应用数学和力学，第10卷第5期（1989年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

不动点指数及其对传染病传播模型的非线性积分方程的应用*

张石生　边文明

（四川大学数学系）　（河南师大数学系）

（1988年1月13日收到）

摘　要

本文研究了一类具边界控制条件的正算子的不动点指数问题，得到了几个有较好应用价值的不动点指数为1或0的条件，以及一个更为广泛的锥拉伸与锥压缩不动点定理，推广和改进了[3，8，9]中的相应结果．作为应用，文中也讨论了传染病传播模型的非线性积分方程具正连续周期解的条件．

不动点指数理论是非线性分析的重要组成部分，它与映象的不动点，固有元以及许多类型的非线性积分，微分方程的解的存在性密切相关（见[1～3　5～9]）．

本文的目的是通过转换算子的方法，研究了一类具边界控制条件的正算子的不动点指数问题，得到了几个具有较好应用价值的不动点指数为1或0的条件．在本文的第二节，我们给出了一个更为广泛的锥拉伸与锥压缩的不动点定理，改进和推广了[3，8，9]中相应的结论．作为前述结果的应用，我们在第三节中，讨论了传染病传播模型的非线性积分方程具有正连续周期解的条件．我们的结果与[6，7]中相应的结果不同，而且也给出了一个新的判别法．

一、关于不动点指数的几个结果

本节及下节处处假设E是实 Banach 空间，P为E中的锥，Ω为E中的有界开集，$i(A, P\cap\Omega, P)$表示映象$A:P\cap\Omega\to P$的不动点指数．

定义[4]　映象$A:P\to E$称为α-凸的，$\alpha>0$如果：

$$A(tx)\leqslant t^{\alpha}Ax \qquad (\forall x\in P,\ t\in(0,1))$$

或等价地，

$$A(tx)\geqslant t^{\alpha}Ax \qquad (\forall x\in P,\ t\geqslant 1)$$

* 国家自然科学基金资助项目．

引理1[1]　设$\theta\in\Omega$，$A:P\cap\bar{\Omega}\to P$满足：

$$Ax\neq\mu x\qquad(\forall x\in P\cap\partial\Omega,\ \mu\geqslant1)$$

的凝聚映象．则必有$i(A,\ P\cap\Omega,\ P)=1$

引理2[1]　设A，Ω如引理1．如果存在$u_0>\theta$使得$x-Ax\neq tu_0$（$\forall x\in P\cap\partial\Omega$，$t\geqslant0$），则必有$i(A,\ P\cap\Omega,\ P)=0$．

引理3[3]　设Ω如引理1，$A:P\cap\bar{\Omega}\to P$为全连续映象．如果$\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega}\|Ax\|>0$并且对任意的$x\in P\cap\partial\Omega$，$t\in(0,\ 1]$，都有$Ax\neq tx$，则必有$i(A,\ P\cap\Omega,\ P)=0$．

定理1　设$A:P\cap\bar{\Omega}\to P$为凝聚映象，且在$P\cap\partial\Omega$上无不动点，$\theta\in\Omega$．如果存在单调增的1-凸映象$B:P\to P$满足条件

$$\{B^nx\}\text{有上界且}Ax\leqslant Bx\qquad(\forall x\in P\cap\partial\Omega)$$

则$i(A,\ P\cap\Omega,\ P)=1$．

证明　由引理1，只须验证$Ax\neq\mu x$（$\forall x\in P\cap\partial\Omega$，$\mu\geqslant1$）．设相反，则存在$x_0\in P\cap\partial\Omega$及$t_0\geqslant1$，使得

$$Ax_0=\mu_0x_0$$

由于A在$P\cap\partial\Omega$上无不动点，故$\mu_0>1$．于是

$$Bx_0\geqslant Ax_0=\mu_0x_0$$

依次用B作用于上式两端，并注意B的单调增性及1-凸性，由归纳法可证：

$$B^nx_0\geqslant\mu_0^nx_0\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

由假定$\{B^nx_0\}$有上界，设为u，于是有：

$$\theta\leqslant x_0\leqslant\frac{1}{\mu_0^n}B^nx_0\leqslant\frac{1}{\mu_0^n}u\qquad(n\geqslant1)$$

令$n\to\infty$，即得$x_0=\theta\in P\cap\partial\Omega$，这与$\theta\in\Omega$相矛盾．于是，由引理1知：

$$i(A,\ P\cap\Omega,\ P)=1$$

证毕．

推论　设A，Ω如定理1．设$B:P\to P$是一个正齐次，单调增的u_0-凸映象，$u_0>\theta_0$如果存在$u>\theta$，使得$Bu\leqslant u$，并且

$$Ax\leqslant Bx\qquad(\forall x\in P\cap\partial\Omega)$$

（u_0-凸的定义见[3]）则：

$$i(A,\ P\cap\Omega,\ P)=1$$

证明　易知，B为单调增的1-凸映象．对于任意的$x\in P\cap\partial\Omega$，根据u_0-凸的性质知，存在α_1，β_1，α_2，β_2，>0，使得

$$\alpha_1u_0\leqslant Bx\leqslant\beta_1u_0,\qquad\alpha_2u_0\leqslant Bu\leqslant\beta_2u_0$$

因此得

$$Bx\leqslant\beta_1u_0\leqslant\frac{\beta_1}{\alpha_2}Bu\leqslant\frac{\beta_1}{\alpha_2}u$$

根据归纳法及B的正齐次性易证

$$B^nx\leqslant\frac{\beta_1}{\alpha_2}B^nu\leqslant\frac{\beta_1}{\alpha_2}B^{n-1}u\leqslant\cdots\leqslant\frac{\beta_1}{\alpha_2}u.$$

即$\{B^nx\}$有上界．于是由x的任意性及定理1知推论的结论成立．证毕．

定理2　设A，Ω如定理1，P为正规锥．如果存在单调增1-凸映象$B:P\cap\bar{\Omega}\to P\cap\bar{\Omega}$，使

$$Ax \leqslant Bx \qquad (\forall x \in P \cap \partial\Omega)$$

则 $i(A, P\cap\Omega, P)=1$.

证明 若存在$x_0 \in P\cap\partial\Omega$，$\mu_0>1$，使得$Ax_0=\mu_0 x_0$，则仿定理 1 可证$x_0 \leqslant \frac{1}{\mu_0^n}B^n x_0$ ($n\geqslant 1$)．由假设条件$B^n x_0 \in P\cap\bar{\Omega}$，因而存在$M>0$，使得$\|B^n x_0\|\leqslant M$ ($n\geqslant 1$)．再由P的正规性知，存在$N>0$，使得：

$$\|x_0\| \leqslant \frac{1}{\mu_0^n} N\|B^n x_0\| \leqslant \frac{1}{\mu_0^n} N\cdot M \qquad (n\geqslant 1)$$

令$n\to\infty$，即知$x_0=\theta$，这与$\theta\in\Omega$矛盾．于是引理 1 的条件满足，从而定理 2 得证．

定理3 设$A: P\cap\bar{\Omega}\to P$为凝聚映象且在$P\cap\partial\Omega$上无不动点．如果存在单调增加，可加正齐次映象$B: P\to P$及$u_0>\theta$使得

$$Bu_0 \geqslant u_0 \qquad Ax\geqslant Bx \qquad (\forall x\in P\cap\partial\Omega)$$

则

$$i(A, P\cap\Omega, P)=0$$

证明 我们只须验证引理 2 的条件满足．若不然，即存在$x_0\in P\cap\partial\Omega$，$t_0\geqslant 0$，使得$x_0-Ax_0=t_0u_0$，根据定理的假设条件知，$t_0>0$并且

$$Bx_0+t_0u_0\leqslant x_0$$

用B作用于上式两端，注意到B的单调增，可加性，正齐次性及$Bu_0\geqslant u_0$即得

$$B^2x_0+t_0u_0\leqslant B^2x_0+t_0Bu_0\leqslant Bx_0\leqslant x_0-t_0u_0$$

即
$$B^2x_0+2t_0u_0\leqslant x_0$$

依次用B作用于上式两端，由归纳法易知：

$$B^n x_0+nt_0u_0\leqslant x_0 \qquad (n\geqslant 1)$$

或者
$$u_0\leqslant \frac{1}{nt_0}(x_0-B^n x_0)\leqslant \frac{1}{nt_0}x_0 \qquad (n\geqslant 1)$$

令$n\to\infty$即得$u_0=\theta$，这与$u_0>\theta$相矛盾．于是引理 2 的条件得到满足．定理 3 得证．

定理4 设$A: P\cap\bar{\Omega}\to P$为全连续映象，在$P\cap\partial\Omega$上无不动点 $\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega}\|Ax\|>0$．如果存在单调增1-凸映象$B: P\to P$使得：对任意的$x\in P\cap\partial\Omega$，

$$Ax\geqslant Bx \text{ 且}\{B^n x\}\text{有正的下界，则}$$

$$i(A, P\cap\Omega, P)=0.$$

证明 我们只须证明在本定理的条件下，引理 3 的条件满足．事实上，如果存在$x_0\in P\cap\partial\Omega$及$\mu_0\in(0, 1]$使得$Ax_0=\mu_0x_0$，则易知$\mu_0\in(0, 1)$且：

$$Bx_0\leqslant \mu_0x_0$$

设u为$\{B^n x_0\}$的一个正下界，则由归纳法可证：

$$\mu_0^n x_0\geqslant B^n x_0\geqslant u>\theta \qquad (n\geqslant 1)$$

令$n\to\infty$，得$\theta\geqslant u>\theta$矛盾．从而引理 3 的条件满足．定理 4 证毕．

注 易知，从锥到其自身的线性映象是单调增，1-凸正齐次映象，因此上述各定理中的控制算子B均可取作线性正算子．这就可把所考虑的非线性算子的问题转化为一个仅在边界上与之相关的线性算子的问题，从而把问题加以简化，这正是前述结果的优点，

二、推广的锥拉伸与锥压缩不动点定理

本节给出如下一个不动点定理。

定理5 设Ω_1，Ω_2为E的有界开子集，$\theta\in\Omega_1\subset\Omega_2$，$A:P\cap\bar{\Omega}_2\to P$为凝聚映象并且$P$是一个体锥。如果下列条件至少有一成立

$$(\mathrm{F}_1)\begin{cases}Ax\not\geqslant(1+\varepsilon)x,\ \left(\forall x\in P\cap\partial\Omega_1,\ \varepsilon\geqslant\varepsilon_1\quad \varepsilon_1=\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega_1}\dfrac{\|x-Ax\|}{\|x\|}\right) & (2.1)\\ Ax\not\leqslant(1-\varepsilon)x,\ (\forall x\in P\cap\partial\Omega_2,\ \varepsilon>0) & (2.2)\end{cases}$$

$$(\mathrm{F}_2)\begin{cases}Ax\not\geqslant(1+\varepsilon)x,\ \left(\forall x\in P\cap\partial\Omega_2,\ \varepsilon\geqslant\varepsilon_2,\ \varepsilon_2=\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega_2}\dfrac{\|x-Ax\|}{\|x\|}\right) & (2.3)\\ Ax\not\leqslant(1-\varepsilon)x,\ (\forall x\in P\cap\partial\Omega_1,\ \varepsilon>0) & (2.4)\end{cases}$$

则A在$P\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$中有不动点。

证明 不失一般性，我们设条件(F_1)成立（(F_2)成立时证明类似），并且A在$P\cap\partial\Omega_1$及$P\cap\partial\Omega_2$上均无不动点（否则结论已经得证）。

首先，我们证明$\varepsilon_1>0$。事实上，如果$\varepsilon_1=0$，则存在$x_n\in P\cap\partial\Omega$，使得$Ax_n-x_n\to0$ $(n\to\infty)$。由于$I-A$为固有映象，因此，$\{x_n\}$有子列$\{x_{n_k}\}$满足$x_{n_k}\to x_0\in P\cap\partial\Omega_1(k\to\infty)$，从而$Ax_{n_k}\to Ax_0$。于是得$Ax_0=x_0$，这与$A$在$P\cap\partial\Omega_1$上无不动点的假设相矛盾，这就证明了$\varepsilon_1>0$。

其次，设存在$t_0\geqslant1$，$x_0\in P\cap\partial\Omega_1$使得$Ax_0=t_0x_0$，则$t_0>1$。由假设(2.1)知$t_0=1+\lambda_0<1+\varepsilon_1$，$Ax_0=x_0+\lambda_0x_0$。因此$\varepsilon_1>\lambda_0=\dfrac{\|Ax_0-x_0\|}{\|x_0\|}\geqslant\varepsilon_1$，矛盾。这就是说引理1的条件满足，因此由引理1得：

$$i(A,\ P\cap\Omega_1,\ P)=1$$

现在任取$u_0\in\dot{P}$，如果存在$t_0\geqslant0$，$x_0\in P\cap\partial\Omega_2$使得$x_0=Ax_0+t_0u_0$，则$t_0>0$，$Ax_0=x_0-t_0u_0<x_0$，于是存在$\varepsilon_0>0$，使得

$$Ax_0\leqslant(1-\varepsilon_0)x_0$$

这与假设条件(2.2)相矛盾。于是引理2的条件满足，从而

$$i(A,\ P\cap\Omega_2,\ P)=0$$

于是

$$i(A,\ P\cap(\Omega_2\backslash\bar{\Omega}_1),\ P)=i(A,\ P\cap\Omega_2,\ P)-i(A,\ P\cap\Omega_2,\ P)=-1$$

根据不动点指数的可解性，A在$P\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$中必有不动点。定理证毕。

注2.1 当定理5中的映象A为全连续且ε_2(或ε_1)<1时，条件(2.2)(或2.4))可以由下式代替

$$Ax\not\leqslant(1-\varepsilon)x\qquad(\forall x\in P\cap\partial\Omega_2,\ \varepsilon\in[\varepsilon_2,\ 1)\text{或}\forall x\in P\cap\partial\Omega,\ \varepsilon\in[\varepsilon_1,\ 1))$$

其证明是利用引理3而不用引理2。

注2.2 显然，定理5改进和推广了[1～3，8，9]中的相应结果。

三、传染病传播模型的积分方程的正解

非线性积分方程

$$x(t)=\int_{t-\tau}^{t} f(s,\ x(s))ds \tag{3.1}$$

其中 $\tau>0$，是描述某些传染病传播的数学模型，这些传染病具有按季节变化的周期接触率。这里$x(t)$表示在时刻t人口中患该病者的比率，$f(t,\ x(t))$表单位时间内新增加的患该传染病者的比率($f(t,\ 0)=0$)，τ表示个体保持被传染的时间长度。

在一般情况下，我们对函数f作如下的假定：

(H_1) $f(t,\ u)$在$R\times R^+\triangleq(-\infty,\ +\infty)\times[0,\ +\infty)$上非负、连续且

$$f(t,\ 0)=0 \qquad (\forall t\in R)$$

(H_2) $f(t+\omega,\ u)=f(t,\ u)(\omega>0 \quad \forall(t,\ u)\in R\times R^+)$

方程(3.1)的正连续周期解的存在性，在[5～7]中已经用不同的方法得到了研究。本节中，我们将使用前两节的结果得出关于方程(3.1)存在正连续周期解的更为深刻的条件。

以下记

$$E=\{x(t)\in C(R) \quad 且x(t)=x(t+\omega),\ \forall t\in R\}$$

$$P=\{x(t)\in E \quad 且x(t)\geqslant 0\},\ Ax(t)=\int_{t-\tau}^{t} f(s,\ x(s))ds$$

易证，E按通常的线性运算及如下范数：$\|x\|=\max\limits_{t\in[0,\omega]}|x(t)|$

为一实Banach空间，P为E上的正规锥，范数$\|x\|$关于P单调，$A:P\to P$为全连续算子。

定理6 设(H_1)，(H_2)及下列条件成立

(H_3) $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(t,\ u)}{u}\xrightarrow{一致地}a(t)\in P$ 且 $\max\limits_{t\in[0,\omega]}\int_{t-\tau}^{t} a(s)ds<1$

(H_4) 存在$u_0>0$使得 $c(t)=\dfrac{f(t,u_0)}{u_0}=\inf\limits_{0\leqslant v\leqslant u}\dfrac{f(t,\ v)}{v}$ 且 $\min\limits_{t\in[0,\omega]}\int_{t-\tau}^{t} c(s)ds\geqslant 1$

则，方程(3.1)有正的连续ω-周期解存在。

证明 由假设条件(H_3)知，存在$k>u_0>0$使得：

$$f(t,\ x(t))\leqslant(a(t)+\varepsilon_0)x(t) \qquad (\forall x(t)\in E,\ \|x\|\geqslant k)$$

其中$\varepsilon_0>0$满足

$$\max_{t\in[0,\omega]}\int_{t-\tau}^{t}[a(s)+\varepsilon_0]ds=h<1$$

令$M=\sup\limits_{\substack{u\in[0,k_1]\\ t\in[0,\omega]}} f(t,\ u)$，取$k_2>k_1$使得 $k_2\cdot h+\tau M\leqslant k_2$。记：

$$\Omega_1=\{x(t)\in E:|x(t)|<u_0\}, \qquad \Omega_2=\{x(t)\in E:\|x\|<k_2\}$$

$$B_1x(t)=\int_{t-\tau}^{t} c(s)x(s)ds$$

则易知，$\theta\in\Omega_1\subset\Omega_2$，$\Omega_1$，$\Omega_2$都是有界开子集，并且$B_1$为从$P$到$P$的线性连续映象。

对任意的$x(t)\in P\cap\partial\Omega_1\subset\{x(t)\in E:0\leqslant x(t)\leqslant u_0\}$，由假设条件$(H_4)$易知：

$$f(t,x(t))\geqslant\frac{f(t,\ u_0)}{u_0}x(t)=c(t)x(t)$$

$$Ax(t)=\int_{t-\tau}^{t}f(s,x(s))ds\geqslant\int_{t-\tau}^{t}c(s)x(s)ds=B_1x(t)$$

$$B_1u_0=\int_{t-\tau}^{t}c(s)u_0ds=u_0\int_{t-\tau}^{t}c(s)ds\geqslant u_0$$

如果$x(t)\in P\cap\bar{\Omega}_2$，即$\|x\|\leqslant k_2$，则

$$f(t,\ x(t))\leqslant(a(t)+\varepsilon_0)x(t)+M\qquad(\forall t\in R)$$

$$\|Ax(t)\|=\|\int_{t-\tau}^{t}f(s,x(s))ds\|=\|\int_{t-\tau}^{t}(a(s)+\varepsilon_0)x(s)ds+\tau M\|$$

$$\leqslant hk_2+\tau M\leqslant k_2$$

即 $A(P\cap\bar{\Omega}_2)\subset P\cap\bar{\Omega}_2$。

不妨设A在$P\cap\partial\Omega_1$，$P\cap\partial\Omega_2$上均无不动点（否则结论已获证），则分别由定理3及引理1得：

$$i(A,\ P\cap\Omega_1,\ P)=0\qquad i(A,\ P\cap\Omega_2,\ P)=1$$

于是：

$$i(A,\ P\cap(\Omega_2\backslash\bar{\Omega}_1),\ P)=i(A,\ P\cap\Omega_2,\ P)-i(A,\ P\cap\Omega_1,\ P)=1$$

因而，A在$P\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$中必有不动点$x^*(t)$，显然$x^*(t)$为方程(3.1)的正连续$\omega$-周期解。

下列说明满足定理6的条件的函数是存在的，同时它也说明了定理6与[7]中的结论不同。

例 考虑函数

$$f(t,\ u)=\frac{g(t)u^2}{u^3+1}$$

其中，$g(t)\in P$，$\int_{t-\tau}^{t}g(s)ds\geqslant 2^{-1}$。显然：

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f(t,\ u)}{u}=\lim_{u\to\infty}f(t,\ u)=0,\quad\frac{f(t,\ 1)}{1}=\frac{1}{2}g(f)=\inf_{0\leqslant v\leqslant 1}\frac{f(t,\ v)}{v}$$

因此，此函数满足条件$(H_1)\sim(H_4)$。由于$\lim\limits_{u\to\infty}f(t,\ u)=0$，所以它不满足[7]中的相应条件。

定理7 设(H_1)，(H_2)及下列条件之一成立

(H_5) 存在$k>r>0$，使得：

$f(t,u)\leqslant b(t)$，$\forall u\in[0,r],t\in R$；$f(t,\ u)\geqslant\frac{k}{\tau}$，$\forall u\geqslant k,t\in R$，其中$b(t)\in P$ $\int_{t-\tau}^{t}b(s)ds\leqslant r$。

$(H_5)'$ 存在$k>r>0$使得：

$f(t,\ u)\geqslant\frac{r}{\tau}$，$\forall u\in[0,r],t\in R$；$f(t,\ u)\leqslant\bar{b}(t)$，$\forall u\geqslant k,t\in R$。其中$\bar{b}(t)\in P$，$\int_{t-\tau}^{t}\bar{b}(s)ds$ $\leqslant k$。则方程(3.1)具有正连续ω-周期解。

证明 假设条件(H_5)成立（$(H_5)'$成立时证明类似）。

记：

$\Omega_1=\{x(t)\in E:\|x\|<r\}\qquad \Omega_2=\{x(t)\in E:\|x\|<k\}$

则，$\theta\in\Omega_1\subset\Omega_2$。下证定理 5 的 条件$(F_1)$成立。

事实上，如果存在$\varepsilon_0>0$及$x(t)\in P\cap\partial\Omega_1$，使得

$$Ax(t)\geqslant(1+\varepsilon_0)x(t)$$

则由(H_8)得

$(1+\varepsilon_0)x(t)\leqslant Ax(t)=\int_{t-\tau}^{t}f(s,x(s))ds\leqslant\int_{t-\tau}^{t}b(s)ds\leqslant r$ 从而知，$(1+\varepsilon_0)r=(1+\varepsilon_0)\cdot\|x\|\leqslant r$，矛盾。因此：

$$Ax(t)\not\geqslant(1+\varepsilon_0)x(t)\qquad(\forall x(t)\in P\cap\partial\Omega_1,\ \varepsilon>0)$$

又如果存在$\varepsilon_0>0$及$x(t)\in P\cap\partial\Omega_2$，使得

$$Ax(t)\leqslant(1-\varepsilon_0)x(t).$$

则$\varepsilon_0\in(0,1)$，并且

$$(1-\varepsilon_0)\|x\|=(1-\varepsilon_0)k\geqslant\|Ax(t)\|=\left\|\int_{t-\tau}^{t}f(s,x(s))ds\right\|$$

$$\geqslant\left\|\int_{t-\tau}^{t}\frac{k}{\tau}ds\right\|=k$$

矛盾。因此：

$$Ax(t)\not\leqslant(1-\varepsilon_0)x(t)\qquad(\forall x\in P\cap\partial\Omega_2,\ \varepsilon>0)$$

于是由定理 5 知，A为正不动点，即方程(3.1)具有正连续ω-周期解。

证毕。

参 考 文 献

[1] Fitzpatrick, P. M. and W. P. Petryshyn, Fixed point theorems and the fixed point index for multivalued maps in cones, *J. London. Math. Soc.*, **12**, 2 (1975), 75—85.

[2] Guo, D., Some fixed point theorems and applications, *Nonl. Anal.*, **10** (1986), 1293—1302.

[3] 郭大钧,《非线性泛函分析》, 山东科学技术出版社 (1985).

[4] Potter, A. J. B., Applications of Hilbert's projective metric to certain classes of nonhomogeneous operators, *Quart. J. Math.*, Oxford, **28** (1977), 93—96.

[5] Nussbaum, R., A periodicity threshold theorem for some nonlinear integral equations, *SIAM J. Math. Anal.*, **9** (1978), 356—376.

[6] Williams, L. R. and R. W. Legget, Nonzero solutions of nonlinear integral equations modeling infectious disease, *SIAM J. Math. Anal.*, **13** (1982), 112—121.

[7] 郭大钧, 传染病模型的非线性积分方程的解的个数, 数学年刊, **8**, 1 (1987), 27—31.

[8] Legget, R. W. and L. R. Williams, A fixed point theorem with applications to an infectious disease model, *J. Math. Anal. Appl.*, **76** (1980), 91—97.

[9] 杜旭光, 非线性算子的不动点及固有值, 科学通报, 5 (1983), 201—265.

Fixed Point Indexes and Its Applications to Nonlinear Integral Equations Modeling Infectious Diseases

Zhang Shi-sheng　　Bian Wen-ming

(*Sichuan University, Chengdu*)　　(*Henan Normal University, Kaifeng*)

Abstract

In this paper the fixed point index problem for a class of positive operators with boundary control conditions is discussed and some sufficient conditions for the fixed point index to be equal to 1 or 0 are given. Moreover, a general fixed point theorem of expansions and compressions for cone is obtained, which generalizes and improves the corresponding results of [3, 8, 9]. As an application, we utilize the results presented above to study the existence conditions of positive solutions of nonlinear integral equations modeling infectious diseases.