{(e)t} \bar{\sigma}_i^{(e)t} \quad (3.2)$$

其中  $N_i^{(e)t}$  为二次函数.

$$N_i^{(e)t} = L_i^{(e)t} + \lambda_0 L_i^{(e)t} \sum_{j=1}^k L_j^{(e)t} \quad (3.3)$$

二次函数  $N_i^{(e)t}$  具有以下性质:

(1) 在结点  $i$  处  $N_i^{(e)t} = 1$ ,  $N_{j \neq i}^{(e)t} = 0$ .

(2) 在  $\Gamma_{\neq i}^{(e)t}$ ,  $N_i^{(e)t} = 0$ , 其中  $\Gamma_{\neq i}^{(e)t}$  是单元不含  $i$  的一个边(面).

(3) 系数  $\lambda_0$  由附加条件确定以满足应力构造的合理性. 本文选择的附加条件是, 在单元的中心处  $\bar{\sigma}_N^{(e)t} = \sigma_c^{(e)t}$ . 于是,

对于轴对称问题,

$$\lambda_0 = \frac{3}{2} \left( \frac{3 \bar{\sigma}_c^{(e)t}}{\sum_{i=1}^k \bar{\sigma}_i^{(e)t}} - 1 \right) \quad (3.4)$$

对于三维问题,

$$\lambda_0 = \frac{4}{3} \left( \frac{4 \bar{\sigma}_c^{(e)t}}{\sum_{i=1}^k \bar{\sigma}_i^{(e)t}} - 1 \right) \quad (3.5)$$

显然由(3.2)构造的应力场为协调应力场, 而且由于附加条件的合理选择能保证下式近似成立.

$$\int_{(e)} \bar{\sigma}_N^{(e)t} d\Omega = \int_{(e)} \bar{\sigma}_c^{(e)t} d\Omega \quad (3.6)$$

将(3.2)及(2.5)代入(2.1)式可以求得单元结点力矢量.

在轴对称问题中

$$[\bar{F}_i^{(e)t}]^T = [f_{r_i}^{(e)t}, f_{z_i}^{(e)t}] \quad (3.7)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} f_{r_i}^{(e)t} = & - \left[ \int_{(e)} \sigma_{rN}^{(e)t} \frac{\partial}{\partial r} L_i d\Omega + \int_{(e)} \tau_{rzN}^{(e)t} \frac{\partial}{\partial z} L_i d\Omega \right] \\ & + \frac{1}{r} \int_{(e)} \sigma_{\theta N}^{(e)t} L_i d\Omega \\ \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

在三维问题中

$$[\bar{F}_i^{(e)t}]^T = [f_{x_i}^{(e)t}, f_{y_i}^{(e)t}, f_{z_i}^{(e)t}] \quad (3.9)$$

其中

$$f_{x_i}^{(e)t} = - \left[ \int_{(e)} \sigma_{x_N}^{(e)t} \frac{\partial}{\partial x} L_i d\Omega + \int_{(e)} \tau_{xy_N}^{(e)t} \frac{\partial}{\partial y} L_i d\Omega + \int_{(e)} \tau_{xz_N}^{(e)t} \frac{\partial}{\partial z} L_i d\Omega \right] \quad (3.10)$$

etc.

#### 四、计算实例

作为计算实例，图 1 表示平头钢弹以 600m/s 速度撞击钛合金板的变形过程，表 1 是应力协调迭代法与传统方法的比较。

计算实例说明，用本文提出的应力协调迭代法进行高速冲击动力有限元分析是稳定和有效的，并且有减小单元刚度的作用。

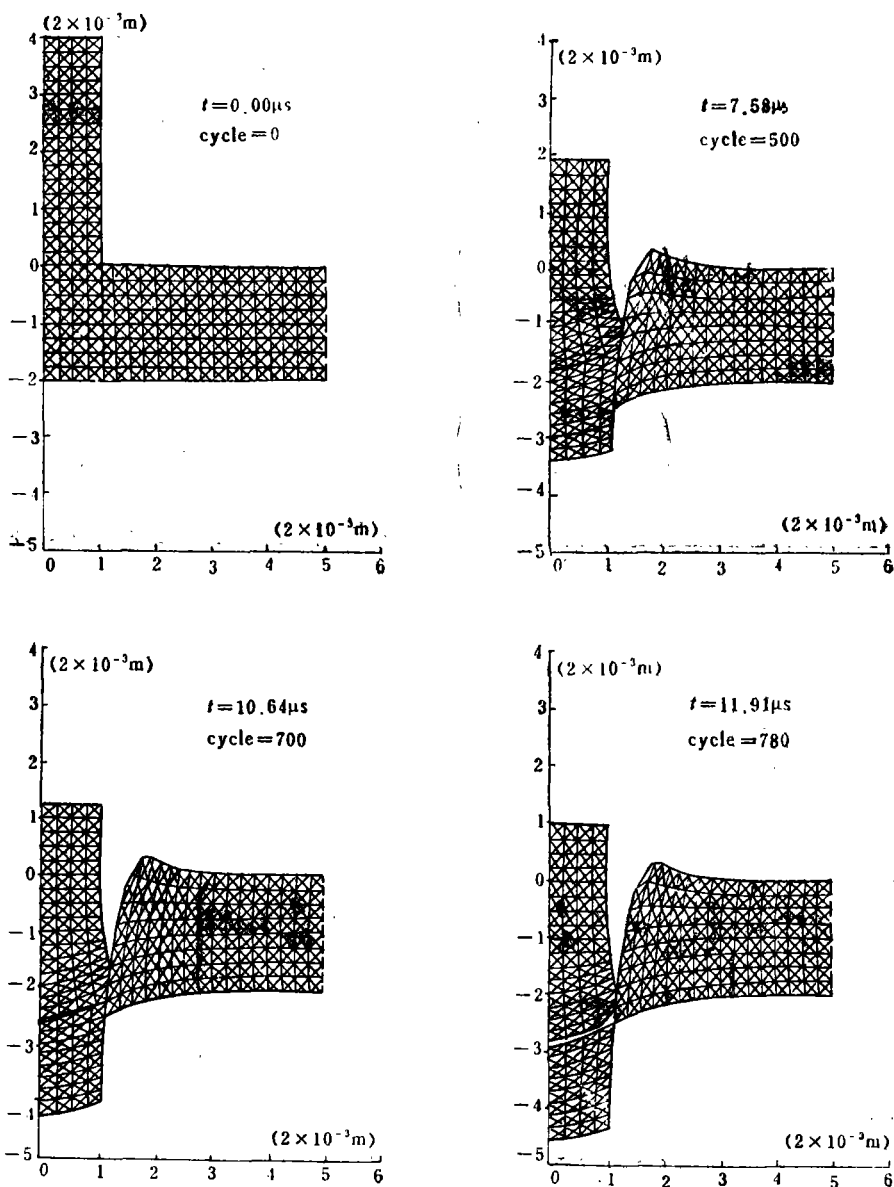


图1 平头钢弹撞击钛合金板变形过程(600m/s)

表1

协调迭代法与传统方法比较

长度单位:  $10^{-4}\text{m}$ 

| 时 间 |        | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_4$ | $t_5$ | $t_6$ | 形成完整冲塞时间 |                    |
|-----|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|--------------------|
| 穿 深 | 600m/s | 传统方法  | 2.84  | 5.98  | 8.98  | 11.70 | 14.10 | 16.30    | 4.17 $\mu\text{s}$ |
|     |        | 协调方法  | 3.00  | 6.14  | 9.23  | 11.98 | 14.32 | 16.48    | 3.23 $\mu\text{s}$ |
|     | 700m/s | 传统方法  | 1.53  | 3.31  | 5.17  | 7.10  | 9.06  | 10.80    | 3.08 $\mu\text{s}$ |
|     |        | 协调方法  | 1.62  | 3.45  | 5.26  | 7.25  | 9.17  | 11.02    | 2.93 $\mu\text{s}$ |

## 参 考 文 献

- [1] 钱伟长, 《穿甲力学》, 国防工业出版社 (1984).
- [2] Johnson, G. R., Analysis of elastic-plastic impact involving severe distortions, *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, **43**, 3 (1976), 98.
- [3] Johnson, G. R., High velocity impact calculations in three dimensions, *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, **44**, 1 (1976), 99.
- [4] Bath, K. J. and E. L. Nilson, NONSAP—A general finite element programme for nonlinear dynamic analysis of complex structure, Paper M3/1, *Proc. 2nd Int. Conf. Struct. Mech. Reactor Technology*, Berlin (1973).
- [5] von Neumann, J. and R. D. Richtmyer, A method for the numerical calculation of hydrodynamics shocks, *Journal of Applied Physics*, **21** (1950).
- [6] Wilkins, M. L., Calculation of elastic-plastic flow, *Method in Computational Physics*, **3**, eds. B. Alden, S. Fernbach and M. Rotenberg, Academic Press, New York (1964), 211—263.

## The Application of Compatible Stress Iterative Method in Dynamic Finite Element Analysis of High Velocity Impact

Song Shun-cheng

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai;  
Inner Mongolia Institute of Metallic Materials, Baotou)

## Abstract

There is a common difficulty in elastic-plastic impact codes such as EPIC<sup>(2,3)</sup>, NONSAP<sup>(4)</sup>, etc. Most of these codes use the simple linear functions usually taken from static problem to represent the displacement components. In such finite element formulation, the stress components are constant in each element and they are discontinuous in any two neighboring elements. Therefore, the bases of using the virtual work principle in such elements are unreliable. In this paper, we introduce a new method, namely, the compatible stress iterative method, to eliminate the above-said difficulty. The calculated examples show that the calculation using the new method in dynamic finite element analysis of high velocity impact is valid and stable, and the element stiffness can be somewhat reduced.