应用数学和力学，第10卷第5期（1989年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

正态变差系数的经典限*

周　源　泉

（北京强度与环境研究所，1986年8月27日收到）

摘　要

本文推导了正态变差系数的经典精确限，为了满足工程实践的需要，利用Odeh和Owen的计算方法及Brent算法，给出了高精度的可手算的近似限。对不同的置信度γ及样本大小$n=1(1)30$，40，60，120，样本变差系数$\hat{c}=0.01(0.01)0.20$，计算了正态变差系数的经典精确限表。本文指出，当$n\leqslant 8$，$\hat{c}\leqslant 0.20$时，经典精确限c_U略大于Fiducial精确限$c_{U,F}$。当$n>8$，$\hat{c}\leqslant 0.20$时，$c_U-c_{U,F}<5\times 10^{-6}$。

一、引　言

均差为μ、标准差为σ的随机变量X的变差系数定义为：

$$c\triangleq\sigma/\mu$$

这个参数关于X提供了一个相对于其均值的变异性的无量纲测度。它在许多实际问题中有广泛的应用[1]。

在正态分布的情况下，McKay(1932)[2]，Peanson(1932)[3]，Fieller(1932)[4]，Koopmans等（1964）[5]对近似限方法进行了许多研究，周源泉（1986）[1]则给出了Fiducial及Boyes精确限。Koopmans等[5]指出，若没有关于参数μ的范围的先验信息，要对μ及σ的所有值以概率1给出c的有限长度的置信区间是不可能的，除非利用序贯抽样方案。即使对于$c>0^+$，迄今为止，尚未见到有人给出正态变差系数c的经典精确限。

在第二节中，给出了$c>0^+$时，c的经典精确限，它是包含非中心学生t-分布的分布函数的非线性方程的解。

在第三节中，为了满足工程实践的需要，给出了高精度的可手算的经典近似限。

在第四节中，给出了精确限的计算方法，据此计算了13个不同的置信度，及$n=1(1)30$，40，60，120，$\hat{c}=0.01(0.01)0.20$的经典精确限表。

第五节指出，当$n\leqslant 8$，$\hat{c}\leqslant 0.20$时，经典限c_u略大于Fiduciol限$c_{u,F}$，当$n>8$，$\hat{c}\leqslant 0.20$时，两者之差$c_u-c_{u,F}<5\times 10^{-6}$，在工程上可认为两者相等，即$c_u=c_{u,F}$。

---

* 钱伟长推荐。

二、c 的经典精确限

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，即X是均值为μ，标准差为σ的正态分布的随机变量。在实践中，变差系数经常在其观测值为正的情况下使用（见 Johnson 和 Welch，1940）[6]。基于这种实践，下面我们的注意限制在$c>0^+$的情况。对此，有下述定理：

定理 1 令X_1，X_2，…，X_n是具有未知均值μ及未知标准差σ的相互独立有相同正态分布的随机变量，令$\bar{X}=n^{-1}\sum_{n=1}^{n} X_i$，$S^2=(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$若$c=\sigma/\mu>0^+$，基于样本变差系数$\hat{c}=S/\bar{X}$。$c$的经典精确$\gamma$-上限$c_u$由下式确定：

$$F_{t_{n-1},\sqrt{n}/c_u}(\sqrt{n}/\hat{c})=\gamma \tag{2.1}$$

式中$F_{t_{n-1},\sqrt{n}/c_u}(\cdot)$是自由度为$n-1$，非中心参数为$\sqrt{n}/c_u$的非中心学生$t$-分布的分布函数。

证 众知

$$\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$$

及

$$S/\sigma \sim \sqrt{\chi^2_{n-1}/(n-1)}$$

相互独立，式中$N(0,1)$是标准正态分布，χ^2_{n-1}是自由度为$n-1$的卡方分布。

因此

$$\sqrt{n}/\hat{c}=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma+\sqrt{n}/c}{S/\sigma}\sim t_{n-1,\sqrt{n}/c}$$

式中$t_{n-1,\sqrt{n}/c}$是自由度为$n-1$，非中心参数为$\sqrt{n}/c$的非中心学生t-分布。则

$$P\{\sqrt{n}/\hat{c}\leqslant t_{n-1,\sqrt{n}/c;\gamma}\}=\gamma \tag{2.2}$$

式中$t_{n-1,\sqrt{n}/c;\gamma}$是非中心学生$t$-分布$t_{n-1,\sqrt{n}/c}$的$\gamma$-分位数。

当$c>0^+$时，c的经典精确γ-上限c_u定义为：

$$P\{0^+<c\leqslant c_u\}=\gamma$$

则

$$P\left\{\frac{\sqrt{n}}{c_u}\leqslant\frac{\sqrt{n}}{c}\right\}=\gamma$$

Koopmans 等(1964)[5]指出，$t_{n-1,\sqrt{n}/c;\gamma}$是$\sqrt{n}/c$的严格单调上升函数，故

$$P\{t_{n-1,\sqrt{n}/c_u;\gamma}\leqslant t_{n-1,\sqrt{n}c;\gamma}\}=\gamma \tag{2.3}$$

比较(2.2)式及(2.3)式，可得：

$$t_{n-1,\sqrt{n}/c_u;\gamma}=\sqrt{n}/\hat{c}$$

即

$$F_{t_n-1,\sqrt{n}/c_u}(\sqrt{n}/\hat{c})=\gamma \qquad \text{Q.E.D.}$$

三、c 的近似限

在近似限中较有名的是 Mckay(1932)[2]的χ^2-分布近似限

$$c'_u=\left(\frac{1+\hat{c}^2}{n\hat{c}^2}\chi^2_{n-1,1-\gamma}-1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

它的误差很大，在小样本情况，其相对误差的绝对值有时大于50%，远不能满足工程实践的需要。

在[7]中，给出了正态单边容许限系数K的近似式：

$$\bar{K}=\frac{1}{\sqrt{n}}t_{n-1,\ (\gamma+0.5)/2}+u_R\sqrt{(n-1)/\chi^2_{n-1,1-\gamma}}$$

因 $K=t_{n-1,\sqrt{n}u_R;\ \gamma}/\sqrt{n}$

式中 u_R 是标准正态分布的 R-分位数。

故 $$t_{n-1,\sqrt{n}u_R;\gamma}\approx t_{n-1,\ (\gamma+0.5)/2}+\sqrt{n}\,u_R\sqrt{(n-1)/\chi^2_{n-1,1-\gamma}}$$

则 $$t_{n-1,\sqrt{n}/c_u;\gamma}=\sqrt{n}/\hat{c}\approx t_{n-1,\ (\gamma+0.5)/2}+\frac{\sqrt{n}}{c_u}\sqrt{(n-1)/\chi^2_{n-1,1-\gamma}}$$

故 c_u 的近似式为：

$$\tilde{c}_u=\hat{c}\sqrt{(n-1)/\chi^2_{n-1,1-\gamma}}\Big/\left(1-\frac{\hat{c}}{\sqrt{n}}t_{n-1,(\gamma+0.5)/2}\right) \tag{3.1}$$

为了便于计算机应用，$\tilde{c}_u$ 中的正态分布、卡方分布、学生 t-分布的分位数分别用山内、Wilson-Hilferty 及正态近似[8]代入，记为 $\tilde{c}'_u$。

由于 $\tilde{c}'_u$ 有很高的精度，因此在实际的工程问题中，可用 $\tilde{c}'_u$ 代替 c_u。

利用[$0.5\tilde{c}'_u$，$1.5\tilde{c}'_u$]作为 c_u 的搜索范围，既能节省机时，又能保证解在该范围存在。$\tilde{c}'_u$ 的误差见表1。

表 1 $\tilde{c}'_u$的相对误差 $\delta\tilde{c}'_u=(\tilde{c}'_u-c_u)/c_u$，$\hat{c}=0.05$的$\tilde{c}\delta'_u$

n \ γ	0.01	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75	0.90	0.95	0.99
3	−2.17%	−1.95%	−1.69%	−0.99%	0.02%	1.00%	1.50%	1.35%	−1.90%
5	−1.63%	−1.23%	−1.01%	−0.61%	−0.18%	0.30%	1.30%	2.70%	10.11%
10	−1.07%	−0.88%	−0.74%	−0.44%	−0.04%	0.36%	0.73%	1.01%	1.94%
30	−0.57%	−0.51%	−0.44%	−0.26%	0	0.25%	0.43%	0.50%	0.60%

$\hat{c}=0.15$的$\tilde{c}\delta'_u$

n \ γ	0.01	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75	0.90	0.95	0.99
3	−5.82%	−5.23%	−4.52%	−2.60%	2.05%	2.68%	2.61%	−0.71%	−34.67%
5	−4.08%	−3.48%	−2.97%	−1.75%	−0.10%	1.41%	2.47%	3.12%	5.67%
10	−2.61%	−2.31%	−2.01%	−1.19%	0	1.10%	1.67%	1.76%	1.62%
30	−1.35%	−1.27%	−1.12%	−0.68%	0.01%	0.66%	1.01%	1.07%	0.91%

四、计 算 方 法

非中心学生 t-分布的分布函数可按 Odeh 和 Owen[9]的方法计算：

$$F_{t_{\nu,\delta}}(t)=\begin{cases}\Phi(-\delta\sqrt{B})+2T(\delta\sqrt{B},\ A)+2\sum\limits_{i=1}^{(\nu-1)/2}M_{2i-1} & (\nu\ \text{为奇数},\ \nu\geqslant 3)\\[2ex] \Phi(-\delta)+\sqrt{2\pi}\sum\limits_{i=0}^{\nu/2-1}M_{2i} & (\nu\ \text{为偶数},\ \nu\geqslant 2)\end{cases}$$

式中：

$$\nu=n-1,\ \delta=\sqrt{n}/c_u,\quad t=\sqrt{n}/\hat{c},\quad A=t/\sqrt{\nu},\ B=\nu/(\nu+t^2)$$

$$\begin{cases} M_0=A\sqrt{B}\,\phi(\delta\sqrt{B})\Phi(\delta A\sqrt{B}) \\ M_1=B\,[\delta AM_0+A\phi(\delta)/\sqrt{2\pi}\,] \\ M_2=\dfrac{1}{2}B(\delta AM_1+M_0) \end{cases}$$

令 $a_2=1$

$$a_k=\frac{1}{(k-2)a_{k-1}},\ M_k=\frac{k-1}{k}B(a_k\delta AM_{k-1}+M_{k-2})$$

$$(k=3,\ 4,\ \cdots\nu-2)$$

$\phi(\chi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{\chi^2}{2}\right]$，$\Phi(\cdot)$是标准正态分布函数。

$T(h,a)$是T-函数，定义为：

当 $a<1$ 有：
$$T(h,a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^a\frac{\exp\left[-\dfrac{h^2}{2}(1+\chi^2)\right]}{1+\chi^2}d\chi$$

$$T(h,a)=\frac{1}{2\pi}(\arctan a-\sum_{j=0}^{\infty}c_ja^{2j+1})$$

式中 $$c_j=(-1)^j\frac{1}{2j+1}\left(1-\exp\left[-\frac{h^2}{2}\right]\sum_{i=0}^{j}\frac{h^{2i}}{2^i\cdot i!}\right)$$

当$a\geqslant1$，有：
$$T(h,a)=\frac{1}{2}[Q(h)+Q(ah)]-Q(h)Q(ah)-T\left(ah,\ \frac{1}{a}\right)$$

$Q(\chi)=1-\Phi(\chi)$的计算方法如下：

当 $0\leqslant u\leqslant3$，用 Shenlon 展开式[8]：

$$Q(u)=\frac{1}{2}-\phi(u)\left\{\frac{u}{1}-\frac{u^2}{3}+\frac{2u^2}{5}-\frac{3u^2}{7}+\cdots+(-1)^k\frac{ku^2}{2k+1}+\cdots\right\}$$

当 $u>3$，用 Laplace 展开式[8]：

$$Q(u)=\phi(u)\left\{\frac{1}{u}+\frac{1}{u}+\frac{2}{u}+\cdots\frac{k}{u}+\cdots\right\}$$

当 $u<0$ 时，用 $Q(u)=1-Q(-u)$化为 $u>0$。

计算$Q(u)$时，连分式取28项。可使$Q(u)$的绝对误差小于 10^{-16} 计算 $T(h,a)$ 时，当相邻两个部分和之差小于 2×10^{-16} 时，停止计算。

利用 Brent(1971)[10]，求函数零点的迭代算法解非线性方程：

$$F_{t_\nu,\sqrt{n}/c_u}(\sqrt{n}/\hat{c})-\gamma=0$$

取绝对容许误差 $\varepsilon_2=10^{-6}$，相对容许误差 $\varepsilon_1=2^{-127}$，则算出的 c_u 的绝对误差小于 5×10^{-6}。对于样本大小 $n=1(1)30$，40，60，120，样本变差系数 $\hat{c}=0.01(0.01)0.20$，置信度 $\gamma=0.01$，0.05，0.1，0.2，0.25，0.3(0.1)0.7，0.75，0.8，0.9，0.95，0.99，给出了正态变差系数的精确限表。表 3 提供了 $\gamma=0.75$的变差系数经典精确上限。

五、经典精确限与 Fiducial 精确限的比较

[1]指出，当 $c_{u,F}>0^+$ 时，置信度为 γ 的正态变差系数的 Fiducial 上限 $c_{u,F}$ 由下式确定：

$$F_{t_{n-1}}(\sqrt{n}/\hat{c})-F_{t_{n-1},\sqrt{n}/c_{u,F}}(\sqrt{n}/\hat{c})=1-\gamma \tag{5.1}$$

令

$$G_0\triangleq 1-F_{t_{n-1}}(\sqrt{n}/\hat{c})$$

式中 $F_{t_{n-1}}(\sqrt{n}/\hat{c})$ 是自由度为 $n-1$ 的学生 t- 分布的分布函数在 $\sqrt{n}/\hat{c}$ 处之值。显然，G_0 是 $\sqrt{n}/\hat{c}$ 的严格单调下降函数，且 $G_0\geqslant 0$，则

$$F_{t_{n-1},\sqrt{n}/c_{u,F}}(\sqrt{n}/\hat{c})=\gamma-G_0$$

这相当于，置信度为 γ 的 c_u 值即置信度为 $\gamma-G_0$ 的 $c_{u,F}$ 值。故

$$c_u\geqslant c_{u,F}$$

等式在 $G_0=0$ 时成立。

据 Odeh 和 Owen(1980)[9]，学生 t- 分布函数可表为：

$$F_{t_\nu}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}+\dfrac{1}{\pi}\sqrt{x(1-x)}\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots b_{(\nu-3)/2}x^{(\nu-3)/2}) & (\nu \text{ 为奇数})\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{1-x}}{2}(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots c_{(\nu-2)/2}x^{(\nu-2)/2} & (\nu \text{ 为偶数})\end{cases}$$

式中

$$b_0=1,\quad b_k=\frac{2k}{2k+1}b_{k-1},\quad \left(k=1,2,\cdots,\ \frac{\nu-3}{2}\right)$$

$$c_0=1,\quad c_k=\frac{2k-1}{2k}c_{k-1},\quad \left(k=1,\ 2\cdots,\ \frac{\nu-2}{2}\right),$$

$$t=\sqrt{n}/\hat{c},\quad \nu=n-1,\quad x=\frac{(n-1)}{(n-1)+t^2}$$

由此，可算得 G_0 如表 2。

表2 $G_0(n,\hat{c})$ 值

$\hat{c}$ \ n	3	4	5	6	7	8
0.01	1.667×10^{-5}	1.378×10^{-7}	1.200×10^{-9}	1.389×10^{-11}	6.000×10^{-12}	1.740×10^{-12}
0.10	1.658×10^{-3}	1.366×10^{-4}	1.184×10^{-5}	1.057×10^{-6}	9.622×10^{-8}	8.876×10^{-9}
0.20	6.536×10^{-3}	1.064×10^{-3}	1.822×10^{-4}	3.210×10^{-5}	5.764×10^{-6}	1.049×10^{-6}

可见，当 $n>8$，$\hat{c}\leqslant 0.20$时，$G_0<10^{-6}$，$c_u-c_{u,F}<5\times10^{-6}$，工程上可以认为 $c_u=c_{u,F}$。当 $n\leqslant 8$，$\hat{c}\leqslant 0.20$时，c_u 略大于 $c_{u,F}$。

在工程实践中，应用 c_u 则更为保险。

承王树棠高级工程师编制了优异的计算程序及帮助计算了 c_u 表，谨致谢意！

表3 正态分布变差系数的置信上限

*** $\gamma=0.750$ ***

N/c	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
3	0.018645	0.037292	0.055944	0.074606	0.093278	0.111964	0.130669	0.149392	0.168136	0.186906
4	0.015730	0.031462	0.047199	0.062943	0.078696	0.094460	0.110238	0.126033	0.141846	0.157679
5	0.014424	0.028851	0.043281	0.057717	0.072161	0.086615	0.101081	0.115558	0.130053	0.144566
6	0.013673	0.027348	0.041026	0.054709	0.068399	0.082097	0.095806	0.109527	0.123260	0.137010
7	0.013179	0.026360	0.039544	0.052731	0.065926	0.079128	0.092338	0.105560	0.118794	0.132041
8	0.012827	0.025655	0.038486	0.051321	0.064161	0.077008	0.089864	0.102729	0.115606	0.128495
9	0.012561	0.025123	0.037688	0.050256	0.062830	0.075410	0.087997	0.100594	0.113201	0.125819
10	0.012352	0.024706	0.037062	0.049421	0.061785	0.074155	0.086532	0.098918	0.111313	0.123719
11	0.012183	0.024368	0.036555	0.048744	0.060939	0.073139	0.085346	0.097560	0.109784	0.122018
12	0.012043	0.024088	0.036134	0.048184	0.060238	0.072297	0.084363	0.096486	0.108518	0.120608
13	0.011925	0.023852	0.035780	0.047711	0.059646	0.071586	0.083533	0.095486	0.107447	0.119417
14	0.011824	0.023649	0.035475	0.047305	0.059138	0.070976	0.082820	0.094671	0.106529	0.118398
15	0.011736	0.023472	0.035211	0.046952	0.058697	0.070446	0.082201	0.093963	0.105731	0.117508
16	0.011658	0.023317	0.034978	0.046642	0.058309	0.069981	0.081657	0.093340	0.105030	0.116728
17	0.011590	0.023180	0.034772	0.046367	0.057965	0.069567	0.081175	0.092788	0.104408	0.116036
18	0.011528	0.023057	0.034588	0.046121	0.057658	0.069198	0.080743	0.092294	0.103852	0.115417
19	0.011473	0.022947	0.034422	0.045900	0.057380	0.068865	0.080355	0.091850	0.103351	0.114860
20	0.011423	0.022846	0.034271	0.045699	0.057129	0.068563	0.080003	0.091447	0.102897	0.114354
21	0.011377	0.022755	0.034134	0.045516	0.056900	0.068288	0.079681	0.091079	0.102483	0.113894
22	0.011335	0.022671	0.034009	0.045348	0.056691	0.068037	0.079387	0.090743	0.102104	0.113472
23	0.011297	0.022594	0.033893	0.045194	0.056498	0.067805	0.079116	0.090433	0.101755	0.113084
24	0.011261	0.022523	0.033786	0.045051	0.056318	0.067591	0.078866	0.090147	0.101433	0.112725
25	0.011228	0.022457	0.033687	0.044919	0.056154	0.067392	0.078635	0.089882	0.101134	0.112392
26	0.011197	0.022396	0.033595	0.044796	0.056000	0.067208	0.078419	0.089634	0.100856	0.112082
27	0.011169	0.022338	0.033509	0.044682	0.055857	0.067035	0.078217	0.089404	0.100596	0.111794
28	0.011142	0.022285	0.033428	0.044574	0.055722	0.066874	0.078029	0.089189	0.100353	0.111523
29	0.011117	0.022234	0.033353	0.044473	0.055596	0.066722	0.077852	0.088986	0.100125	0.111270
30	0.011093	0.022187	0.033282	0.044379	0.055478	0.066580	0.077686	0.088796	0.099911	0.111031
40	0.010915	0.021830	0.032747	0.043664	0.054584	0.065507	0.076432	0.087362	0.098295	0.109233
60	0.010718	0.021437	0.032157	0.042878	0.053601	0.064325	0.075052	0.085782	0.096515	0.107252
120	0.010484	0.020969	0.031454	0.041940	0.052426	0.062915	0.073405	0.083897	0.094391	0.104898

* * * $\gamma=0.750$ * * *

N	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.20
3	0.205705	0.224535	0.243403	0.262307	0.281251	0.300241	0.319280	0.338371	0.357519	0.376727
4	0.173537	0.189420	0.205332	0.221275	0.237249	0.253261	0.269313	0.285401	0.301535	0.317716
5	0.159098	0.173652	0.188227	0.202830	0.217460	0.232121	0.246812	0.261538	0.276299	0.291098
6	0.150777	0.164561	0.178366	0.192196	0.206047	0.219925	0.233829	0.247765	0.261729	0.275725
7	0.145303	0.158584	0.171880	0.185197	0.198536	0.211899	0.225282	0.238696	0.252134	0.265603
8	0.141397	0.154315	0.167249	0.180202	0.193174	0.206166	0.219181	0.232219	0.245281	0.258369
9	0.138451	0.151095	0.163755	0.176433	0.189126	0.201840	0.214574	0.227329	0.240108	0.252910
10	0.136135	0.148566	0.161011	0.173471	0.185947	0.198442	0.210955	0.223488	0.236042	0.248619
11	0.134262	0.146519	0.188789	0.171074	0.183374	0.195690	0.208025	0.220378	0.232750	0.245145
12	0.132709	0.144822	0.186948	0.169087	0.181240	0.193410	0.205596	0.217800	0.230021	0.242264
13	0.131398	0.143389	0.185392	0.167408	0.179438	0.191483	0.203543	0.215621	0.227715	0.239828
14	0.130272	0.142158	0.184057	0.165967	0.177891	0.189829	0.201781	0.213750	0.225736	0.237739
15	0.129294	0.141090	0.182896	0.164715	0.176546	0.188391	0.200251	0.212124	0.224016	0.235924
16	0.128435	0.140151	0.181877	0.163615	0.175365	0.187128	0.198906	0.210697	0.222503	0.234328
17	0.127672	0.139317	0.180973	0.162639	0.174317	0.186007	0.197712	0.209429	0.221162	0.232911
18	0.126990	0.138572	0.180163	0.161766	0.173380	0.185005	0.196643	0.208296	0.219962	0.231643
19	0.126376	0.137900	0.149435	0.160979	0.172535	0.184102	0.195682	0.207275	0.218880	0.230502
20	0.125819	0.137292	0.148774	0.160267	0.171769	0.183284	0.194809	0.206348	0.217900	0.229468
21	0.125312	0.136737	0.148172	0.159617	0.171071	0.182538	0.194014	0.205505	0.217008	0.228525
22	0.124847	0.136229	0.147621	0.159022	0.170433	0.181854	0.193286	0.204731	0.216189	0.227660
23	0.124419	0.135762	0.147114	0.158474	0.169844	0.181225	0.192616	0.204020	0.215436	0.226865
24	0.124023	0.135330	0.146644	0.157968	0.169301	0.180644	0.191998	0.203363	0.214740	0.226130
25	0.123657	0.134929	0.146210	0.157499	0.168796	0.180105	0.191423	0.202753	0.214094	0.225448
26	0.123316	0.134556	0.145805	0.157062	0.168328	0.179603	0.190889	0.202186	0.213494	0.224814
27	0.122998	0.134209	0.145427	0.156654	0.167890	0.179135	0.190390	0.201656	0.212933	0.224222
28	0.122700	0.133883	0.145074	0.156273	0.167480	0.178697	0.189924	0.261160	0.212408	0.223668
29	0.122420	0.133578	0.144742	0.155915	0.167096	0.178285	0.189485	0.200695	0.211916	0.223147
30	0.122157	0.133290	0.144430	0.155578	0.166734	0.177899	0.189073	0.200258	0.211452	0.222658
40	0.120175	0.131124	0.142079	0.153040	0.164008	0.174983	0.185967	0.196958	0.207960	0.218970
60	0.117993	0.128738	0.139488	0.150243	0.161004	0.171771	0.182544	0.193324	0.204111	0.214905
120	0.115387	0.125890	0.136396	0.147905	0.157418	0.167936	0.178457	0.188983	0.199515	0.210051

参 考 文 献

[1] 周源泉，正态变差系数的Fiducial及Bayes限，机械工程学报，**22**，3 (1986)，67—74.

[2] Mckay, A. T., Distribution of the coefficient of variation and extended 't' distribution, *J. R. Statist. Soc.*, **95** (1932), 695—698.

[3] Pearson, E. S., Comparison of A. T. Mckay's approximation with experimental sampling results, *J. R. Statist. Soc.*, **95** (1932), 703—704.

[4] Fieller, E. C., A numerical test of the adequacy of A. T. Macky's approximation, *J. R. Statist. Soc.*, **95** (1932), 699—702.

[5] Koopmans, L. H., D. B. Owen and J. I. Rosenblatt, Confidence intervals for the coefficient of variation for the normal and lognormal distributions, *Biometrika*, **51** (1964), 25—32.

[6] Johnson, N. L. and B. L. Welch, Applications of the non-central t-distribution, *Biometrika*, **27** (1940), 362—381.

[7] 周源泉，正态可靠寿命的Bayes限、Fiducial限及经典限，电子学报，**14**，2 (1986)，46—52.

[8] 山内二郎，《统计数值表》，JSA (1972).

[9] Odeh, R. E. and D. B. Owen, *Tables for Normal Tolerance Limits, Sampling plans and Screening*, Dekker (1980).

[10] Brent, R. P., An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function, *Comput. J.*, **14** (1971), 422—425.

Classical Limits for the Coefficient of Variation for the Normal Distribution

Zhou Yuan-quan

(*Beijing Institute of Strength and Environment, Beijing*)

Abstract

The exact classical limits for the coefficient of variation c for the normal distribution are derived. The hand-calculating approximated classical limits for c having high accuracy are given to meet practical engineering needs. Using Odeh and Owen's computational method and Brent's algorithm, the tables for the γ-upper exact classical limits of coefficient of variation for normal distribution are calculated for the different confidence coefficient γ, the sample size $n=1(1)30$, 40, 60, 120, the sample coefficient of variation $\hat{c}=0.01(0.01)0.20$. It is shown that if $n\leqslant 8$, $\hat{c}\leqslant 0.2$, then the γ-upper exact classical limits c_u for c are slightly higher than the exact fiducial limits $c_{u,F}$ for c, if $n>8$, $\hat{c}\leqslant 0.2$, then $c_u-c_{u,F}<5\times 10^{-6}$.