

# 经过修正的层次流流动的流动稳定性问题 (II)——经过修正的平行剪切流的 线性稳定性研究\*

周哲玮

(上海市应用数学和力学研究所, 1987年12月4日收到)

## 摘 要

本文根据文[1]给出的经过修正的层流流动的流动稳定性理论及平行剪切流中平均速度的一类修正剖面, 研究了平行剪切流的线性稳定性性质, 对于平面Couette流动和圆管Poiseuille流动, 首次得到了二维扰动和轴对称扰动也能造成失稳的结果, 并给出了这两种流动在某种定义下的中性曲线。

我们现在研究的层流流动是一种复合的流动, 其速度剖面为

$$u = \bar{u} + \delta u_1 \quad (\text{A})$$

其中  $\bar{u}$  为基本的层流流动,  $u_1$  即为文[1]中给出的修正速度剖面。其中  $\delta$  是一小参数, 因为  $|u_{1\max}| = 1$ , 所以  $\delta$  表明了修正速度剖面对基本层流流动的修正程度。将(A)式代入文[1]中的(3.10)式, 可知我们得到的线性流动稳定性方程是系数显含时间  $t$  的偏微分方程, 其求解将十分困难。我们首先略去时间因子  $\exp[\mu t]$  或  $\exp[-\eta t]$ , 按照一般的流动稳定性问题求解, 在分析结果时, 再考虑略去时间因子所包含的物理意义。

在求解线性流动稳定性问题时, 我们都采用契贝谢夫多项式展开, Tau法形成矩阵特征值问题, 用QR算法求解<sup>[2]</sup>。

## 一、经过修正的圆管Poiseuille流动对于轴对称扰动的线性稳定性研究

对于轴对称圆管Poiseuille流动, 设扰动流函数为

$$\psi' = \phi(r) \exp[i\alpha(x - Ct)] + C.C. \quad (1.1)$$

其中  $\alpha$  为实数,  $C = c_r + ic_i$ , C.C. 为第一项的复共扼。

可得到关于  $\phi$  的方程

\* 钱伟长推荐。

$$\begin{aligned}
 & (u-C)\left(\phi'' - \frac{1}{r}\phi' - \alpha^2\phi\right) - \left(u'' - \frac{1}{r}u'\right)\phi \\
 & = \frac{1}{i\alpha R} \left[ \phi^{(4)} - \frac{2}{r}\phi^{(3)} + \left(\frac{3}{r^2} - 2\alpha^2\right)\left(\phi'' - \frac{1}{r}\phi'\right) + \alpha^4\phi \right] \\
 & \left. \begin{aligned}
 \phi(1) = \phi'(1) = 0 \\
 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r}\phi = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r}\phi' < +\infty
 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

其中“'”表示对  $r$  求导。

$$u = \bar{u} + \delta u_i \quad (1.3)$$

$$\bar{u} = 1 - r^2 \quad (1.4)$$

$$u_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n r^{2n}}{[(2n)!!]^2} - A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n r^{2n+2}}{[(2n+2)!!]^2} \quad (1.5)$$

$$A = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n}{[(2n)!!]^2}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu R)^n}{[(2n+2)!!]^2}} \quad (1.6)$$

由文[2]可知, 采用前述算法, 当  $\delta=0$  时, 只需取27项偶次契贝谢夫多项式, 即可达到4位有效数字。如引入修正速度剖面, 特征值计算结果的收敛性见表1。在以后的计算中, 我们取29项偶次契贝谢夫多项式。

引入修正速度剖面后再计算特征值, 发现在所有情况下  $c_i$  都有所增大, 说明这种修正增加了流动的不稳定性。

表1 经过修正的圆管 Poiseuille 流动的契贝谢夫多项式逼近

多项式项数	特征值 $C$
26	0.80383309 + 0.0038660068i
27	0.80383175 + 0.0038616226i
28	0.80383045 + 0.0038613737i
29	0.80382969 + 0.0038618146i
30	0.80382956 + 0.0038621157i
31	0.80383004 + 0.0038624986i
39	0.80382601 + 0.0038596363i
40	0.80382843 + 0.0038613321i
41	0.80383103 + 0.0038627516i

$\alpha=1, R=5000, \delta=-0.06, \mu R=-135.02071$

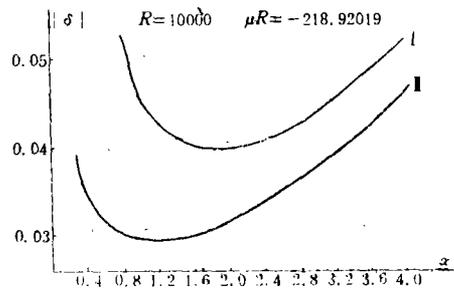


图1 圆管 Poiseuille 流动中修正速度剖面的振幅门槛值曲线

例1  $\alpha=1, R=10000$

当 $\delta=0$	$\mu R=-26.374616$	$c_r=0.9715,$	$c_i=-0.02822$
$\delta=-0.06$	$\mu R=-135.02071$	$c_r=0.9169,$	$c_i=-0.02490$
	$\mu R=-218.92019$	$c_r=0.8046,$	$c_i=0.008833$
	$\mu R=-322.55512$	$c_r=0.8755,$	$c_i=0.03344$
	$\mu R=-445.92756$	$c_r=0.9107,$	$c_i=0.02752$
		$c_r=0.6932,$	$c_i=0.03695$

我们根据例1中的结果, 选择  $c_i$  较大而修正剖面的衰减率较小的参数  $\mu R=-218.92019$  来计算振幅门槛值。因为圆管 Poiseuille 流动的临界雷诺数在2000到13000之间, 我们选择

$R=10000$ 作为算例。图1中给出了修正速度剖面的振幅阈值曲线。由于我们在计算中略去了时间因子 $\exp[\mu t]$ ，这里的阈值是这样定义的：当 $\delta$ 达到阈值时，Tollmien-Schlichting波的增长率与修正速度剖面的衰减率在数值上相等（曲线I）。 $\delta$ 一旦超过此临界值，就会产生Gill(1962)<sup>[3]</sup>所指出的情况，在平均流动的修正衰减到可忽略不计之前，非线性的效应已变得十分重要了。另一方面，如文[1]所述，我们可认为修正速度剖面是由湍流雷诺应力引起的，也就是说我们的稳定性分析是在具有背景扰动的条件下进行的。当背景湍流噪声一直存在时，可认为流动中将不断产生 $\delta u_i$ 的修正而不考虑它随时间的衰减， $\delta$ 用来表示背景扰动的强度。在这种假设下，阈值可定义为较小的值（曲线I）。

在图1所取的参数下，修正速度剖面带有时间因子 $\exp[-0.021892t^*]$ ，其有量纲的形式为 $\exp[-218.92019vt^*/a^2]$ ，其中 $\nu$ 为运动粘性系数， $a$ 为圆管半径。在Leite的实验中， $a=1.5875\text{cm}$ ， $\nu=14.8 \times 10^{-2}\text{cm}^2/\text{s}$ ，故修正速度剖面的幅值衰减到原来的一半仅需要0.054秒。所以如果修正剖面是由瞬时的扰动产生而又没有引起扰动的强烈放大时，平均速度的变化是不易观察到的。

## 二、经过修正的平面Poiseuille流动对于二维扰动的线性稳定性研究

引进流函数 $\psi$ ，满足

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.1)$$

其中 $u$ 为流向流速， $v$ 为横向流速。

现在我们有层流速度剖面

$$u = \bar{u} + \delta u_i \quad (2.2)$$

$$\bar{u} = 1 - y^2 \quad (2.3)$$

$$u_i = C[\cos(\sqrt{\eta R}) - \cos(\sqrt{\eta R} y)] \quad (2.4)$$

$$C = \begin{cases} \frac{1}{\cos(\sqrt{\eta R}) + 1} & (\cos\sqrt{\eta R} > 0) \\ \frac{1}{\cos(\sqrt{\eta R}) - 1} & (\cos\sqrt{\eta R} < 0) \end{cases} \quad (2.5)$$

设扰动流函数为

$$\psi' = \phi(y)\exp[ia(x - Ct)] + \text{C. C.} \quad (2.6)$$

其中 $\alpha$ 为实数， $C = c_r + ic_i$ ，C.C.为复共轭项。

可得关于 $\phi$ 的方程

$$\left. \begin{aligned} (u - C)(\phi'' - \alpha^2\phi) - u''\phi - \frac{1}{iaR}[\phi^{(4)} - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi] &= 0 \\ \phi(\pm 1) = \phi'(\pm 1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

其中“'”表示对 $y$ 求导。

以往的分析（如Orszag(1971)<sup>[4]</sup>）证明，平面Poiseuille流动不稳定的模态在 $y$ 方向对于中心是对称的，在本文所取的坐标系下<sup>[1]</sup>是 $y$ 的偶函数。我们考虑速度剖面的修正对这种模态的影响，因此我们用偶次契贝谢夫多项式将层流速度 $u$ 和扰动函数 $\phi(y)$ 展开，

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_{2n}(y) \quad (2.8)$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{2n}(y) \quad (2.9)$$

同第一节一样, 我们用 Tau 法和矩阵特征值的 QR 算法求解, 但层流速度  $u$  及其二阶导数  $u''$  都用配点法决定其展开系数, 其公式为

$$u\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right) = \sum_{n=0}^N b_n \cos \frac{\pi n j}{N} \quad (j=0, \dots, N) \quad (2.10)$$

$$\bar{c}_m b_m = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N \bar{c}_j^{-1} u\left(\cos \frac{\pi j}{N}\right) \cos \frac{\pi m j}{N} \quad (0 \leq m \leq N) \quad (2.11)$$

其中  $\bar{c}_0 = \bar{c}_N = 2$ ,  $\bar{c}_j = 1$  ( $0 < j < N$ ).

特征值计算结果的收敛性如表 2 所示. 在以后的计算中, 我们采用 29 项偶次契贝谢夫多项式.

表 2 经过修正的平面 Poiseuille 流动的契贝谢夫多项式逼近

多项式项数	特征值 $C$
26	$0.505971 + 0.0967856i$
27	$0.505825 + 0.0968040i$
28	$0.505847 + 0.0968004i$
29	$0.505847 + 0.0968183i$
30	$0.505847 + 0.0968161i$
31	$0.505849 + 0.0968164i$
39	$0.505849 + 0.0968163i$
40	$0.505849 + 0.0968163i$
41	$0.505849 + 0.0968163i$

$\alpha=2.5, R=2900, \delta=-0.05, \eta R=296.5544$

当  $\alpha=1, R=10000, \delta=0$

$$c_r = 0.23752649, \quad c_i = 0.00373967$$

这是和 Orszag(1971) 的结果一致的.

引入修正速度剖面后, 流动总是变得更为不稳定.

例 2  $\alpha=2.5, R=2900$

当  $\delta=0$

$$c_r = 0.958331, \quad c_i = -0.0399495$$

$\delta = -0.05$

$$\eta R = 20.190729 \quad c_r = 0.918046, \quad c_i = -0.0300967$$

$$\eta R = 59.679515 \quad c_r = 0.961942, \quad c_i = -0.0139701$$

$$\eta R = 118.89988 \quad c_r = 0.671816, \quad c_i = 0.0640621$$

$$\eta R = 197.85781 \quad c_r = 0.778150, \quad c_i = 0.0659366$$

$$\eta R = 296.55440 \quad c_r = 0.505847, \quad c_i = 0.0968183$$

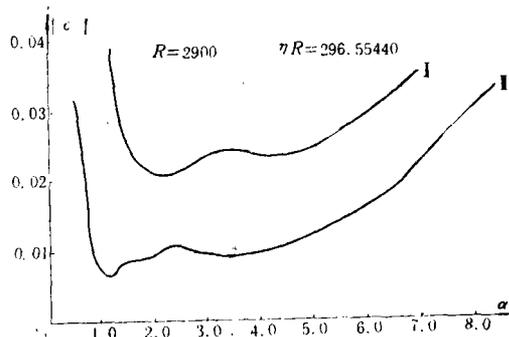


图 2 平面 Poiseuille 流动中修正速度剖面的振幅门槛值曲线

图 2 中给出了平面 Poiseuille 流动中修正速度剖面的振幅门槛值曲线. 其中曲线 I 的定义为 Tollmien-Schlichting 波的增长率与修正速度剖面的衰减率在数值上相等, 而曲线 II 是假设背景湍流噪声一直存在. 我们选择使曲线 I 的幅值较小的参数绘出曲线. 虽然这里的

$\eta R$  值较大, 但曲线 I 的最小幅值 2.13% 低于  $\eta R=118.89988$  时的数值 2.53%, 与  $\eta R=197.85781$  时的数值 2.04% 大致相等, 但引起的扰动失稳更为强烈. 在 Nishoka 的实验中  $h=0.73\text{cm}$ ,  $\nu=14.8 \times 10^{-2}\text{cm}^2/\text{s}$ , 修正速度剖面的幅值衰减到原来的一半仅需 0.0084 秒. 但在这种情况下引起扰动强烈放大的阈值值仅为主流最大速度的 2.1%. 所以修正速度剖面对于流动失稳的实际影响并不取决于它衰减的快慢.

### 三、经过修正的平面 Couette 流动对于二维扰动的线性稳定性研究

经过修正的平面 Couette 流动线性稳定性问题的有关方程与第二节中的各方程基本一致. 但此时基本的层流流动不再是 (2.3) 式, 而是

$$\bar{u}=y \tag{3.1}$$

由于方程的系数不再是  $y$  的偶函数, 所以特征函数也不能再分为对称函数和反对称函数两部分求解. 我们用全部的契贝谢夫多项式来展开层流速度  $u$  和扰动函数  $\phi(y)$

$$\phi(y)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(y) \tag{3.2}$$

$$u=\sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n(y) \tag{3.3}$$

计算方法仍同第二节一样. 此时计算的收敛性见表 3, 在计算中, 我们采用 50 项多项式.

表3 经过修正的平面 Couette 流动的契贝谢夫多项式逼近

多项式项数	特征值 $C$
46	0.116286+0.0653218i
47	0.116288+0.0653528i
48	0.116292+0.0653318i
49	0.116286+0.0653461i
50	0.116292+0.0653375i
51	0.116287+0.0653427i
52	0.116291+0.0653400i
53	0.116288+0.0653413i
54	0.116290+0.0653410i
55	0.116289+0.0653408i

$\alpha=4, R=1430, \delta=0.06, \eta R=197.85781$

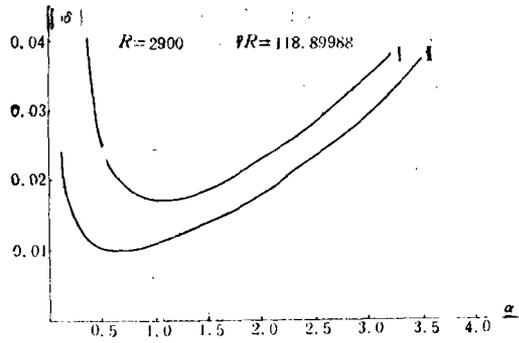


图3 平面 Couette 流动中修正速度剖面的振幅阈值曲线

当  $\delta=0$  时, 由于平面 Couette 流动 的对称性, 扰动总是以一对向相反方向传播的行波形式出现的.

当  $\alpha=4, R=750$ , 衰减最慢的一对模态为

$$C=\pm 0.747834-0.0976655i$$

这个数值和 Deardoff(1962)<sup>[6]</sup>中的图 1 是吻合的.

引入修正速度剖面后, 流动变得更为不稳定, 但流动原来的对称性已被破坏, 扰动不再以成对的向相反方向传播的行波方式出现, 向相反方向传播的扰动波数已不相同.

例3  $\alpha=1, R=2900$

当 $\delta=0$	$c_r = \pm 0.719300,$	$c_i = -0.0808679$
$\delta = -0.05$	$\eta R = 20.190729$	$c_r = -0.710138,$
	$\eta R = 59.679515$	$c_i = -0.0625103$
	$\eta R = 118.89988$	$c_r = 0.214031,$
	$\eta R = 197.85781$	$c_i = 0.101763$
	$\eta R = 296.55440$	$c_r = 0.143694,$
	$\eta R = 414.98999$	$c_i = 0.137442$
		$c_r = 0.116918,$
		$c_i = 0.133621$
		$c_r = 0.0899472,$
		$c_i = 0.117290$
		$c_r = 0.0802600,$
		$c_i = 0.096344$

图 3 中给出平面 Couette 流动中修正速度剖面的振幅门槛值曲线。其中曲线 I 的定义为 Tollmien-Schlichting 波的增长率与修正速度剖面的衰减率在数值上相等；而曲线 II 是假设背景湍流噪声一直存在。

#### 四、经“自由模态”修正后层流流动的线性稳定性性质

我们把文 [1] 中所提到的“自由模态”解也作为修正速度剖面来进行计算，发现这种解也能引起流动的失稳，其程度与我们定义其流量为零的修正速度剖面极其相似。

表4 圆管 Poiseuille 流动经“自由模态”修正后的计算结果

$\mu R$	特征值 C
-30.471504	0.918497-0.0241332i
-74.886624	0.926337-0.0245666i
-139.03947	0.810907+0.0143950i
-222.93177	0.876151+0.0323168i
-326.56466	0.912844+0.0276017i
-449.93197	0.894955+0.0362134i
$\alpha=1.0, R=10000, \delta=-0.06$	

表5 平面 Poiseuille 流动经“自由模态”修正后的计算结果

$\eta R$	特征值 C
22.206610	0.922265-0.0261743i
61.685029	0.958983-0.0115508i
120.90265	0.777081+0.0689403i
199.85949	0.511415+0.100741i
298.55556	0.631808+0.0908540i
416.99078	0.402556+0.0944100i
$\alpha=2.5, R=2900, \delta=-0.05$	

表6 平面 Couette 流动经“自由模态”修正后的计算结果

$\eta R$	特征值 C
22.206610	-0.702720-0.0562105i
61.685029	0.205688+0.120387i
120.90265	0.113060+0.137704i
199.85949	0.0923988+0.119545i
298.55556	0.0777340+0.0975546i
416.99078	0.0673562+0.0734532i
$\alpha=1.0, R=2900, \delta=-0.05$	

#### 五、关于线性稳定性的中性曲线

林家翘在1945年就给出了边界层流动和平面 Poiseuille 流动线性稳定性的中性曲线。然而平面 Couette 流动和圆管 Poiseuille 流动连一个中性点都无法得到。实验中已有迹象表明，不受干扰的圆管 Poiseuille 流动确实是稳定的。但在平面 Couette 流动的实验中，由于难以消除干扰而无法证实这一点，我们只能从理论分析和计算的结果判断这二者属于同一类

问题——无穷远分岔问题。从前面的讨论可知，对这类问题环境干扰的影响十分重要，因此我们用修正速度剖面来反映背景干扰的影响。在图4, 5中我们给出有背景扰动下圆管 Poiseuille 流动和平面 Couette 流动的线性稳定性中性曲线。

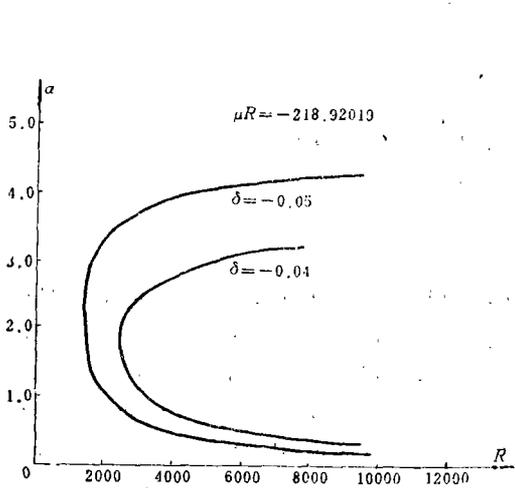


图4 背景扰动下圆管 Poiseuille 流动的中线曲线

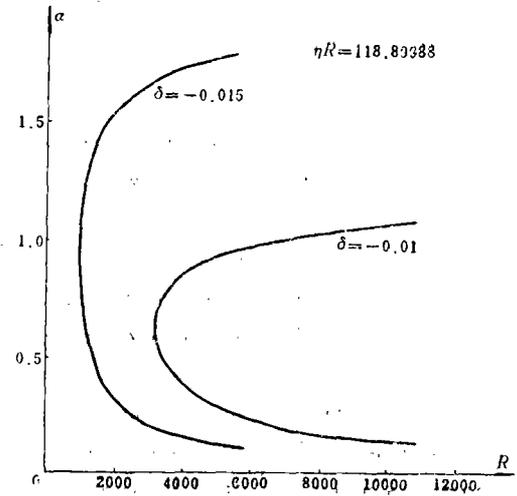


图5 背景扰动下平面 Couette 流动的中性曲线

首先我们必须注意，小扰动的增长还不能保证整个流动失去稳定性，以后我们将会看到在圆管 Poiseuille 流动中非线性作用一开始是使扰动衰减的，只有小扰动的增长达到一定强度之后才会引起整个流动的失稳。其次从图中可以看到，干扰的程度对中性曲线的形状和范围有很大影响。而且中性曲线的形状与边界层流动及平面 Poiseuille 流动的中性曲线不同，并没有反映出林家翘所指出的粘性对流动失稳的双重作用。

至此，我们用经过修正的层流流动的线性流动稳定性理论对平行剪切流的三种基本流动：圆管 Poiseuille 流动，平面 Poiseuille 流动和平面 Couette 流动都进行了分析，发现考虑了基本层流流动的修正之后，三种基本流动都会出现不稳定的情况。我们仅讨论了最简单的扰动：轴对称扰动和二维扰动。在这种扰动下，圆管 Poiseuille 流动和平面 Couette 流动可能失稳的结果还是首次得到。

在更复杂的扰动——非轴对称扰动和三维扰动的情况下，流动稳定性问题的方程和计算虽更加复杂，但应用我们的方法显然不存在根本上的困难。

### 参 考 文 献

- [1] 周哲玮, 经过修正的层流流动的流动稳定性问题( I )——基本概念和理论, 应用数学和力学, 10, 2 (1989).
- [2] 周哲玮, 圆管 Poiseuille 流动中平均速度的一种修正剖面及其稳定性研究, 应用数学和力学, 9, 1(1988).
- [3] Gill, A. E., A mechanism for instability of Plane Couette flow and of Poiseuille flow in a pipe, *J. Fluid Mech.*, 21 (1962), 503.
- [4] Orszag, S. A., Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation, *J. Fluid Mech.*, 50 (1971), 689.
- [5] Deardoff, J. W., On the stability of viscous plane Couette flow, *J. Fluid Mech.*, 15 (1963), 623.

## On the Stability of Distorted Laminar Flow(II)——The Linear Stability Analysis of Distorted Parallel Shear Flow

Zhou Zhe-wei

*(Shanghai Institute of Applied Mathematics  
and Mechanics, Shanghai)*

### Abstract

Based on the hydrodynamic stability theory of distorted laminar flow and the kind of distortion profiles on the mean velocity in parallel shear flow given in paper [1], this paper investigates the linear stability behaviour of parallel shear flow, presents unstable results of plane Couette flow and pipe Poiseuille flow to two-dimensional or axisymmetric disturbances for the first time, and obtains neutral curves of these two motions under certain definition.