

非均匀圆柱壳非线性轴对称变形一般解

叶开沅 纪振义

(兰州大学力学系) (安徽建筑工业学院建工系)

(1987年9月7日收到)

摘 要

本文利用阶梯折算法^[1], 得到了非均匀圆柱壳非线性轴对称变形的一般解. 文中导出了在任意轴对称载荷下求解非均匀圆柱壳非线性弯曲的位移和内力的一般公式, 并给出一致收敛于精确解的证明. 问题最后归结为求解二元一次代数方程组, 文末给出算例. 算例表明, 无论内力和位移都可得到满意的结果, 并收敛于精确解.

一、引 言

非均匀圆柱壳在工程中应用很广泛, 许多学者对此作了大量的研究.

文献[2~4]用解析法对变厚度柱壳弯曲问题作了分析. [5]用有限元法, [6, 7]用矩阵迁移法对非均匀柱壳的弯曲问题作了分析. 总的说来, 用解析法求解, 只适用于某些特定的场合, 对一般情况是无能为力的. 用数值法求解, 则得不到一个解析表达式, 并且计算精度差. 而阶梯折算法求解这个问题, 可以得到适用于一般情况的解析式, 并有很高的精度. 可以对解中任意的几何参数直接求导, 给优化设计提供了方便.

文中利用阶梯折算法得到了非均匀柱壳非线性轴对称变形的一般表达式, 并给出一致收敛性的证明. 文末给出算例, 表明无论是内力和位移都可以得到满意的结果, 并收敛于精确解.

二、非均匀变厚度圆柱壳非线性轴对称变形的初参数解

对一非均匀圆柱壳, 长度为 l , 厚度为 $h(x)$, 弯曲刚度为 $D(x)$, 半径为 $r(x)$, 材料的弹性模量为 $E(x)$, 泊松比为 $\nu(x)$, 承受轴对称的径向载荷 $q(x)$ 和轴向力 N_x 的作用. 考虑到 N_x 对壳径向载荷的贡献, 其静力平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dQ_x(x)}{dx} + \frac{1}{r(x)} N_\phi(x) - N_x \frac{d^2w(x)}{dx^2} &= q(x) \\ \frac{dM_x(x)}{dx} - Q_x(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

为力和位移的关系为

$$N_x = \frac{E(x)h(x)}{1-\nu^2(x)} \left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \nu(x) \frac{w}{r(x)} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} N_s &= \frac{E(x)h(x)}{1-\nu^2(x)} \left[\frac{w}{r(x)} + \nu(x) \left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right) \right] \\ M_s &= -D(x) \frac{d^2w}{dx^2}, \quad M_\phi = -D(x)r(x) \frac{d^2w}{dx^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

式中

u, w ——柱壳中面内各点的纵向和径向位移; M_s, M_ϕ 和 Q_s ——柱壳纵向、环向弯矩和横向剪力; N_s, N_z ——环向和轴向膜力; $D(x)$ ——弯曲刚度, 等于 $E(x)h^3(x)/12(1-\nu(x))$ 。

由(2.1)和(2.2)可以得到用径向位移 w 表示的平衡方程

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D(x) \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) - N_z \frac{d^2w(x)}{dx^2} + \frac{E(x)h(x)}{r^2(x)} w(x) = q(x) \quad (2.3)$$

式中

$$q(x) = q(x) - \frac{\nu(x)}{r(x)} N_z \quad (2.4)$$

用一般解析法求解(2.3)不是一桩容易的事。我们用阶梯折算法把柱壳分成 N 个壳元, 可以把每个壳元看作是均匀的, 等厚度的和等半径的。设第 i 个壳元的区间为 $[x_{i-1}, x_i]$, 方程(2.3)便可以转化为常系数微分方程

$$D_i \frac{d^4w(x)}{dx^4} - N_z \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{E_i h_i}{r_i^2} w(x) = q(x) \quad (x \in [x_{i-1}, x_i]) \quad (2.5)$$

式中下标 i 表示所对应的变量在第 i 个壳元的中点取值。此外还需满足在单元交接处的连续条件

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w(x_{i-1}-\varepsilon) &= w(x_{i-1}), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dw(x_{i-1}-\varepsilon)}{dx} = \frac{dw(x_{i-1})}{dx} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_z(x_{i-1}-\varepsilon) &= M_z(x_{i-1}), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q_z(x_{i-1}-\varepsilon) = Q_z(x_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

可以证明, 用阶梯折算法所得到的位移 w , dw/dx 和内力 M_s, Q_s 一致收敛于精确解。这里

$$M_z = -D_i \frac{d^2w}{dx^2}, \quad Q_z = -D_i \frac{d^3w}{dx^3} \quad (x \in [x_{i-1}, x_i])$$

为求解(2.5)和(2.6), 可设初参数解为

$$\begin{aligned} \{\delta(x)\} &= [F_i(x-x_{i-1})] \{\delta(0)\} + \{P_i(x)\} \\ &+ \sum_{m=1}^{i-1} \{x-x_m\}^* [F_i(x_i-x_{i-1})] \{A_m\} \quad (x \in [x_{i-1}, x_i]) \end{aligned} \quad (2.7)$$

这里矢量

$$\{\delta(x)\} = \{w \quad dw/dx \quad M_z \quad Q_z\}^T \quad (2.8)$$

待定参数

$$\{A_m\} = \{A_{m1} \quad A_{m2} \quad A_{m3} \quad A_{m4}\}^T \quad (2.9)$$

记号

$$\{x-x_m\}^* = \begin{cases} 0 & (x < x_m) \\ 1 & (x \geq x_m) \end{cases} \quad (2.10)$$

为 Heaviside 函数。

在一般情况下有

$$N_z^2 < 4 \frac{E_i h_i D_i}{r_i^2} \quad (2.11)$$

因此, 可得(2.5)的齐次解

$$\begin{aligned} \bar{w} = & \operatorname{ch} \lambda_1 x (C_1 \sin \lambda_2 x + C_2 \cos \lambda_2 x) \\ & + \operatorname{sh} \lambda_1 x (C_3 \sin \lambda_2 x + C_4 \cos \lambda_2 x) \end{aligned} \quad (2.12)$$

这里

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{E_i h_i}{r_i^2 D_i} + \frac{N_z}{2 D_i}} \right)}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{E_i h_i}{r_i^2 D_i} - \frac{N_z}{2 D_i}} \right)} \quad (2.13)$$

不难推出

$$[F_i(x)] = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & -\frac{1}{D_i} f_3(x) & -\frac{1}{D_i} f_4(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & -\frac{1}{D_i} f_3'(x) & -\frac{1}{D_i} f_4'(x) \\ -D_i f_1''(x) & -D_i f_2''(x) & f_3''(x) & f_4''(x) \\ -D_i f_1'''(x) & -D_i f_2'''(x) & f_3'''(x) & f_4'''(x) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

(2.14)中的 f_k ($k=1, 2, 3$ 和 4)及其导数可参见表1.

表 1

$N_z^2 < 4E_i h_i D_i / r_i^2$ 时 $f_k(x)$ 及其导数表达式

k	$f_k(x)$	$f_k'(x)$	$f_k''(x)$	$f_k'''(x)$	备注
1	$F_1 + \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{2\lambda_1\lambda_2} F_4$	$\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2} \left(\frac{F_3}{\lambda_1} - \frac{F_2}{\lambda_2} \right)$	$-\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2}{2\lambda_1\lambda_2} F_4$	$-\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2} \left(\frac{F_2}{\lambda_2} + \frac{F_3}{\lambda_1} \right)$	$F_1 = \operatorname{ch} \lambda_1 x \cos \lambda_2 x$ $F_2 = \operatorname{ch} \lambda_1 x \sin \lambda_2 x$ $F_3 = \operatorname{sh} \lambda_1 x \cos \lambda_2 x$ $F_4 = \operatorname{sh} \lambda_1 x \sin \lambda_2 x$
2	$\frac{3\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{2(\lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_2^3)} F_2$ $+\frac{3\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2(\lambda_1^3 + \lambda_1 \lambda_2^2)} F_3$	$F_1 + \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{2\lambda_1\lambda_2} F_4$	$\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2} \left(\frac{F_3}{\lambda_1} - \frac{F_2}{\lambda_2} \right)$	$-\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{2\lambda_1\lambda_2} F_4$	
3	$\frac{1}{2\lambda_1\lambda_2} F_4$	$\frac{1}{2} \left(\frac{F_2}{\lambda_1} + \frac{F_3}{\lambda_1} \right)$	$F_1 + \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2} F_4$	$\frac{3\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_1} F_3$ $-\frac{3\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{2\lambda_2} F_2$	
4	$\frac{F_2}{2\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}$ $-\frac{F_3}{2\lambda_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}$	$\frac{1}{2\lambda_1\lambda_2} F_4$	$\frac{1}{2} \left(\frac{F_2}{\lambda_2} + \frac{F_3}{\lambda_1} \right)$	$F_1 + \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2} F_4$	

$[F_i(x)]$ 是方程(2.5)的齐次解, 此外也不难求得特解

$$\{P_i(x)\} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{D_i} \int_{x_{i-1}}^x q(\xi) f_{4i}(x-\xi) d\xi \\ & \frac{1}{D_i} \int_{x_{i-1}}^x q(\xi) f_{4i}'(x-\xi) d\xi \\ & - \int_{x_{i-1}}^x q(\xi) f_{4i}''(x-\xi) d\xi \\ & - \int_{x_{i-1}}^x q(\xi) f_{4i}'''(x-\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

把(2.7)式代入(2.5),可直接验证(2.7)在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上是方程(2.5)的解,为满足单元交接处的连续条件,把(2.7)代入(2.6),并注意到

$$[F_i(0)] = [I], \{P_i(x_{i-1})\} = \{0\}$$

整理得待定参数

$$\begin{aligned} \{A_{i-1}\} &= ([F_{i-1}(x_{i-1}-x_{i-2})] - [I])\{\delta(0)\} + \{P_{i-1}(x_{i-1})\} \\ &+ \sum_{m=1}^{i-2} \{x-x_m\}^{\circ} ([F_{i-1}(x_{i-1}-x_{i-2})] - [I])\{A_m\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

方程(2.7)和(2.16)即是求解非均匀圆柱壳非线性轴对称弯曲的一般解析解。

当边界条件是:

$$\left. \begin{array}{l} \text{夹紧时} \quad w = w' = 0 \\ \text{简支时} \quad w = M_s = 0 \\ \text{悬空时} \quad M_s = Q_s + N_s w' = 0 \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

把已知的两端边界条件(2.17)代入(2.7),即可得到关于初参数 $\{\delta(0)\}$ 的二元一次代数方程组。求出 $\{\delta(0)\}$,再代入(2.7),便可求出柱壳任一点的内力和位移。

如果有轴对称集中力 P 和集中力矩 M 分别作用在第 i 单元的 x_p 和 x_m 处,注意它和径向分布载荷

$$\left. \begin{array}{l} q_p(x) = P\delta(x-x_p) \\ q_m(x) = -M\delta'(x-x_m) \end{array} \right\} \quad (2.18)$$

等价,代入(2.15)直接积分可得

$$\begin{aligned} \{P_i(x)\}_p &= P \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{D_i} f_{i,i}(x-x_p) \{x-x_p\}^{\circ} \\ \frac{1}{D_i} f'_{i,i}(x-x_p) \{x-x_p\}^{\circ} \\ -f''_{i,i}(x-x_p) \{x-x_p\}^{\circ} \\ -f'''_{i,i}(x-x_p) \{x-x_p\}^{\circ} \end{array} \right\} \\ \{P_i(x)\}_m &= M \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{D_i} f_{i,i}(x-x_m) \{x-x_m\}^{\circ} \\ -\frac{1}{D_i} f''_{i,i}(x-x_m) \{x-x_m\}^{\circ} \\ f'''_{i,i}(x-x_m) \{x-x_m\}^{\circ} \\ f^{(4)}_{i,i}(x-x_m) \{x-x_m\}^{\circ} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

由(2.7)式便可求出有轴对称集中力 P 和集中力矩 M 作用的非均匀柱壳非线性弯曲的解。

三、收敛性证明

我们把(2.3)和(2.5)分别写成算子方程

$$Aw = q(x) \quad (3.1)$$

和

$$\bar{A}_i \bar{w} = \bar{q}(x) \quad (x \in [x_{i-1}, x_i]) \quad (3.2)$$

式中 \bar{w} 表示用阶梯折算法求得的解。因为 A 和 \bar{A}_i 均为线性算子，因此内积

$$(\varphi, Aw - \bar{A}\bar{w}) = \left(\varphi, Aw - \sum_{i=1}^N \bar{A}_i \bar{w} \right) = 0 \quad (3.3)$$

这里 $\varphi \in W_2^{(2)}$, $W_2^{(2)}$ 为索伯列夫空间。利用分部积分，当 $N \rightarrow \infty$ 时，我们有

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\varphi, Aw - \bar{A}\bar{w}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (A^* \varphi, w - \bar{w}) \\ &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \{ -\varphi [(Q_z + N_z w') - (\bar{Q}_z + N_z \bar{w}')]] + \varphi' (M_z - \bar{M}_z) \\ &- M_z^* (w' - \bar{w}') + (Q_z^* + N_z \varphi') (w - \bar{w}) \} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

当单元交接处连续条件(2.6)和边界条件(2.17)满足时，并令其余4个未知边界条件对应的共轭边界条件为零，则可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (A^* \varphi, w - \bar{w}) = 0 \quad (3.5)$$

(3.4)和(3.5)中的

$$M_z^* = -D(x) \frac{d^2 \varphi}{dx^2}, \quad Q_z^* = -\frac{d}{dx} \left(D(x) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right), \quad A^* = A \quad (3.6)$$

这里已假定 M_z^* 和 Q_z^* 在 $[x_0, x_N]$ 上连续。由[8]可得，当 A 在已定的边界条件下有逆算子 A^{-1} 存在时， A^* 在零共轭边界条件也有逆。特别地，当

$$A^* \varphi = w - \bar{w}$$

时，有唯一解 $\varphi \in W_2^{(2)}$ ，可使 M_z^* 和 Q_z^* 在区间 $[x_0, x_N]$ 上连续。因此可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x_0}^{x_N} (w - \bar{w})^2 dx = 0 \quad (3.7)$$

因为 $w - \bar{w}$, $dw/dx - d\bar{w}/dx$, $M_z - \bar{M}_z$ 和 $Q_z - \bar{Q}_z$ 在 $[x_0, x_N]$ 上连续，因此有界。通过(3.7)式，很容易证明 \bar{w} , $d\bar{w}/dx$, \bar{M}_z 和 \bar{Q}_z 一致收敛于 w , dw/dx , M_z 和 Q_z 。

四、算 例

一个注满水的水池，如图1所示。 $r=914.4\text{cm}$, $\delta_i=8.89\text{cm}$, $\delta_o=35.56\text{cm}$, $l=792.48\text{cm}$ ，材料的弹性模量 $E=2.1 \times 10^9 \text{kg/cm}^2$ ，泊松比 $\nu=0.25$ ，水的容重 $\gamma=0.001 \text{kg/cm}^3$ 。将水池分成 n 个等厚度圆柱壳，每个壳元的厚度取壳元实际厚度的平均值，载荷也取实际载荷的平均值，壳体没有轴向力作用。表2给出了 n 分别等于5, 10, 25和45时，本文解与解析解的比较结果。表3给出随 n 增大时，始端径向位移 w 和终端弯矩 M_z 收敛情况。表4给出非均匀分成11个壳元的计算结果，单元交接处的坐标如表4所示。解析解取自文献[5]。本文已将英制单位换算成公制单位。

从以上算例表明，本文提出的方法，对解决非均匀圆柱壳任意分布的载荷和任意边界条件下的轴对称问题，可以得出较好的结果。

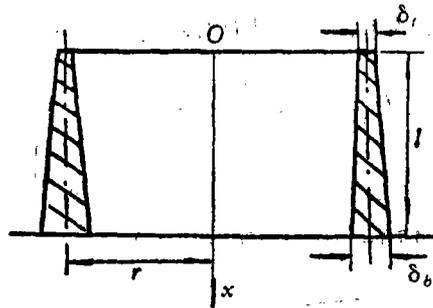


图1 注满水的水池

表 2 水池的径向位移 w 和纵向弯矩 M_x 计算结果

x	$w \times 10^{-2}(\text{cm})$					$M_x(\text{kg-cm/cm})$				
	$n=5$	$n=10$	$n=25$	$n=45$	解析解	$n=5$	$n=10$	$n=25$	$n=45$	解析解
0	0.2194	0.1057	0.06638	0.0610	0.06014	0	0	0	0	0
121.9	0.3635	0.3641	0.3627	0.3625	0.3630	-26.9	17.66	26.61	28.01	28.35
304.8	0.6605	0.6641	0.6650	0.6652	0.6660	37.92	45.94	48.12	48.03	48.39
482.6	0.7879	0.7843	0.7832	0.7803	0.7865	525.8	537.8	542.2	542.7	566.4
609.6	0.5794	0.5628	0.5584	0.5579	0.5583	918.8	907.5	903.6	902.6	903.3
670.6	0.3590	0.3442	0.3394	0.3384	0.3390	335.1	219.4	192.7	188.8	193.2
701.0	0.2385	0.2262	0.2217	0.2210	0.2280	-477.4	-631.6	-670.8	-676.8	-681.4
731.5	0.1248	0.1178	0.1136	0.1130	0.1128	-1772	-1955	-2020	-2029	-2034
746.8	0.0780	0.0715	0.0684	0.0679	0.0679	-2629	-2840	-2914	-2923	-2928
762.0	0.037	0.0344	0.0327	0.0323	0.0322	-3632	-3879	-3960	-3971	-3981
777.2	0.010	0.0093	0.0089	0.0087	0.0086	-4792	-5085	-5176	-5189	-5203
792.5	0	0	0	0	0	-6122	-6470	-6577	-6592	-6605

表 3 随 n 增大时始端挠度和终端弯矩的收敛情况

n	5	10	15	20	25	35	40	45	解析解
$w \times 10^{-2}$ ($x=0$)	0.2201	0.1057	0.07999	0.07072	0.0664	0.0625	0.0616	0.0610	0.06014
M_x ($x=792.5$)	-6122	-6470	-6540	-6565	-6577	-6587	-6590	-6592	-6605

表 4 $n=11$ 非均匀分块计算结果

x	0	121.9	304.8	482.6	609.6	670.6	701.0	731.5	746.8	762	777.2	792.5	
$w \times 10^{-2}$	本文解	0.1633	0.3654	0.6604	0.7802	0.5587	0.3374	0.2200	0.1124	0.0676	0.0322	0.00865	0
	解析解	0.06014	0.3630	0.6660	0.7865	0.5583	0.3390	0.2280	0.1128	0.0679	0.0322	0.00867	0
M_x	本文解	0	23.67	38.69	509.5	865.0	172.1	-679.7	-2019	-2906	-3947	-5157	-6553
	[7]解	0	28.8	37.10	571.4	873.5	171.4	-686.1	-2029	-2914	-3960	-5175	-6569
	解析解	0	28.35	48.39	569.4	903.3	193.2	-681.4	-2034	-2934	-3981	-5203	-6605

参 考 文 献

- [1] 叶开沅, 非均匀变厚度弹性力学的若干问题的一般解, IV. 非均匀变厚度梁的弯曲, 稳定性和自由振动问题, 兰州大学学报力学专号, 1, (1979), 133—157.
- [2] Reissner, H., Über die spannungsverteilung in zylindrischen behälterwänden, *Beton U. Eisen*, 7 (1908), 150—155.
- [3] Cattin, A., Serbatoio cilindrico a sezione meridiand di spessore variable, *Ric. Ing.* 7 (1939), 80—87.
- [4] Federhofe, K., Berechnung der kreiszylindrischem Flüssigkeit sbehälter mit quadratisch veränderlicher wandstärke, *Österr Ing-Arch.*, 6 (1951), 43—64.
- [5] Barogand, Y. and H. Tottenham, The Analysis of rotational shells using a curved ring element and mixed variational formulation, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 10 (1976).
- [6] 舒恒煜, 迁移矩阵法在旋转壳结构应力分析中的应用, 华中工学院学报, 船舶结构力学专辑 (1980), 59—68.
- [7] 黄玉盈、梁广基, 变厚度圆柱壳的轴对称变形, 上海力学, 1 (1983).
- [8] M. A. 纳依玛克, 《线性微分算子》, 科学出版社, 北京 (1964), 13—28.

The General Solution on Nonlinear Deformation of Axial-Symmetrical Nonuniform and Variable Thickness Cylindrical Shells

Yeh Kai-yuan

(Lanzhou University, Lanzhou)

Ji Zhen-yi

(Anhui Architectural Engineering Institute, Hefei)

Abstract

The nonuniform cylindrical shells are widely used as structural configuration in engineering. In this paper, the general solution on nonlinear deformation of axial-symmetrical nonuniform and variable thickness cylindrical shells is obtained by step reduction method^[1]. The displacement and stress resultants of shells can be expressed in analytic form in arbitrary axial-symmetrical load and boundary conditions. Its convergence is proved. Finally, it is only necessary to solve one set of binary linear algebraic equation. A numerical example is given at the end of the paper which indicates satisfactory results of stress resultants, moments and displacement can be obtained by step reduction method.