

浅水方程初边值问题几种新的差分格式及其数值试验*

吕秋强 周 钢 刘应中

(上海交通大学, 1986年11月8日收到)

摘 要

本文提出几种有限差分法求解绝对坐标系中浅水方程的新方法; 对五个对角线矩阵也提出了效率高而且简单的两级迭代计算的有效方法. 这种迭代法可以用来处理浅水方法的多格计算. 最后我们研究了初始边界值问题. 通过数值试验证明, 线性正弦波会逐步变为非线性的圆锥型波.

一、引 言

自1965年Zabusky和Kruskal数值发现Soliton的‘recurrence’现象以来, 许多人进行了K.d.V.方程, 即:

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

的研究, 并出版了大量关于方程(1.1)的文献, 诸如Jeffrey和Kakutani(1972), Scott, Chu和Mclaughlin(1973); Whitham(1974), Lax(1976) Miura(1976), Strauss(1978), Makhankov(1980) Greig和Morris(1976) (见参考文献[7]). 但是关于方程(1.1)的初边值问题, 只有Chu, Xiang和Baransky(1983)等人为数不多的工作. 另外, 我们知道方程(1.1)是在具有速度 c 的动坐标系中推导的 (c : 浅水中波的传播速度 $= \sqrt{gh}$, h : 静水深, g : 重力加速度). 几年以一些理论和实验结果发现: 在浅水中, 线性正弦波在水池中非线性演化 ([5], [6]), 为了数值模拟上述现象, 我们对下面建立在绝对坐标系中的浅水方程进行数值处理

$$u_t + \left(1 + \frac{3\varepsilon}{2} u\right) u_x + \frac{\mu^2}{6} u_{xxx} = 0 \quad (1.2)$$

这里 $\varepsilon = a/h$, $\mu^2 = kh$. a : 特征波高, h : 静水深, k : 特征波数.

二、数值处理方法

为了数值模拟(1.2), 我们构造了下列一些格式:

$$\text{格式(1)} \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \left(1 + \frac{3\varepsilon(u_i^{n+1} + u_i^{n-1})}{4}\right) (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) \frac{\Delta t}{2\Delta x}$$

* 戴世强推荐.

$$-\mu^2(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2u_{i+1}^{n+1} + 2u_{i-1}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1})\Delta t/12\Delta x^3$$

这里 $n+i$ 是奇数 $r=0$, $n+i$ 是偶数 $r=1$, 这本质上就是 Hopscotch 技巧, 这个格式中需求解一个三对角矩阵, 单个孤立波传播的数值模拟结果表明: 较大时间、空间步长, 结果不理想(如 $\Delta t=0.0025$, $\Delta x=0.5$, 2.5秒后孤立波波高的数值结果与方程(1.2)的理论解波高相差10%), 而对小步长 Δt , Δx 则需花费较多的CPU时间。

为了克服格式(1)对时间、空间步长的限制, 建立

$$\text{格式(2) 第一步 } u_i^{n+1} = u_i^n - \left(1 + \frac{3e(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1})}{4}\right) (u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}) \frac{\Delta t_1}{2\Delta x}$$

$$-\mu^2(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2u_{i+1}^{n+1} + 2u_{i-1}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}) \frac{\Delta t_1}{12\Delta x^3}$$

$$\text{第二步 } u_i^{n+2} = u_i^{n+1} - \left(1 + 3e \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{4}\right) (u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}) \frac{\Delta t_2}{2\Delta x}$$

$$-\mu^2(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+2} - 2u_{i+1}^{n+2} + 2u_{i-1}^{n+2} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+2}) \frac{\Delta t_2}{12\Delta x^3}$$

第一步中, $n+i$ 偶数 $r=1$, $n+i$ 奇数 $r=0$ 。第二步为一半隐格式。一般 $\Delta t_1 \neq \Delta t_2$, 这个格式的主要思想就是通过调节 $\Delta t_1/\Delta t_2$ 来获得高精度结果。

可以看出: 格式(2)的第二步需求解下述方程组:

$$Au = (I + \beta_a B)u = b \quad (2.1)$$

$$\beta_a = \mu^2 \Delta t_2 / 12\Delta x^3$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & & & \\ & 2 & 0 & -2 & & \\ -1 & & 2 & 0 & -2 & 1 \\ & & & \dots & & \\ & & & & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

方程(2.1)的求解, 有下列紧凑形式, 推导见[10]。

设 $A=LR$ 为三角分解, r_{ij}, l_{ij} 分别为 RL 的元素, 有

$$\left. \begin{aligned} &\text{对于 } i=1, 2, \dots, n \\ &r_{ii} = a_i, \quad r_{i, i+1} = b_i, \quad r_{i, i+2} = \beta_a \\ &l_{ii} = 1, \quad l_{i, i-1} = c_{i-1}/a_{i-1} \\ &l_{i+1, i-1} = -\beta_a/a_{i-1} \\ &\text{这里} \\ &a_1 = 1, \quad b_1 = -2\beta_a, \\ &c_1 = 2\beta_a, \quad a_2 = 1 + 4\beta_a^2 \\ &a_{i+1} = 1 + \beta_a^2/a_{i-1} - b_i c_i/a_i \\ &b_{i+1} = -2\beta_a - \beta_a c_i/a_i \\ &c_{i+1} = 2\beta_a + \beta_a b_i/a_i \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

格式(3):

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \left(1 + 3e \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{4}\right) (u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}) \Delta t / 2\Delta x$$

$$-\mu^2(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2u_{i+1}^{n+1} + 2u_{i-1}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}) \Delta t / 12\Delta x^3$$

$$\left. \begin{aligned} u_i^* &= u_i^n - \frac{(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \Delta t}{2\Delta x} - 3e \frac{(u_R^n u_R - u_L^n u_L) \Delta t}{2\Delta x} \\ &\quad - \frac{\mu^2 (u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n) \Delta t}{12\Delta x^2} \\ u_{i+1}^* &= u_{i+1}^n - \frac{(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) \Delta t}{2\Delta x} - 3e \frac{(u_R^n u_R - u_L^n u_L) \Delta t}{2\Delta x} \\ &\quad - \frac{\mu^2 (u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n) \Delta t}{12\Delta x^2} \end{aligned} \right\}$$

这里: $u_R^{(*)} = (u_{i+1}^{(*)} + u_i^{(*)})/2$; $u_L^{(*)} = (u_i^{(*)} + u_{i-1}^{(*)})/2$
 $u_R^{(*)} = u_i^{(*)}$, 当 $u_R^{(*)} > 0$; $u_R^{(*)} = u_{i+1}^{(*)}$, 当 $u_R^{(*)} < 0$
 $u_L^{(*)} = u_{i-1}^{(*)}$, 当 $u_L^{(*)} > 0$; $u_L^{(*)} = u_i^{(*)}$, 当 $u_L^{(*)} < 0$

第一步中, 取不带“*”者; 第二步取带“*”者。为了检验诸格式, 取方程(1.2)的孤立波理论解:

$$u = \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2e}}{2\mu} (x + x_0 - t) \quad (t=0)$$

作为初始条件, 如果格式精度足够高的话, 那么在一定时刻后, 孤立波波形应保持不变, 计算结果表明:

(1) 取较小时间、空间步长时, 格式(1), (2), (3), (4) (i, ii, iii), (5) 具有相同的结果, 计算结果与理论结果的最大误差不超过1/500, 结果绘于图2。

(2) 当 $\Delta t, \Delta x$ 较大时, 格式(3) 具有较高的精度, 计算波高与理论波高的误差不超过1%, 而其余格式的误差达10%, 格式(3)的结果绘于图1。

(3) 格式(2)通过调节 $\Delta t_1/\Delta t_2$, 也可以在 $\Delta t, \Delta x$ 较大时得到好的结果, 结果仍绘于图1。

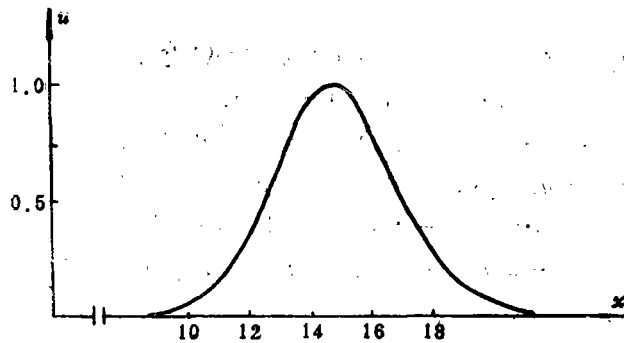


图1 $t=2.5$ 时, 自由表面升高的空间分布
 $\Delta t=0.025, \Delta x=0.5, e=0.5, \mu^2=0.5$

(4) 格式(4) (i, ii, iii), (5) 与格式(1) 具有相同的精度, 但是均为显式格式, 计算速度则较(1) 快得多, 这表明: 通过相同差分算子的两步校正可以得到精度较高的格式, 甚至一步不稳定的情况, 也可以由这种方法提高其精度 (如格式4(iii)),

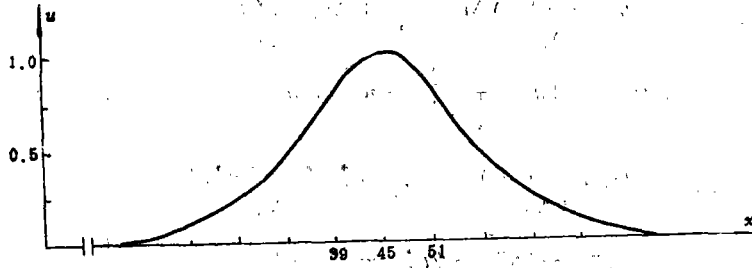


图2 $t=2$ 时, 自由表面升高的空间分布
 $\Delta t=0.0002, \Delta x=0.04, \varepsilon=0.1, \mu^2=0.04$

三、K.d.V-Burgers方程计算

为了表明上节两步相同差分算子预估-校正方法的有效性, 对K. d. V-Burgers方程

$$u_t + 2uu_x + \mu u_{xxx} - \nu u_{xx} = 0 \quad (\mu > 0, \nu > 0)$$

构造格式(1)和(2).

格式(1)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^n = u_i^{n-1} - \frac{(u_{i+1}^{n-1} u_{i+1}^{n-1} - u_{i-1}^{n-1} u_{i-1}^{n-1}) \Delta t}{2\Delta x} + \nu \frac{(u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}) \Delta t}{\Delta x^2} \\ \quad - \mu \frac{(u_{i+2}^{n-1} - 2u_{i+1}^{n-1} + 2u_{i-1}^{n-1} - u_{i-2}^{n-1}) \Delta t}{2\Delta x^3} \\ u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{(u_{i+1}^n u_{i+1}^n - u_{i-1}^n u_{i-1}^n) \Delta t}{2\Delta x} + \nu \frac{(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \Delta t}{\Delta x^2} \\ \quad - \mu \frac{(u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n) \Delta t}{2\Delta x^3} \end{array} \right.$$

格式(2)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{n+1} = u_i^n - (u_{i+1}^n u_{i+1}^n - u_{i-1}^n u_{i-1}^n) \Delta t_1 / 2\Delta x \\ \quad + \nu (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \Delta t_1 / \Delta x^2 \\ \quad - \mu (u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n) \Delta t_1 / 2\Delta x^3 \\ u_i^{n+2} = u_i^{n+1} - (u_{i+1}^{n+1} u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} u_{i-1}^{n+1}) \Delta t_2 / 2\Delta x \\ \quad + \nu (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) \Delta t_2 / \Delta x^2 \\ \quad - \mu (u_{i+2}^{n+1} - 2u_{i+1}^{n+1} + 2u_{i-1}^{n+1} - u_{i-2}^{n+1}) \Delta t_2 / 2\Delta x^3 \end{array} \right.$$

$n+i$ 奇数 $r=0$, $n+i$ 偶数, $r=1$.

在计算中, 取与[4]相同时脉冲为初始条件, 即:

$$u = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 10) \\ 1.2 & (10 \leq x < 20) \\ 0 & (x > 20) \end{cases}$$

为简便起见, 取

$$u_0^{n+1} = u_1^{n+1} = 1, \quad u_N^{n+1} = u_{N-1}^{n+1} = 0$$

本文计算了三种情况

(1) $\nu=0.22, \mu=0.002$, 此时 $4\mu < \nu^2$;

(2) $\nu=0.008, \mu=0.64, 4\mu > \nu^2$;

(3) $\nu=0.22, \mu=0.02, 4\mu > \nu^2$.

计算结果

表1 波高随 $s=x-t$ 的变化 ($\mu=1, \nu=6$)

s	Rf[4]	格式(1)	s	Rf[4]	格式(1)
-30.63	0.994	0.998	-4.63	0.689	0.702
-26.63	0.989	0.997	-2.63	0.618	0.617
-22.63	0.979	0.998	-0.63	0.532	0.526
-18.63	0.960	0.976	3.37	0.369	0.268
-14.63	0.924	0.944	5.37	0.296	0.202
-10.63	0.860	0.882	7.37	0.232	0.1484
-6.63	0.757	0.776			

表中Rf[4]表示参考文献[4]中的结果, 格式(i)表示本文格式(i)的计算结果.

本文利用格式(2)计算了 $\nu=0.01, \mu=0.001$ 时的流场, 并把计算结果与[4]中 K. d. V-Burgers 方程的一阶渐近解进行了比较.

一阶渐近解

$$u(s) = 1 / (1 + \exp(s/\nu))$$

$$s = x - t$$

表2 波高随 s 的变化 ($\nu=0.1, \mu=0.001$)

$s \times 10$	Rf[4]	格式(2)	$s \times 10$	Rf[4]	格式(2)
-3.705	0.976	0.988	0.616	0.351	0.366
-2.389	0.916	0.935	1.614	0.166	0.184
-1.386	0.800	0.800	2.615	0.068	0.0863
-0.389	0.596	0.584			

表2中Rf[4]表示K. d. V-Burgers方程的一阶渐近解的结果.

由格式(1), 格式(2)的计算结果可以看出:

(1) 情况1, 存在一个单调的稳定激波解;

(2) 情况2, 对于初始脉冲, 形成振荡解, 这与参考文献[4]的结果是相同的, 见图4;

(3) 情况3, 尽管 $4\mu > \nu^2$, 计算结果表明: 初始脉冲仍可演化为一稳定激波解, 见图3, 这与文献[4]有所不同;

(4) 从表1, 表2. 可以看出: 本文的差分格式具有较好的精度.

由 K. d. V-Burgers 上述两格式的结果可知: 通过两步相同差分算子的预估-校正可以获得精度较高的格式, 而格式是显式的, 从而提高运算速度.

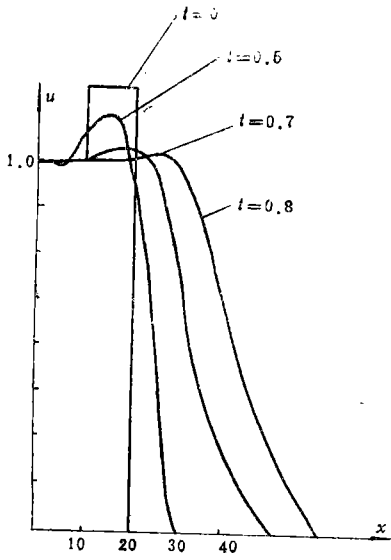


图3 扰动波高分布
 $\mu=0.02, \nu=0.22$

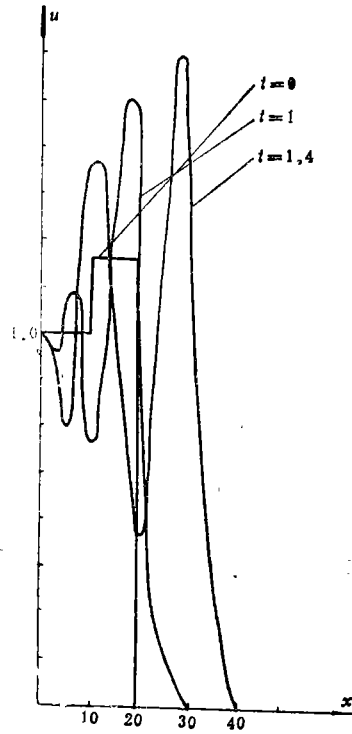


图4 扰动波高分布
 $\mu=0.04, \nu=0.008$

四、正弦波的非线性演化数值模拟

考虑如下问题:

$$\begin{cases} u_t + (1 + 3\epsilon u/2)u_x + \mu^2 u_{xxx}/6 = 0 & (4.1a) \\ u|_{x=0} = f(t) = -A \sin t & (4.1b) \\ u_t + u_x = 0 \quad (x \rightarrow \infty) & (4.1c) \end{cases}$$

用第二节中格式(1), (2)对上述问题进行了数值模拟, 由于格式(1), (2)均为五点格式, 对于 $x=0$ 处边界进行如下处理: 由于在浅水中, 波传播速度为 $c = \sqrt{1 + \epsilon}$, 当 ϵ 较小时, $c \approx 1$. 这样, 可以把扰动 $f(t) = -A \sin t$ 看作以 $c \approx 1$ 移动, 定义函数: $f_1(x, t) = -A \sin(x - t)$ 据此, 由 f_1 , 可以确定 $i=0, i=1$ 处 u 值.

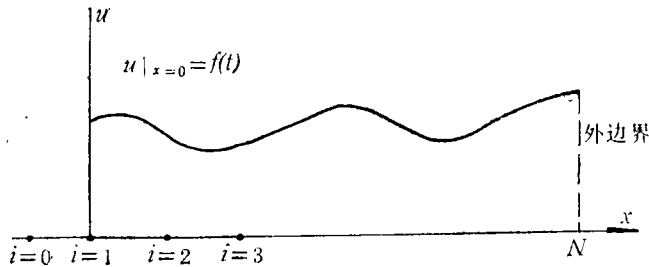


图 5

在流场外边界处, 进行如下离散:

$$\frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\Delta t} + \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{\Delta x} = 0$$

本文对下列诸情况进行了数值模拟:

- (1) $\varepsilon=0.3, \mu^2=0.1, A=0.1, \Delta t=0.01, \Delta x=0.4$
- (2) $\varepsilon=0.3, \mu^2=0.3, A=1.0, \Delta t=0.01, \Delta x=0.4$
- (3) $\varepsilon=0.3, \mu^2=0.3, A=2.0, \Delta t=0.01, \Delta x=0.4$
- (4) $\varepsilon=0.13, \mu^2=0.2, A=1.0, \Delta t=0.008, \Delta x=0.4$.

计算结果如下:

图 6 为情况(1)中, $t=40$ 波高的空间分布

图 7 为情况(2)中, $t=40$ 波高的空间分布

图 8 为情况(3)中, $t=40$ 波高的空间分布

图 9、10、11 为情况(4)中, $x=0.8, x=1.2, x=2.0$ 处波高随时间的变化。

计算结果表明: 在浅水中, 线性正弦波将通过一系列的正弦波扭曲(图 9、10) 逐渐变为椭圆余弦波, 但是并没有发现[6]中明显的二次谐波现象。

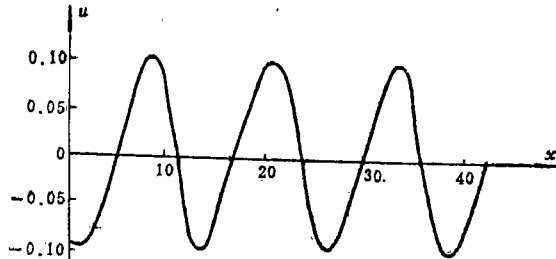


图 6 $t=40$ 时, $f(t) = -0.1 \sin t$ 情况, 波高的空间分布 ($\varepsilon=0.3, \mu^2=0.3$)

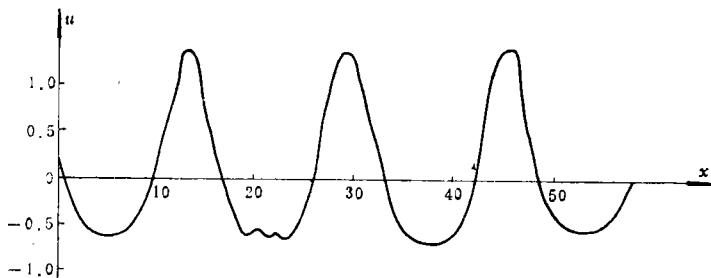


图 7 $t=40$, $f(t) = -\sin t$ 时, 流场波高的空间分布 ($\varepsilon=0.3, \mu^2=0.3$)

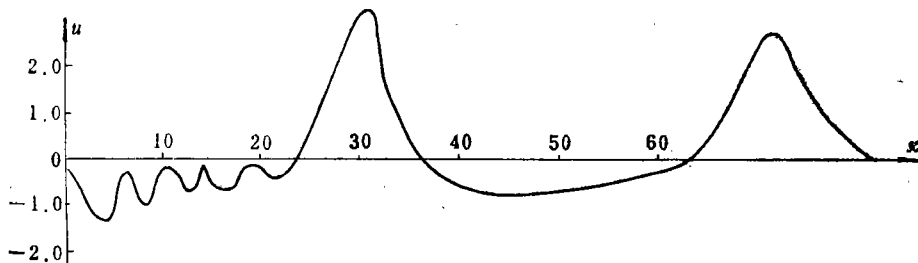


图 8 $t=40$, $f(t) = -2 \sin t$ 时, 流场波高的空间分布 ($\varepsilon=0.3, \mu^2=0.3$)

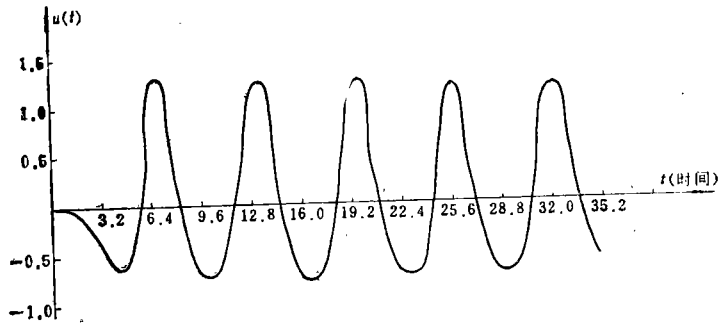


图9 $x=0.8$ 处, 自由面升高的时间历程
 $f(t) = -\sin t$, $\varepsilon=0.13$, $\mu^2=0.2$

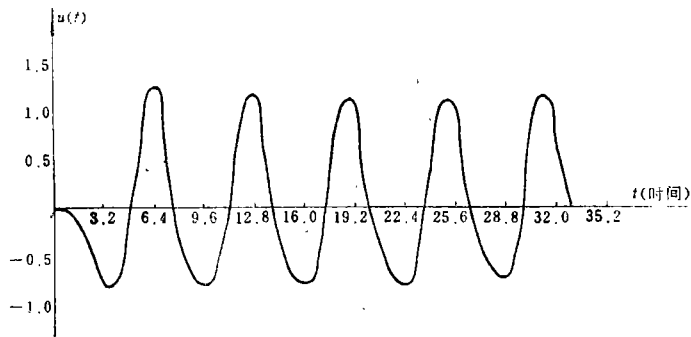


图10 $x=1.2$ 处, 波面升高的时间历程
 $f(t) = -\sin t$, $\varepsilon=0.13$, $\mu^2=0.2$

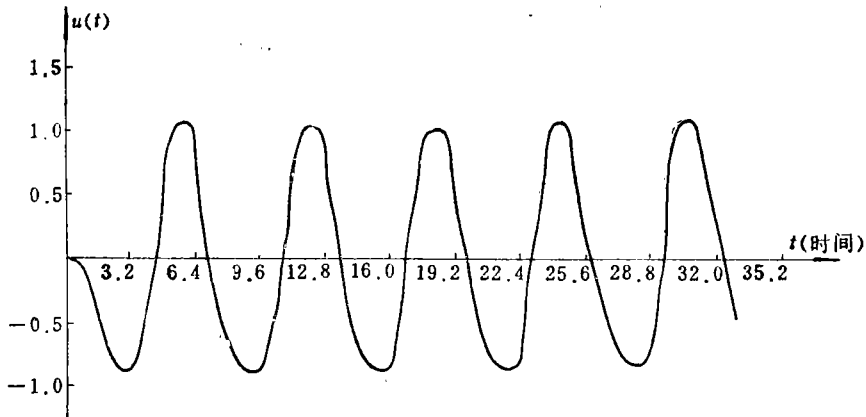


图11 $x=2.0$ 处, 波面升高的时间历程
 $f(t) = -\sin t$, $\varepsilon=0.13$, $\mu^2=0.2$

参 考 文 献

- [1] Chu, C. K., L. W. Xiang and Y. Baransky, Solitary waves induced by boundary motion, *Comm. Pure and Appl. Maths.*, (1983).
- [2] Zabusky, N. J. and M. D. Kruskal, Interaction of soliton in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.*, 15 (1965), 240—243.

- [3] Greig, I. S. and J. L. Morris, A hopscotch method for the Kortewey-de Vries equation, *J. Comp. Phys.*, 20 (1976), 64—80.
- [4] Canosa, J. and J. Gazdag, The Kortewey-de Vries-Burgers equation, *J. Comp. Phys.*, 123 (1977), 393—403.
- [5] Mei, C. C., *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, New York, Willy (1983).
- [6] Funke, E. E., Laboratory research in support of coastal and offshore engineering, *Proc. Offshore China* (1985).
- [7] Kuo Pen-yu, A survey of numerical method for solitary waves (I), *Journal of Mathematical Research and Exposition*, 5, 2, April (1985). (in Chinese)
- [8] Hackbusch, W., *Lecture Notes on Multi-Grid Method*, Xi'an Summer School, China (1985).
- [9] Roache, P. J., *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque (1972).
- [10] 周钢, K.d. V. 方程的几种差分近似, 上海科技大学情报室.

Several New Types of Finite-Difference Schemes for Shallow-Water Equation with Initial-Boundary Value and Their Numerical Experiment

Lü Qiou-qiang Zhou Gang Liu Ying-zhong
(Shanghai Jiaotong University, Shanghai)

Abstract

This paper proposed several new types of finite-difference methods for the shallow water equation in absolute coordinate system and put forward an effective two-step updated method, a compact and iterative algorithm for five diagonal matrixes. Then the iterative method was used for a multi-grid procedure for shallow water equation. At last an initial-boundary value problem was considered and the numerical experiment demonstrated that the linear sinusoidal wave would successively evolve non-linearly into conoidal wave.