应用数学和力学，第10卷第6期(1989年6月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

奇异摄动边值问题的渐近展开*

周钦德　　李　勇

(吉林大学数学系，1986年9月17日收到)

摘　要

本文研究了奇异摄动边值问题：$\varepsilon y''=f(t,y,\varepsilon)$，$y(0)=\xi(\varepsilon)$，$y(1)=\eta(\varepsilon)$，其中$\varepsilon$是一个正小参数。在条件$f_y(0,y,0)\geqslant m_0(>0)$，$f_y(1,y,0)\geqslant m_0$和$f_y(t,y,\varepsilon)\geqslant 0$之下，我们证明了解的存在唯一性，并给出了解的一致有效渐近展开式，从而改进了已有的结果。

一、引　言

考虑边值问题

$$\varepsilon y''=f(t,y,\varepsilon) \tag{1.1}$$

$$y(0)=\xi(\varepsilon),\ y(1)=\eta(\varepsilon) \tag{1.2}$$

其中$f(t,y,\varepsilon)$，$\xi(\varepsilon)$和$\eta(\varepsilon)$在Ω:$0\leqslant t\leqslant 1$，$|y|<\infty$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varDelta$($\varDelta$是一正数)上是$2N+2$次连续可微的($N$是一非负整数)。

问题(1.1)、(1.2)已为许多作者讨论过[1~6]。但是在这些结果中仍有两个问题。第一，$f_y(t,y,\varepsilon)$在Ω上需有正下界；第二，在1981年章国华(K.W.Zhang)指出过：解的导数$y'(t,\varepsilon)$的渐近估计还未给出。而后，我国学者(见[6])曾经尝试解决这后一问题。然而，对$y'(t,\varepsilon)$的估计在整个区间上不是一致有效的。本文给出了解$y(t,\varepsilon)$和它的导数$y'(t,\varepsilon)$的一致有效渐近展开式。

我们假设：

(Ⅰ)　存在正数m_0，使得在Ω上，

$$f_y(0,y,0)\geqslant m_0,\ f_y(1,y,0)\geqslant m_0,\ f_y(t,y,\varepsilon)\geqslant 0$$

(Ⅱ)　存在$N+2$个C^2函数$y_0(t)$，$y_1(t)$，…，$y_{N+1}(t)$和一个正数K，使得

$$\left|\sum_{i=0}^{N+1}\varepsilon^{i+1}y_i''(t)-f\left(t,\sum_{i=0}^{N+1}\varepsilon^i y_i,\varepsilon\right)\right|\leqslant K\varepsilon^{N+3/2}\qquad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

在条件(Ⅰ)，(Ⅱ)之下，我们对边值问题(1.1)、(1.2)，证明了解的存在唯一性，并给出了解的一致有效渐近展开式。

---

* 钱伟长推荐。

二、主要结果

引理1　考虑边值问题

$$y''=F(t,y) \tag{2.1}$$

$$y(0)=A,\ y(1)=B \tag{2.2}$$

假设存在一对C^2函数$(\alpha(t),\ \beta(t))$使得在$[0,1]$上，

$$\alpha''(t)\geqslant F(t,\alpha(t)),\ \beta''(t)\leqslant F(t,\beta(t)),\ \alpha(t)\leqslant\beta(t),\ \alpha(0)\leqslant A\leqslant\beta(0),\ \alpha(1)\leqslant B\leqslant\beta(1)$$

此外，$F(t,y)$于$[0,1]\times[\alpha,\beta]$上是连续的。则边值问题(2.1)、(2.2)有解 $y(t)$ 满足$\alpha(t)\leqslant y(t)\leqslant\beta(t)$于$[0,1]$。

证明　见[7]。

记 $Y_N(t,\varepsilon)=\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i y_i(t)$，我们有

定理　在条件(Ⅰ)，(Ⅱ)之下，存在正数$\varepsilon_0\in(0,\varDelta]$和$M$，使得当$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$时，边值问题(1.1)、(1.2)有且仅有一个解$y(t,\varepsilon)$，并有估计式

$$|y(t,\varepsilon)-(Y_N(t,\varepsilon)+U_N(t,\varepsilon)+V_N(t,\varepsilon))|\leqslant M\varepsilon^{N+\frac{1}{2}}\qquad(0\leqslant t\leqslant 1) \tag{2.3}$$

$$|y'(t,\varepsilon)-(Y'_N(t,\varepsilon)+U'_N(t,\varepsilon)+V'_N(t,\varepsilon))|\leqslant M\varepsilon^{N}\qquad(0\leqslant t\leqslant 1) \tag{2.4}$$

其中　$U_N(t,\varepsilon)=\sum\limits_{i=0}^{2N}\mu^i u_i(\tau)$，$V_N(t,\varepsilon)=\sum\limits_{i=0}^{2N}\mu^i v_i(s)$，$\mu=\varepsilon^{\frac{1}{2}},\tau=\dfrac{t}{\mu},s=\dfrac{1-t}{\mu}$

$u_i(\tau)$和$v_i(s)$可唯一确定如下：

$$(\mathrm{A}_0)\quad\begin{cases}u''_0=\int_0^1 f_y(0,y_0(0)+\theta u_0,0)d\theta u_0\\[2ex] v''_0=\int_0^1 f_y(1,y_0(1)+\theta v_0,0)d\theta v_0\end{cases}$$

$$(\mathrm{A}_1)\quad\begin{cases}u''_1=\int_0^1 f_y(0,y_0(0)+\theta u_0,0)d\theta u_1+P_1(\tau,u_0)\\[2ex] v''_1=\int_0^1 f_y(1,y_0(1)+\theta v_0,0)d\theta v_1+Q_1(s,v_0)\end{cases}$$

$$(\mathrm{A}_i)\quad\begin{cases}u''_i=\int_0^1 f_y(0,y_0(0)+\theta u_0,0)d\theta u_i+P_i(\tau,u_0,\cdots,u_{i-1})\\[2ex] v''_i=\int_0^1 f_y(1,y_0(1)+\theta v_0,0)d\theta v_i+Q_i(s,v_0,\cdots,v_{i-1})\end{cases}$$

$$(i=2,\cdots,2N+2)$$

$$(\mathrm{B}_i)\quad u_i(\infty)=0,\ v_i(\infty)=0\qquad(i=0,\cdots,2N+2)$$

$$(\mathrm{C}_i)\quad u_i(0)=\begin{cases}\xi_i-y_i(0), & \text{当}i\text{是偶数}\\ 0\ , & \text{当}i\text{是奇数}\end{cases}$$

$$(\mathrm{D}_i)\quad v_i(0)=\begin{cases}\eta_i-y_i(1), & \text{当}i\text{是偶数}\\ 0\ , & \text{当}i\text{是奇数}\end{cases}$$

其中 $\xi_i=\frac{1}{i!}\xi^{(i)}(0)$, $\eta_i=\frac{1}{i!}\eta^{(i)}(0)$ $(i=0,\cdots,2N+2)$

(A_i)是分别通过展开下列方程并比较等式两边μ的同次幂系数得到的：

$$u''(\tau,\mu)=G(\tau,\mu),\quad v''(s,\mu)=H(s,\mu)$$

其中
$$G(\tau,\mu)=[f(t,\bar{y}(t,\varepsilon)+u(\tau,\mu),\varepsilon)-f(t,\bar{y}(t,\varepsilon),\varepsilon)]|_{t=\mu\tau}$$
$$H(s,\mu)=[f(t,\bar{y}(t,\varepsilon)+v(\varepsilon,\mu),\varepsilon)-f(t,\bar{y}(t,\varepsilon),\varepsilon)]|_{t=1-\mu s}$$
$$\bar{y}(t,\varepsilon)\sim y_0(t)+\mu y_1(t)+\mu^2y_2(t)+\cdots$$
$$u(\tau,\mu)\sim u_0(\tau)+\mu u_1(\tau)+\mu^2u_2(\tau)+\cdots$$
$$v(s,\mu)\sim v_0(s)+\mu v_1(s)+\mu^2v_2(s)+\cdots$$

证明 首先证明存在正数m_1和L，使得问题$(A_i)\sim(D_i)$有唯一解$u_i(\tau)$和$v_i(s)$，并有估计式：

$$\left.\begin{array}{ll}|u_i(\tau)|+|u_i'(\tau)|\leqslant L\exp[-m_1\tau] & (\tau\geqslant0;i=0,1,\cdots,2N+2)\\ |v_i(s)|+|v_i'(s)|\leqslant L\exp[-m_1s] & (s\geqslant0;i=0,1,\cdots,2N+2)\end{array}\right\}\tag{2.5}$$

对$(A_0)\sim(C_0)$，取上、下解$\beta(\tau)$，$\alpha(\tau)$为

$$\beta(\tau)=c\exp[-m_0^{\frac{1}{2}}\tau],\quad \alpha(\tau)=-\beta(\tau)\qquad(\tau\geqslant0)$$

其中$c=|\xi_0-y_0(0)|$。由类似于引理1的结果知，$(A_0)\sim(C_0)$有解$u_0(\tau)$满足$\alpha(\tau)\leqslant u_0(\tau)\leqslant\beta(\tau)$ $(\tau\geqslant0)$。联合(A_0)，便有

$$u_0'(\tau)=-\int_\tau^\infty u''(s)\,ds$$

由此可见(2.5)成立(当$i=0$)。

对问题$(A_1)\sim(C_1)$，取上、下解$\beta(\tau)$,$\alpha(\tau)$为

$$\beta(\tau)=c_1\exp[-m_1^{\frac{1}{2}}\tau]+\frac{M_1}{m_0-m_1}\exp[-m_1^{\frac{1}{2}}\tau],\quad \alpha(\tau)=-\beta(\tau)\qquad(\tau\geqslant0)$$

其中$c_1=|\xi_1-y_1(0)|$，M_1和m_1是正数，满足$m_1<m_0$，$|P_1(\tau,u_0(\tau))|\leqslant M_1\exp[-m_1^{\frac{1}{2}}\tau]$ $(\tau\geqslant0)$。

归纳地，对问题$(A_i)\sim(C_i)$ $(i=0,\cdots,k-1;k\leqslant2N+2)$，已证有解且(2.5)成立，则对问题$(A_k)\sim(C_k)$，取上、下解$\beta(\tau)$，$\alpha(\tau)$为

$$\beta(\tau)=c_k\exp[-m_1^{\frac{1}{2}}\tau]+\frac{M_k}{m_0-m_1}\exp[-m_1^{\frac{1}{2}}\tau],\qquad \alpha(\tau)=-\beta(\tau)$$

$$|P_k|\leqslant M_k\exp[-m_1^{\frac{1}{2}}\tau]\qquad(\tau\geqslant0)$$

与$i=1$时相同的证明可得解的存在性和估计式(2.5)(当$i=k$)。唯一性是显然的。$v_i(s)$的证明同$u_i(\tau)$。

再证存在性和估计式(2.3)、(2.4)。作变换

$$R_{N+1}(t,\varepsilon)=y(t,\varepsilon)-(Y_{N+1}(t,\varepsilon)+U_{N+1}(t,\varepsilon)+V_{N+1}(t,\varepsilon))\qquad(0\leqslant t\leqslant1)$$

则问题(1.1)、(1.2)变为问题

$$\varepsilon R''_{N+1}=\int_0^1 f_y(t,Y_{N+1}+U_{N+1}+V_{N+1}+\theta R_{N+1},\varepsilon)d\theta R_{N+1}+O(\varepsilon^{N+3/2})\tag{2.6}$$

$$R_{N+1}(0,\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+3/2}),\qquad R_{N+1}(1,\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+3/2})\tag{2.7}$$

取上、下解$\beta(t,\varepsilon)$、$\alpha(t,\varepsilon)$为

$$\beta(t,\varepsilon)=c\varepsilon^{N+1/2}\sin(t+t_0),\ \alpha(t,\varepsilon)=-\beta(t,\varepsilon)\qquad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

其中$c\gg 1$，$t_0>0$，$1+t_0<\pi$。由引理1知问题(2.6)、(2.7)有解$R(t,\varepsilon)$满足$\alpha(t,\varepsilon)\leqslant R_{N+1}(t,\varepsilon)\leqslant\beta(t,\varepsilon)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，因此，

$$|R_{N+1}(t,\varepsilon)|\leqslant M\varepsilon^{N+1/2},\ \text{从而},\ |R_N(t,\varepsilon)|\leqslant M\varepsilon^{N+1/2}\qquad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

可见(2.3)成立。

显然，存在$t_0\in(0,1)$，使得

$$|R_N'(t_0,\varepsilon)|=M_0\varepsilon^{N+1/2}\qquad(M_0\text{是一正数})$$

设(t_1,t_2)是任一区间，使得在其上，$|R_N'(t,\varepsilon)|>0$，且$|R_N'(t_1,\varepsilon)|\leqslant M_0\varepsilon^{N+1/2}$，或$|R_N'(t_2,\varepsilon)|\leqslant M_0\varepsilon^{N+1/2}$。为确定起见设为前者。注意

$$|R_N''(t,\varepsilon)|\leqslant M_1\varepsilon^{N-1/2}\qquad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

设$\lambda=2\sqrt{MM_1}+1$，由不等式

$$2M\varepsilon^{N+1/2}<\left|\int_{R_N'(t_1,\varepsilon)}^{\lambda\varepsilon^N}\frac{sds}{M_1\varepsilon^{N-1/2}}\right|$$

可得$|R_N'(t,\varepsilon)|<\lambda\varepsilon^N$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，否则，

$$2M\varepsilon^{N+1/2}<\left|\int_{R_N'(t_1,\varepsilon)}^{\lambda\varepsilon^N}\frac{sds}{M_1\varepsilon^{N-1/2}}\right|\leqslant\left|\int_{t_1}^{\bar t}\frac{|R_N'|\,|R_N''|dt}{M_1\varepsilon^{N-1/2}}\right|=\left|\int_{t_1}^{\bar t}R_N'dt\right|$$

$$=|R_N(\bar t,\varepsilon)-R_N(t_1,\varepsilon)|\leqslant 2M\varepsilon^{N+1/2}$$

矛盾。这表明(2.4)成立。唯一性显然。

三、一些例子

例1 考虑边值问题

$$\varepsilon y''=F(t,\varepsilon)y,\ y(0)=a,\ y(1)=b$$

其中F是$2N+1$次连续可微的函数，且$F(0,0)>0$，$F(1,0)>0$，$F(t,\varepsilon)\geqslant 0$，在$[0,1]\times[0,\Delta]$。

显然满足定理的条件，故可以给出边值问题解的一致有效渐近展开式。

例2 考虑边值问题

$$\varepsilon y''=cy^{2n+1}+f(t),\ y(0)=a,\ y(1)=b$$

其中c是一正数，f是C^{2n+1}函数，$f(0)\neq 0$，$f(1)\neq 0$。

显然，$y_0(t)=c^{-1}(f(t))^{1/(2n+1)}$，$y_i(t)\equiv 0$ $(i=1,\cdots)$，且存在正数m，使得

$$\int_0^1(y_0(0)+\theta u_0(\tau))^{2n}d\theta\geqslant m,\quad\int_0^1(y_0(1)+\theta u_0(\tau))^{2n}d\theta\geqslant m$$

$$\int_0^1(y_0(0)+\theta v_0(s))^{2n}d\theta\geqslant m,\quad\int_0^1(y_0(1)+\theta v_0(s))^{2n}d\theta\geqslant m$$

从而满足定理的条件。因此可给出边值问题解的一致有效渐近展开式。

注 在"I_q-稳定"的条件下，这里的结果对向量情形也适用。

参 考 文 献

[1] Fife, P. C., Semilinear elliptic boundary value problem with small parameters, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 52, 3 (1973), 205—232.

[2] Howes, F. A., A class of boundary value problems whose solutions possess angular limiting behavior, *Rocky Mtn. J. Math.*, 6 (1976), 591—607.

[3] Howes, F. A., Singularly perturbed semilinear systems, *Stud. Appl. Math.*, 61 (1979), 185—209.

[4] O'Donnell, M. A., Boundary and corner layer behavior in singularly perturbed semilinear systems boundary value problems, *SIAM J. Math. Anal.*, 2 (1984), 317—332.

[5] 章国华、刘光旭，奇摄动半线性系统的边界层和角层性质，应用数学和力学，5, 3 (1984), 337—344.

[6] 林宗池、倪守平，算子与边界双摄动的非线性方程边值问题的奇摄动，数学杂志，3, 3 (1983), 205—216.

[7] Nagumo, M., Über die differentialgleichung $y''=f(x,y,y')$, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, 19 (1937), 861—866.

The Asymptotic Expansions of Singularly Perturbed Boundary Value Problems

Zhou Qin-de Li Yong

(Dept. of Math., Jilin Univ., Changchun)

Abstract

In this paper we study the singularly perturbed boundary value problem: $\varepsilon y''=f(t,y,\varepsilon)$, $y(0)=\xi(\varepsilon)$, $y(1)=\eta(\varepsilon)$, where ε is a positive small parameter. In the conditions: $f_y(0,y,0)\geqslant m_0$, $f_y(1,y,0)\geqslant m_0$ and $f_y(t,y,\varepsilon)\geqslant 0$, we prove the existences, and uniformly valid asymptotic expansions of solutions for the given boundary value problems, and hence we improve the existing results.