应用数学和力学，第10卷第2期（1989年2月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

方程$\partial^2u/\partial x^1\partial x^1+\partial^2u/\partial x^2\partial x^2=f(u)$的Bäcklund变换*

李沿光

（北京大学力学系，1987年12月7日收到）

摘　要

本文利用Wahlquist-Estabrook过程（WEP）研究了方程$\partial^2u/\partial x^1\partial x^1+\partial^2u/\partial x^2\partial x^2=f(u)$（这里$f$是任意函数）的Bäcklund变换。我们发现该方程存在Bäcklund变换的充分条件是$d^2f/du^2=\lambda f$。我们所得到的结果的一个特殊情况就是Leibbrandt[1,2]的结论。

一、引　言

如果我们考虑定常二维Euler流动问题，那么控制方程如下：

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\tag{1.1}$$

$$v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0\tag{1.3}$$

这里，(x,y)，(v_x,v_y)分别为空间坐标和流体质点的速度，p是压强，ρ是密度。令$v_x=\partial\phi/\partial y$，$v_y=-\partial\phi/\partial x$（$\phi$是Stokes流函数），并消去压强项得：

$$v_x\frac{\partial\Delta\phi}{\partial x}+v_y\frac{\partial\Delta\phi}{\partial y}=0\tag{1.4}$$

这里$\Delta\phi=(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)\phi,-\Delta\phi=\Omega$（涡量）。方程（1.4）的物理意义是涡量仅依赖于$\phi$。相反，若涡量仅依赖于$\phi$，则方程（1.4）成立。因此方程（1.4）等价于

$$\Delta\phi=f(\phi)\tag{1.5}$$

这里$f(\phi)$是ϕ的任意函数。方程（1.5）就是本文所要讨论的方程。方程（1.5）的一个特例，亦即椭圆sine方程$\Delta\phi=\sin\phi$，与通过长Josephson接头的磁流量问题密切相关[1,2]。许多人研究过二维Euler方程解的长期行为[4]。这在地球物理和等离子体方面很有意义[4]。但是

* 钱伟长推荐。

目前这还是一个未解决的问题[4]。

二、Wahlquist-Estabrook过程(WEP)[3]

我们简略叙述一下有关WEP的主要结果，详细的情况可参见[3]。令M，N，N'（$M=\mathbf{R}^m$，$N=\mathbf{R}^N$，$\mathbf{N}'=\mathbf{R}^n$）表示自变量、因变量和新的因变量空间，$J^k(M,N)$表示从M到N映射的k射线；Σ^k表示伴随一个准线性系统$R^{k+1}\subset J^{k+1}(M,N)$的$J^k(M,N)$上的$m$次形式的外微分系统。我们在$J^1(M,N')$上选取坐标$x'^a$，$y'^\mu$和$y'^\mu_a$（$a=1,\cdots,m$；$\mu=1,\cdots,n$）。则$J^1(M,N')$上$m-1$次形式的一组基为$\theta'^\mu\wedge w'_{ab}$，其中

$$\theta'^\mu:=dy'^\mu-y'^\mu_a dx'^a \tag{2.1}$$

且对$a<b=1,2,\cdots,m$；w'_{ab}是$m-2$次形式，定义为：

$$w'_{ab}=\frac{\partial}{\partial x'^b}\rfloor\frac{\partial}{\partial x'^a}\rfloor(dx'^1\wedge\cdots\wedge dx'^m) \tag{2.2}$$

令Ω'表示$J^1(M,N)$上$m-1$次接触形式的模。如果令映射$\psi:J^k(M,N)\underset{M}{\times}J^0(M,N')\to J^1(M,N')$由坐标给出为：

$$x'^a=x^a,\ y'^\mu=y^\mu,\ y'^\mu_a=\psi^\mu_a(x^b,z^A,\cdots,z^A_{a_1\cdots a_k},\ y^\nu) \tag{2.3}$$

这里$x^a(a=1,\cdots,m)$，$z^A,y^\mu(A,\mu=1,\cdots,n)$分别为$M$，$N,N'$上的坐标，$J^k(M,N)\underset{M}{\times}J^0(M,N')$是两个射线束$J^k(M,N)$和$J^0(M,N')$的纤维积；则条件

$$\psi^*d\Omega'\subset\mathscr{I}(\Sigma^k,\psi^*\Omega') \tag{2.4}$$

意味着ψ是R^{k+1}的一个Bäcklund映射，这里ψ^*表示对应于映射ψ的返回映射，d表示外微分，$\mathscr{I}(\Sigma^k,\psi^*\Omega')$表示由$\Sigma^k$和$\psi^*\Omega'$生成的外理想。如果$\psi$是$R^{k+1}$的一个Bäcklund映射，那么$\psi$是一个Bäcklund变换的条件是映射$\psi^r$($\psi$的第$r$次扩展）的映象被包含在一个微分方程组$R^1$中。

三、方程$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^1}+\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial x^2}\right)u=f(u)$的Bäcklund 变换的阐述

我们考虑如下方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^1}+\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial x^2}\right)u=f(u) \tag{3.1}$$

这里x^1,x^2是自变量，u为因变量，f是u的一个任意函数，$M=\mathbf{R}^2$（坐标为x^1,x^2），$N=\mathbf{R}^1$(坐标为u)，$N'=\mathbf{R}'$（坐标为v）。令w表示M上的体积形式，$w=dx^1\wedge dx^2$；θ表示$J^1(M,N)$上的一次接触形式，$\theta=du-u_1dx^1-u_2dx^2$。伴随方程（3.1）的$J^1(M,N)$上的2次形式的外微分系数由

$$\sigma:=du_1\wedge dx^2-du_2\wedge dx^1-fw \tag{3.2}$$

$$\eta_1:=\theta\wedge w_1=du\wedge dx^2-u_1dx^1\wedge dx^2 \tag{3.3}$$

$$\eta_2:=\theta\wedge w_2=du\wedge dx^1+u_2dx^1\wedge dx^2 \tag{3.4}$$

生成。我们寻找方程（3.1）的如下形式Bäcklund映射

$$x'^i=x^i\quad(i=1,2),\ v'=v,\ v'_a=\psi_a(u,u_1,u_2,v)\qquad(a=1,2) \tag{3.5}$$

$J^1(M,N')$上一次形式（接触形式）的一组基为

$$\theta'\wedge w_{12}=dv-\psi_1dx^1-\psi_2dx^2\qquad（已经由\psi^*推回） \tag{3.6}$$

则方程（2.4）要求

$$d\psi_1\wedge dx^1+d\psi_2\wedge dx^2=f_1\eta_1+f_2\eta_2+g\sigma+\xi\wedge\zeta \tag{3.7}$$

这里，f_1，f_2，g是$J^1(M,N)\underset{M}{\times}J^0(M,N')$上的任意函数，$\zeta=dv-\psi_1dx^1-\psi_2dx^2$；$\xi$是$J^1(M,N)\underset{M}{\times}J^0(M,N')$上的一次形式。注意到

$$\frac{\partial\psi_a}{\partial v}dv=\frac{\partial\psi_a}{\partial v}\zeta+\psi_1\frac{\partial\psi_a}{\partial v}dx^1+\psi_2\frac{\partial\psi_a}{\partial v}dx^2\qquad(a=1,2)$$

则由方程（3.7）得：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\psi_1}{\partial u}=f_2,\quad\frac{\partial\psi_1}{\partial u_1}=0,\ \frac{\partial\psi_2}{\partial u}=f_1,\ \frac{\partial\psi_2}{\partial u_2}=0\\&\frac{\partial\psi_1}{\partial u_2}=-g=-\frac{\partial\psi_2}{\partial u_1}\\&\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial v}-\psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial v}=-f_1u_1+f_2u_2-gf\end{aligned}\right\}\tag{3.8a$\sim$f}$$

$(\partial/\partial u_1)$(3.8e)且$(\partial/\partial u_2)$(3.8e)得$g=g(u,v)$，则由(3.8b，d，e)得

$$\psi_1=-g(u,v)u_2+h_1(u,v)\tag{3.9}$$

$$\psi_2=g(u,v)u_1+h_2(u,v)\tag{3.10}$$

将(3.9)，(3.10)代入（3.8）得

$$\frac{\partial g}{\partial u}=0\tag{3.11}$$

$$h_1\frac{\partial g}{\partial v}-g\frac{\partial h_2}{\partial v}+\frac{\partial h_2}{\partial u}=0\tag{3.12}$$

$$h_2\frac{\partial g}{\partial v}-g\frac{\partial h_1}{\partial v}-\frac{\partial h_1}{\partial u}=0\tag{3.13}$$

$$h_1\frac{\partial h_2}{\partial v}-h_2\frac{\partial h_1}{\partial v}+fg=0\tag{3.14}$$

亦即

$$g=g(v)\tag{3.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2}{g}\right)=\frac{\partial}{\partial v^*}\left(\frac{h_1}{g}\right)\tag{3.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_1}{g}\right)=-\frac{\partial}{\partial v^*}\left(\frac{h_2}{g}\right)\tag{3.17}$$

$$f=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\frac{h_1}{g}\right)^2+\left(\frac{h_2}{g}\right)^2\right]\tag{3.18}$$

这里，$dv^*=dv/g$

可以验证，如果条件(3.15)～(3.18)成立，则方程

$$u_{11}+u_{22}=f(u)\tag{3.19}$$

被变成

$$v_{11}+v_{22}-\frac{g'}{g}[v_1^2+v_2^2-(h_1^2+h_2^2)]-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}(h_1^2+h_2^2)=0\tag{3.20}$$

此时Bäcklund变成为

$$\psi_1=-g(v)u_2+h_1(u,v)\tag{3.21}$$

$$\psi_2=g(v)u_1+h_2(u,v) \tag{3.22}$$

以下我们要求$(\partial/\partial v)[(h_1^2+h_2^2)/g^2]=M^*(v)$，$M^*$是一个任意函数；为了使方程(3.20)仅与一个因变量有关。因此

$$h_1^2+h_2^2=g^2(M(v)+N(u)),\quad M(v)=\int M^*(v)dv \tag{3.23}$$

这里N是一个任意函数。由（3.18）得：

$$f=\frac{1}{2}N' \tag{3.24}$$

因此

$$N=2\int f du \tag{3.25}$$

由(3.14),(3.23) 得：$\theta=\tan^{-1}\dfrac{h_2}{h_1}=-f\displaystyle\int\frac{g}{r^2}dv+S(u)$　　(3.26)

这里$r^2=h_1^2+h_2^2$，S是u的任意函数。

如果$g[M''(M+N)-M'^2]+[N''(M+N)-N'^2]=0$　　(3.27)

则$h_1=r\cos\theta$，$h_2=r\sin\theta$满足(3.12)～(3.14)。由（3.27）得：

$$N''=\lambda N+\eta_1 \tag{3.28}$$

$$gM''=-\lambda M+\eta_2 \tag{3.29}$$

这里λ，η_1,η_2是常数。因此f满足

$$f''=\lambda f \tag{3.30}$$

相反，如果f满足(3.30)，则我们可以选择g，M使得（3.27）成立。注意到我们仅寻找平移不变性Bäcklund映射(3.5)，因此条件（3.30）是方程（3.1）存在Bäcklund 变换的充分

表 1　　对应于（3.30）的各种解的 Bäcklund 变换

f	u的定义方程	Bäcklund　变换	v的定义方程
1. $\omega^2 u$ （ω是实数）	$u_{11}+u_{22}=\omega^2 u$	$v_1=-u_2+\omega\sqrt{u^2+v^2}\cos\left\{\theta+\tan^{-1}\frac{u}{v}\right\}$ $v_2=u_1+\omega\sqrt{u^2+v^2}\sin\left\{\theta+\tan^{-1}\frac{u}{v}\right\}$ θ是一个 Bäcklund 参数	$v_{11}+v_{22}=\omega^2 v$
2. $\omega\alpha^2(1+\gamma^2)(e^{2\omega u}-\beta^2 e^{-2\omega u})$，$\omega,\alpha,\gamma,\beta$都是常数.	$u_{11}+u_{22}=\omega\alpha^2(1+\gamma^2)\cdot(e^{2\omega u}-\beta^2 e^{-2\omega u})$	$v_1=-u_2+\alpha(e^{\omega u}+\beta e^{-\omega u})(\cos\omega v+\gamma\sin\omega v)$ $v_2=u_1-\alpha(e^{\omega u}-\beta e^{-\omega u})(\sin\omega v-\gamma\cos\omega v)$	$v_{11}+v_{22}=2\omega\alpha^2\beta[\gamma^2-1)\sin 2\omega v+2\gamma\cos 2\omega v]$
3. 2的特殊情况 $\beta=0$	$u_{11}+u_{22}=ke^{2\omega u}$ $k=\omega\alpha^2(1+\gamma^2)$ 椭圆 Liouville 方程	$v_1=-u_2+\alpha e^{\omega u}(\cos\omega v+\gamma\sin\omega v)$ $v_2=u_1-\alpha e^{\omega u}(\sin\omega v-\gamma\cos\omega v)$	$v_{11}+v_{22}=0$ Laplace方程
4. 2的特殊情况 $\omega=1/2$，$\beta=-1$，$\gamma=0$，$\alpha=1$. Leibbrandt's 情形[1,2]	$u_{11}+u_{22}=\sinh u$	$v_1=-u_2+2\sinh(u/2)\cos(v/2)$ $v_2=u_1-2\cosh(u/2)\sin(v/2)$	$v_{11}+v_{22}=\sin v$
5. 2的特殊情况 $\omega=1/2$，$\gamma=0$，$\alpha=\beta=1$. $f=\sinh u$	$u_{11}+u_{22}=\sinh u$	$v_1=-u_2+2\cosh(u/2)\cos(v/2)$ $v_2=u_1-2\sinh(u/2)\sin(v/2)$	$v_{11}+v_{22}=-\sin v$

条件。对应于（3.30）的各种Bäcklund变换在表1中列出，

参 考 文 献

[1] Leibbrandt, G., Exact solutions of the elliptic sine equation in two space dimensions with applications to the Josephson effect, *Phys. Rev.*, **B15** (1977), 3353—3361.

[2] Leibbrandt, G., Soliton-like solutions of the elliptic sine-cosine equation by means of harmonic functions, *J. Math. Phys.*, **19** (1978), 960—966.

[3] Rogers, C. and W. F. Shadwick, *Bäcklund Transformations and Their Applications*, Academic Press (1982).

[4] Segur, H., Some open problems, *Physica*, **18D** (1986), 1—12.

Bäcklund Transformations for the Equation $\partial^2u/\partial x^1\partial x^1+\partial^2u/\partial x^2\partial x^2=f(u)$

Li Yan-guang

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

Bäcklund transformations for the equation $\partial^2u/\partial x^1\partial x^1+\partial^2u/\partial x^2\partial x^2=f(u)$ (here f is an arbitrary function) is studied in this paper, using the procedure of Wahlquist and Estabrook (WEP). We conclude that the condition $d^2f/du^2=\lambda f$ is sufficient for the existence of Bäcklund transformations for the equation of our interest. A special case of our results leads to the conclusion of Leibbrandt[1,2].