

求解粘弹性圆管内流体波动的 杂交有限元方法*

陈耀松 曹念铮

(北京大学力学系, 1988年1月29日收到)

摘 要

本文提出了一个求解粘弹性管内流体流动的变分原理。采用特征函数展开式与有限单元法相结合的杂交方法, 求解内区的速度场及外区波的反射、透射系数。作为一个算例, 计算了轴对称血栓对简谐振荡流动的影响。

一、引 言

研究粘弹性管道内流体波动, 在生物力学、管道传输等方面有着非常重要的意义。动脉血管内血液流动应该用粘弹性圆管内的流体波动运动来模拟。对于长直圆管的情况, 已经有很多解析解方面的研究工作^{[1],[2],[3]}。近来, 对管壁有局部变化的非长直圆管情况也有了一些研究结果^[4]。但这些研究用的是小参数摄动方法, 故只能适应于壁面几何变化很小的情况。

为研究严重血栓等壁面几何变化很大的问题, 本文提出一种杂交方法, 该方法可以处理各种局部壁面变化的问题。方法结合了级数展开法和有限单元法各自的优点, 所以可以很方便地计算出波的反射与透射系数, 以及壁面弯曲区域内的各物理参量。

二、数 学 模 型

考虑轴对称不可压粘性流, 忽略流体运动方程中的非线性项, 则N-S方程化为

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.2)$$

假设 $\vec{u} = \vec{u}^* \exp[i\omega t]$, $p = p^* \exp[i\omega t]$, 其中 ω 为圆频率, 代入(2.1)、(2.2), 略去“*”

$$i\omega \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (2.3)$$

* 蔡树棠推荐。

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.4)$$

考虑管壁有局部变化的问题,如图1所示,将区域划分为三个。I区:上游平直段; II区:管壁弯段; III区:下游平直段。

管壁可以看成粘弹性体,忽略其质量(人体血管中这种近似成立),并假设水平方向管壁无运动,管壁径向位移 η 与其上所受力 F 的关系为

$$F = K\eta \quad (2.5)$$

其中 $K = K_i + iK_r$, K_i 为弹性系数, K_r 为粘滞系数。这样,流体在壁面 C, C_∞ 上必须满足的边条件为

$$u_z = 0 \quad \text{在 } C, C_\infty \text{ 上} \quad (2.6)$$

$$Ku_r = -i\omega T_{rr} \quad \text{在 } C, C_\infty \text{ 上} \quad (2.7)$$

由于是轴对称问题,故

$$u_r = 0 \quad \text{在对称轴}(r=0)\text{上} \quad (2.8)$$

在II区中,我们试图用有限元方法求解, I, III区中解可以写成特征函数展开的形式(下一节将会看到),设交界面 D 上的匹配条件

$$\vec{u} = \vec{u} \quad \text{在 } D \text{ 上} \quad (2.9)$$

$$\vec{n} \cdot \mathbf{T} = \vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}} \quad \text{在 } D \text{ 上} \quad (2.10)$$

其中 \mathbf{T} 为应力张量, \vec{n} 是交界面 D 的单位法向量,上面加“ $\bar{}$ ”的量表示I, III区域的物理量。

以长直段圆管半径 a 为特征长度,上游来波的特征速度 u_0 为特征速度,对(2.3)~(2.10)进行无量纲化,即令

$$r = r'a, \quad x = x'a, \quad \vec{u} = u_0 \vec{u}', \quad p = \rho u_0^2 p'$$

其中上标“ $'$ ”代表无量纲量。为书写方便起见,在以下无量纲的方程及边条件中略去“ $'$ ”,得

$$\frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} - \nabla p - iC_0 \vec{u} = 0 \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.12)$$

$$u_z = 0 \quad \text{在 } C, C_\infty \text{ 上} \quad (2.13)$$

$$iC_k = T_{rr} \quad \text{在 } C, C_\infty \text{ 上} \quad (2.14)$$

$$u_r = 0 \quad \text{在 } r=0 \quad (2.15)$$

$$\vec{u} = \vec{u} \quad \text{在 } D \text{ 上} \quad (2.16)$$

$$\vec{n} \cdot \mathbf{T} = \vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}} \quad \text{在 } D \text{ 上} \quad (2.17)$$

其中

$$Re = \frac{u_0 a}{\nu}, \quad C_0 = \frac{\omega a}{u_0}, \quad C_k = \frac{K}{\rho u_0 \omega}, \quad C_a = \frac{1}{Re}$$

(2.11)~(2.17)是控制方程及边条件。

三、直管中的特征函数展式

根据文献[5],在直管段(I, III区),可有满足(2.11)~(2.15)的特征函数展开式

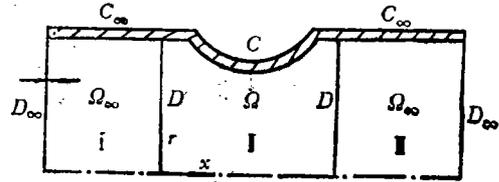


图 1

$$\bar{u}_r = \sum_{n=1}^N i\gamma_n A_n \{J_1(i\gamma_n r) + h_n J_1(ik_n r)\} \exp[i\gamma_n x] \quad (3.1)$$

$$\bar{u}_z = \sum_{n=1}^N -i A_n \{\gamma_n J_0(i\gamma_n r) + k_n h_n J_0(ik_n r)\} \exp[i\gamma_n x] \quad (3.2)$$

$$\bar{p} = \sum_{n=1}^N i A_n C_0 J_0(i\gamma_n r) \exp[i\gamma_n x] \quad (3.3)$$

其中 γ_n, k_n 为特征值, 满足如下方程

$$k_n \frac{J_1(i\gamma_n)}{J_0(i\gamma_n)} - \gamma_n \frac{J_1(ik_n)}{J_0(ik_n)} + i C_0 k_n + 2/Re \cdot \frac{k_n}{\gamma_n} = 0 \quad (3.4)$$

$$k_n^2 = i C_0 \cdot Re + \gamma_n^2 \quad (n=0, 1, 2, \dots, N) \quad (3.5)$$

其中 $h_n = -\frac{\gamma_n}{k_n} \cdot \frac{J_0(i\gamma_n)}{J_0(ik_n)}$

为常数, J_0, J_1 为零阶和一阶 Bessel 函数, A_n 为待定系数。(3.1)~(3.3) 这种类型的解最早由 Witzig 1914 年发现。

四、杂交有限元的变分原理

前面将流动区域分为三个。I, II 区中, 表达式 (3.1)~(3.3) 成立, III 区中可用有限元法求解, 但必须将这三个区域的解联接起来, 使(2.16)、(2.17)得到满足。

I 区中的解可以写为

$$\begin{aligned} \bar{u}_r = & A^i \gamma_1 [J_1(i\gamma_1 r) + h_1 J_1(ik_1 r)] \exp[i\gamma_1 x] \\ & + \sum_{n=1}^N A_n^r i \gamma_n [J_1(i\gamma_n r) + h_n J_1(ik_n r)] \exp[-i\gamma_n x] \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_z = & -A^i i [-\gamma_1 J_0(i\gamma_1 r) - k_1 h_1 J_0(ik_1 r)] \exp[i\gamma_1 x] \\ & + \sum_{n=1}^N A_n^r i [\gamma_n J_0(i\gamma_n r) + k_n h_n J_0(ik_n r)] \exp[-i\gamma_n x] \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{p} = & A^i i C_0 J_0(i\gamma_1 r) \exp[i\gamma_1 x] \\ & + \sum_{n=1}^N A_n^r i C_0 J_0(i\gamma_n r) \exp[-i\gamma_n x] \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中 A^i 是入射波的振幅, 是给定的, A_n^r 是反射波的振幅, 是待求的。

III 区中的解可以写为

$$\bar{u}_r = \sum_{n=1}^N A_n^i i \gamma_n [J_1(i\gamma_n r) + h_n J_1(ik_n r)] \exp[i\gamma_n x] \quad (4.4)$$

$$\bar{u}_z = \sum_{n=1}^N -A_n^i i [\gamma_n J_0(i\gamma_n r) + h_n k_n J_0(ik_n r)] \exp[i\gamma_n x] \quad (4.5)$$

$$\bar{p} = \sum_{n=1}^N A_n^i i C_0 J_0(i\gamma_n r) \exp[i\gamma_n x] \quad (4.6)$$

其中 A_n^i 为透射波的振幅, 亦是待定的.

为了将 I, II, III 区域的解匹配起来, 我们构造如下泛函

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{C_a}{2} \int_D [\nabla \bar{u} : (\nabla \bar{u})^T + \nabla \bar{u} : \nabla \bar{u}] d\tau + \frac{\lambda}{2} \int_D (\nabla \cdot \bar{u})^2 d\tau + i \frac{C_0}{2} \int_D \bar{u} \cdot \bar{u} d\tau \\ & - \frac{i}{2} C_k \int_D u_r^2 ds + \frac{C_a}{2} \int_{\Omega_\infty} [\nabla \bar{u}^S : (\nabla \bar{u}^S)^T + \nabla \bar{u}^S : \nabla \bar{u}^S] d\tau \\ & + \frac{i}{2} C_0 \int_{\Omega_\infty} \bar{u}^S \cdot \bar{u}^S \cdot d\tau - \frac{i C_k}{2} \int_{C_\infty} (\bar{u}_r^S)^2 ds \\ & + \int_D (\bar{n} \cdot \bar{T} \cdot \bar{u} - \bar{n} \cdot \bar{T} \cdot \bar{u} - \bar{n} \cdot \bar{T}^S \cdot \bar{u}^S) ds \end{aligned} \quad (4.7)$$

其中上标 I 和 S 分别表示入射波和散射波, λ 为罚参数. 下面证明, 若取 $V = \{\bar{u} \mid \bar{u} \in C^\infty, u_r|_{r=1} = 0\}$ 为试探函数空间, 上述泛函 Π 的变分问题 $\delta\Pi = 0$ 与罚函数意义下的原微分方程边值问题等价. 对(4.7)取变分

$$\delta\Pi = \delta(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8)$$

其中 $I_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 表示 (4.7) 右端的 8 个积分. 容易证明:

$$\begin{aligned} \delta(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) = & - \int_D (\nabla \cdot \bar{T} - i C_0 \bar{u}) \cdot \delta \bar{u} d\tau + \int_D (T_{rr} - i C_k u_r) \delta u_r ds \\ & + \int_D \bar{n} \cdot \bar{T} \cdot \delta \bar{u} ds \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中 $\bar{T} = C_a (\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T) - \lambda \nabla (\nabla \cdot \bar{u})$ 是罚函数近似下的应力张量.

$$\begin{aligned} \delta(I_5 + I_6 + I_7) = & - \int_{\Omega_\infty} (C_a \nabla^2 \bar{u}^S - \nabla \bar{p}^S - i C_0 \bar{u}^S) \cdot \delta \bar{u}^S d\tau \\ & + \int_{\partial \Omega_\infty} \bar{n} \cdot \bar{T}^S \cdot \delta \bar{u}^S ds \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\delta I_8 = \int_D (\bar{n} \cdot \delta \bar{T} \cdot \bar{u} + \bar{n} \cdot \bar{T} \cdot \delta \bar{u} - \bar{n} \cdot \delta \bar{T} \cdot \bar{u} - \bar{n} \cdot \bar{T} \cdot \delta \bar{u} - \bar{n} \cdot \bar{T}^S \cdot \bar{u}^S) ds \quad (4.10)$$

由(4.8)~(4.10):

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & - \int_D (\nabla \cdot \bar{T} - i C_0 \bar{u}) \cdot \delta \bar{u} d\tau + \int_D (T_{rr} - i C_k u_r) \cdot \delta u_r ds \\ & - \int_{\Omega_\infty} (\nabla \cdot \bar{T}^S - i C_0 \bar{u}^S) \delta \bar{u}^S d\tau + \int_{C_\infty} (\bar{T}_{rr}^S - i C_k \bar{u}_r^S) \cdot \delta \bar{u}_r^S ds \\ & + \int_D \bar{n} \cdot (\bar{T} - \bar{T}) \cdot \delta \bar{u} ds + \int_{D_\infty} \bar{n} \cdot \delta \bar{T}^S \cdot (\bar{u} - \bar{u}) \cdot ds \\ & + \int_{D_\infty} \bar{n} \cdot \bar{T}^S \cdot \delta \bar{u}^S ds \end{aligned} \quad (4.11)$$

其中 $\bar{T}^S = C_a (\nabla \bar{u}^S + (\nabla \bar{u}^S)^T) - \bar{p}^S \mathbf{I}$, \mathbf{I} 为单位张量. (4.11) 中, 由于 \bar{u}^S 是满足方程(2.11)、(2.12)及壁面边条件(2.14)的解, 故第三、四项积分为零. 因为在管的远上游和远下游

$\bar{T}^s, \bar{u}^s(x \rightarrow \infty)$ 趋近于零, 这样当取 D_∞ 离 I 区充分远时 (D_∞ 的意义见图1), (4.11) 中最后一项积分

$$\int_{D_\infty} \bar{n} \cdot \bar{T}^s \cdot \delta \bar{u}^s ds \rightarrow 0$$

因此, (4.11) 可写成

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & - \int_D (\nabla \cdot \bar{T} - i C_0 \bar{u}) \cdot \delta \bar{u} d\tau + \int_C (T_{rr} - i C_k u_r) \cdot \delta u_r ds \\ & + \int_D \bar{n} \cdot (\bar{T} - \bar{T}) \cdot \delta \bar{u} ds + \int_D \bar{n} \cdot \delta \bar{T}^s \cdot (\bar{u} - \bar{u}) ds \end{aligned} \quad (4.12)$$

可见, $\delta \Pi = 0$ 与罚函数意义下的 (2.11) ~ (2.17) 等价.

五、算 例

作为例子, 我们计算长直血管中出现血栓时流动情况. 根据人体血管的生理条件, 选取 $Re=2$ (即 $C_a=1/Re=1/2$), $C_0=1$, $C_k=3 \times 10^5 + 2 \times 10^2 i$, 血管的几何形状如图 2. 假设管径的变化为

$$R = \begin{cases} a[1 - (1-\alpha)\sin(\pi x/2L_1)] & 0 \leq x \leq L_1 \\ \alpha a & L_1 < x \leq L-L_1 \\ a[1 + (1-\alpha)\sin(\pi(x-L)/2L_1)] & L-L_1 < x \leq L \end{cases}$$

这里 α 是最小相对半径.

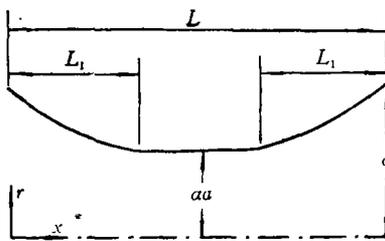


图 2

表 1

n	$Re(\gamma_n)$	$Im(\gamma_n)$
1	-0.00430	0.00311
2	-1.57175	4.50146
3	-1.80619	7.44599
4	-1.88192	8.93545

在以上条件下, 可由 (3.4)、(3.5) 求出四组特征根 γ_n, k_n, γ_n 的数值列在表 1 中. 由表 1 可以看出, 只有第一个根决定的波可以传播至很远, 而其它根所决定的波很快就会衰减掉. 故我们只取第一个特征根决定的波为入射波. 基于同样的原因, 透射波和反射波的截断项数亦取 1. 为了便于看出能量的变化, 重新定义透、反射系数如下

$$A_t = A_t^i \exp[i\gamma_1 L], \quad A_r = A_r^i$$

取入射波幅 $A_t^i = 1$. 计算结果列在表 2 中, 其中, $B = 1 - \alpha^2$ 是堵塞度, $E_t = |A_t|^2, E_r = |A_r|^2$ 分别为透射能量和反射能量, 总辐射能 $E_t + E_r$ 小于入射能 1, $E_d = 1 - E_t - E_r$ 是血栓段内的能量耗损.

为了验证数值方法, 首先计算了 $B=0, \alpha=1$ 即无血栓的平直管情况, 这时 I 区内的流动与 I, II 区一样可以准确求出, 在相应的准确解中 $A_r=0, A_t=0.9524-0.0615i$, 由表 2 可以看出, 这时的数值解 $A_t=0.9522-0.0619i$ 与之非常接近. 随着 B 的增大, A_r 增加, A_t 减少.

表 2 $L/a=15$ $L_1/a=3$ $Re=2.0$ $C_0=1.0$ $C_h=300000+200i$

B	A_r	E_r	A_i	E_i	E_d
0.00	$-0.00029-0.00034i$	0.00000	$0.95215-0.06189i$	0.91042	0.08958
0.50	$0.07714+0.06030i$	0.00959	$0.89548-0.09664i$	0.81123	0.17919
0.80	$0.12565+0.08790i$	0.02351	$0.85118-0.11882i$	0.73862	0.23787
0.75	$0.29343+0.14810i$	0.10803	$0.68978-0.17068i$	0.50493	0.38704
0.85	$0.56001+0.16266i$	0.34007	$0.42755-0.17945i$	0.21500	0.44493
0.90	$0.75152+0.11887i$	0.57891	$0.23830-0.13264i$	0.07438	0.34671
0.95	$0.92585+0.03615i$	0.85850	$0.06637-0.04667i$	0.00658	0.13492

六、讨 论

本文提出了一个杂交有限元变分原理, 用以求解粘弹性管道内的流动问题。作为算例, 计算了轴对称血栓对某一频率的脉动流动的影响。对于直管情况, 数值结果与准确解吻合很好。对于任意的周期脉动流动, 可以将其作 Fourier 展开, 求出其中的每一项后再叠加起来。本文算的是轴对称流动, 而提出的杂交变分原理是无此限制的, 只要能找到两端的特征解, 它可以计算任何三维流动。

参 考 文 献

- [1] Womersley, J. R., An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries, WADC Technical Report TR56-6114, Wright-Patterson AFB, Ohio (1957).
- [2] Mirsky, I., Wave propagation in a viscous fluid contained in an orthotropic elastic tube, *Biophys. J.*, 7 (1967), 165—186.
- [3] Atabek, H. B., Wave propagation through a viscous fluid contained in a tethered, initially stressed, orthotropic elastic tube, *Biophys. J.*, 8 (1968), 626—649.
- [4] Misra, J. C. and S. Chakravarty, Flow in arteries in the presence of stenosis, *J. Biomechanics*, 19 (1986), 907—918.
- [5] 冯元桢, 《生物力学》, 科学出版社 (1983).

A Hybrid FEM Algorithm for Fluid Flow in a Visco-Elastic Pipe

Chen Yao-song Cao Nian-zheng

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

A variational principle of hybrid FEM is proposed to solve the flow in a visco-elastic pipe. As an example, the influence of an axisymmetrical stenosis on an artery vibrating flow with a single frequency is calculated.