

杂交应力元增量分析非线性橡胶类材料*

范家齐 杨晓翔

(大庆石油学院, 1988年6月20日收到)

摘 要

本文基于增量 Reissner 变分原理, 对不可压缩的 Mooney 型橡胶类材料, 进行了非线性的有限元分析, 给出了杂交应力元的计算列式. 列式中考虑了不平衡力和不可压缩性偏差的修正项. 算例计算与精确解符合得很好.

一、引 言

橡胶类材料构件的几何和材料性能都是非线性的, 而且材料的非线性关系一般通过三个变形张量不变量来表述的. 本文, 基于增量 Reissner 变分原理, 采用整体的 Lagrange 法, 以 Green 应变张量的物理分量和 Kirchhoff 应力张量的物理分量建立起增量形式的杂交应力元的计算列式, 列式中考虑了不平衡力的修正项和不可压缩性偏差的修正项. 本文具体分析了工程中常用的轴对称问题, 显然, 可以采用同样的方法应用于其它情况. 用矩形和非矩形四边形等参数单元对受内压的无限长厚壁圆筒进行了计算, 其结果与精确解符合得很好. 算例中的应力已由 Kirchhoff 应力张量变换为 Cauchy 应力张量的物理分量.

二、应变与应力

对于非线性轴对称体, 应变与位移的关系为

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{m,\alpha} u_{m,\beta}^n), \quad \gamma_{\alpha 3} = 0, \quad \gamma_{33} = r^2 \left(\frac{u_1}{r} + \frac{u_1^2}{2r^2} \right) \quad (2.1)$$

为方便, 记应变矢量为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{12}]^T = [\gamma_{11} \quad \gamma_{33}/r^2 \quad \gamma_{22} \quad 2\gamma_{12}]^T \quad (2.2)$$

在上述两式中, $\gamma_{\alpha\beta}$ 为 Green 应变张量; $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 为其物理分量; $\alpha, \beta=1, 2$, 其中 1 为径向 r , 2 为轴向 z , 3 为环向 θ .

为计算应变增量, 以 $u_i = u_{i0} + \Delta u_i$ 代入(2.1)和(2.2)式, 得 $\varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}$, 其中应变增量矢量 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ 可以分解成线性部分 $\Delta \boldsymbol{\xi}$ 和非线性部分 $\Delta \boldsymbol{\eta}$, 即

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \boldsymbol{\xi} + \Delta \boldsymbol{\eta} \quad (2.3)$$

* 叶开沅推荐.

经运算, 它们分别为:

$$\Delta \xi = [H + A(u)] \Delta \varphi = B \Delta \varphi \quad (2.4)$$

$$\Delta \eta = \frac{1}{2} A(\Delta u) \Delta \varphi \quad (2.5)$$

式中

$$\Delta \varphi = \left[\frac{\partial \Delta u}{\partial r} \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial r} \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial z} \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial z} \quad \frac{\Delta u}{r} \right]^T \quad (2.6)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$A(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{u}{r} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

(2.6)式中已使用 $u=u_1$ 和 $w=u_2$, 以 Δu 和 Δw 代替(2.8)式中的 u 和 w , 即得(2.5)式中的矩阵 $A(\Delta u)$.

对于不可压缩的 Mooney 型橡胶类材料, 变形前状态的应变能密度^[1]为

$$W = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3) + h(I_3 - 1) \quad (2.9)$$

式中 I_1 , I_2 和 I_3 为变形张量第一, 二和三不变量; h 为水静压力; c_1 和 c_2 为橡胶材料常数.

Kirchhoff 应力张量 t^{ij} 与应变能密度 W 之间的关系为

$$t^{ij} = \partial W / \partial \gamma_{ij} \quad (2.10)$$

对于轴对称体, 具体形式为

$$\left. \begin{aligned} t^{\alpha\beta} &= 2c_1 \delta^{\alpha\beta} + 2c_2 [\delta^{\alpha\beta} (1 + \lambda^2) + 2\epsilon^{\alpha\lambda} \epsilon^{\beta\mu} \gamma_{\lambda\mu}] \\ &\quad + 2h\lambda^2 (\delta^{\alpha\beta} + 2\epsilon^{\alpha\lambda} \epsilon^{\beta\mu} \gamma_{\lambda\mu}) \\ t^{\alpha 3} &= 0 \\ r^2 t^{33} &= 2c_1 + 4c_2 (1 + \gamma_{\alpha}^{\alpha}) + 2h\varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

式中

$$\lambda = 1 + u/r \quad (2.12)$$

$$\varphi = 1 + 2\gamma_{\alpha}^{\alpha} + 2\epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\mu} \gamma_{\alpha\lambda} \gamma_{\beta\mu} \quad (2.13)$$

δ^{ij} 为 Kronecker 符号; ϵ^{ij} 为二维置换符号; α, β, λ 和 μ 均为 1, 2.

为方便, 记应力矢量为

$$S = [S^{11} \quad S^{33} \quad S^{22} \quad S^{12}]^T = [t^{11} \quad r^2 t^{33} \quad t^{22} \quad t^{12}]^T \quad (2.14)$$

式中 S^{ij} 为 Kirchhoff 应力张量 t^{ij} 的物理分量.

利用上述式子, 经运算得

$$S = 2(c_1 + 2c_2 + h)Y + [2(c_2 + h)V + 2hW]\epsilon \quad (2.15)$$

式中

$$Y = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^T \quad (2.16)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 & 0 & \text{对称} \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\varepsilon_{22} & 0 & \text{对称} \\ 2\varepsilon_{33} & 2\varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{12} & 0 & -\varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

由(2.15)式, 可得 Kirchhoff 应力增量张量的物理分量为

$$\Delta S^{ij} = \frac{\partial S^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \Delta \varepsilon_{kl} + \frac{\partial S^{ij}}{\partial h} \Delta h = \Delta S_1^{ij} + Q^{ij} \Delta h \quad (2.19)$$

式中

$$\Delta S_1^{ij} = \frac{\partial S^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \Delta \varepsilon_{kl} = C^{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} \quad (2.20)$$

为偏 Kirchhoff 应力增量张量的物理分量,

$$Q^{ij} = \partial S^{ij} / \partial h \quad (2.21)$$

(2.19)和(2.20)式可表示矩阵形式为

$$\Delta S = \Delta S_1 + Q \Delta h \quad (2.22)$$

$$\Delta S_1 = C \cdot \Delta \varepsilon \quad (2.23)$$

式中:

$$C = 2(c_2 + h)V + 4hW \quad (2.24)$$

$$Q = 2Y + 2(V + W)\varepsilon \quad (2.25)$$

其中 V , W 和 Y 已由(2.17), (2.18)和(2.16)式表示.

将(2.20)式表示为逆关系为

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \phi_{ijkl} \Delta S_1^{kl} \quad (2.26)$$

即

$$\Delta \varepsilon = C^{-1} \Delta S_1 \quad (2.27)$$

三、增量 Reissner 变分原理

不计体力, 弹性体的势能泛函为

$$\Pi = \int_V W dV + \int_{S_0} T^i u_i dS \quad (3.1)$$

式中 W 为材料的应变能密度, 以(2.9)式表示; V 为变形前的体积, T^i 为已知面力; S_0 为变形前已知面力的那部分边界.

势能泛函中的值用初始值和增量值表示, 即

$$W = W_0 + \Delta W, \quad u_i = u_{i0} + \Delta u_i, \quad T^i = T_0^i + \Delta T^i \quad (3.2)$$

又因为, W 为 γ_{ij} 和 h 的函数, ΔW 可表示为:

$$\begin{aligned} \Delta W = & \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \Delta \gamma_{ij} + \frac{\partial W}{\partial h} \Delta h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \Delta \gamma_{ij} \Delta \gamma_{kl} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial h^2} \Delta h^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial h} \Delta \gamma_{ij} \Delta h \end{aligned} \quad (3.3)$$

利用(2.10)和(2.9)式, 并注意到(2.2)和(2.14)式

$$\begin{aligned} \Delta W = & S^{ij} \Delta \varepsilon_{ij} + (I_3 - 1) \Delta h + \frac{1}{2} C^{ijkl} \Delta \varepsilon_{ij} \Delta \varepsilon_{kl} + Q^{ij} \Delta \varepsilon_{ij} \Delta h \\ = & S^{ij} \Delta \varepsilon_{ij} + (I_3 - 1) \Delta h + A(\Delta \varepsilon_{ij}) + Q^{ij} \Delta \varepsilon_{ij} \Delta h \end{aligned} \quad (3.4)$$

式中

$$A(\Delta \varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} C^{ijkl} \Delta \varepsilon_{ij} \Delta \varepsilon_{kl} \quad (3.5)$$

为应变能增量密度, 它与余应变能增量密度 $B(\Delta S_i^j)$ 的关系为

$$A(\Delta \varepsilon_{ij}) = \Delta S_i^j \Delta \varepsilon_{ij} - B(\Delta S_i^j) \quad (3.6)$$

将(3.6)和(2.3)式代入(3.4)式, 并和(3.2)式一起代入(3.1)式. 再引入 Lagrange 乘子以放松由偏 Kirchhoff 应力增量表示的下列变形协调条件

$$\sum \phi_{ijkl} \Delta S_i^k = \varepsilon_{ij} \quad (3.7)$$

即

$$\sum \mathbf{C}^{-1} \Delta \mathbf{S}_i = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.8)$$

经运算, 并忽略高阶小量, 得到 Reissner 变分原理的泛函为

$$\begin{aligned} \Pi_R(\Delta u_i, \Delta S_i^j, \Delta h) = & \int_V [-B(\Delta S_i^j) + \Delta S_i^j \Delta \xi_{ij} \\ & + S^{ij} \Delta \xi_{ij} + S^{ij} \Delta \eta_{ij} + (I_3 - 1) \Delta h + Q^{ij} \Delta \xi_{ij} \Delta h] dV \\ & - \int_{S_\sigma} (\mathbf{T}^i + \Delta \mathbf{T}^i) \Delta u_i dS \\ & + \int_V (\Delta S_i^j + Q^{ij} \Delta h) (\varepsilon_{ij} - \sum \phi_{ijkl} \Delta S_i^k) dV + \Pi_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

式中 Π_0 是与 Δu_i , ΔS_i^j 和 Δh 无关的量.

将上式表示成矩阵形式为

$$\begin{aligned} \Pi_R(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{S}_i, \Delta h) = & \int_V \left[-\frac{1}{2} \Delta \mathbf{S}_i^T \mathbf{C}^{-1} \Delta \mathbf{S}_i \right. \\ & + \Delta \boldsymbol{\xi}^T \Delta \mathbf{S}_i + \Delta \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{S} + \Delta \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{S} + (I_3 - 1) \Delta h \\ & + \Delta \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{Q} \Delta h \left. \right] dV - \int_{S_\sigma} \Delta \mathbf{u}^T (\bar{\mathbf{T}} + \Delta \bar{\mathbf{T}}) dS \\ & + \int_V (\Delta \mathbf{S}_i^T + \mathbf{Q}^T \Delta h) (\boldsymbol{\varepsilon} - \sum \mathbf{C}^{-1} \Delta \mathbf{S}_i) dV + \Pi_0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

增量 Reissner 变分原理为满足位移边界条件的上述泛函取驻值, 即

$$\delta \Pi_R = 0 \quad (3.11)$$

四、有限元计算列式

将研究的弹性体划分成 n 几个单元, 则弹性体的泛函为单元泛函之和

$$\Pi_R = \sum_e \Pi_R^e \quad (4.1)$$

在杂交应力元中，单元内的位移增量矢量 Δu 和偏应力增量矢量 ΔS_i 是独立假定的，一般表示为

$$\Delta u = N \Delta q \quad (4.2)$$

$$\Delta S_i = P \Delta \beta \quad (4.3)$$

上两式中， N 为形函数矩阵； Δq 为单元结点位移增量矢量； P 为应力函数矩阵； $\Delta \beta$ 为应力参数增量矢量。

由(2.6)式

$$\Delta \varphi = G \Delta q \quad (4.4)$$

式中

$$G = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 \\ 0 & \partial/\partial r \\ \partial/\partial z & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ 1/r & 0 \end{bmatrix} N \quad (4.5)$$

由(2.4)式

$$\Delta \xi = B G \Delta q \quad (4.6)$$

由(2.5)和(2.8)式

$$\Delta \eta^T S = \frac{1}{2} \Delta \varphi^T S_0 \Delta \varphi = \frac{1}{2} \Delta q^T G^T S_0 G \Delta q \quad (4.7)$$

式中

$$S_0 = \begin{bmatrix} S^{11} & & & & \\ 0 & S^{11} & & & \text{对称} \\ S^{12} & 0 & S^{22} & & \\ 0 & S^{12} & 0 & S^{22} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S^{33} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

设单元内的水静压力增量 Δh 为常量，并将(4.2)、(4.3)、(4.6)和(4.7)式代入(3.10)式得

$$\begin{aligned} \Pi_R(\Delta q, \Delta \beta, \Delta h) = & \sum_e \left(-\frac{1}{2} \Delta \beta^T H \Delta \beta + \Delta \beta^T D \Delta q \right. \\ & + \Delta q^T M + \frac{1}{2} \Delta q^T K_S \Delta q + X \Delta h + \Delta q^T L \Delta h \\ & \left. - \Delta q^T R - \Delta q^T \Delta R + \Delta \beta^T E + F \Delta h \right) + \Pi_0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

式中

$$H = \int_V P^T C^{-1} P dV \quad (4.10)$$

$$D = \int_V P^T B G dV \quad (4.11)$$

$$K_S = \int_V G^T S_0 G dV \quad (4.12)$$

$$\mathbf{M} = \int_{V^e} \mathbf{G}^T \mathbf{B}^T \mathbf{S} dV \quad (4.13)$$

$$\mathbf{L} = \int_{V^e} \mathbf{G}^T \mathbf{B}^T \mathbf{Q} dV \quad (4.14)$$

$$\mathbf{R} = \int_{S_0^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{T}} dS \quad (4.15)$$

$$\Delta \mathbf{R} = \int_{S_0^e} \mathbf{N}^T \Delta \bar{\mathbf{T}} dS \quad (4.16)$$

$$\mathbf{E} = \int_{V^e} \mathbf{P}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \sum \mathbf{C}^{-1} \Delta \mathbf{S}_i) dV \quad (4.17)$$

$$\mathbf{F} = \int_{V^e} \mathbf{Q}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \sum \mathbf{C}^{-1} \Delta \mathbf{S}_i) dV \quad (4.18)$$

$$\mathbf{X} = \int_{V^e} (\mathbf{I}_3 - 1) dV \quad (4.19)$$

令

$$\frac{\partial \Pi_R}{\partial \Delta \boldsymbol{\beta}} = 0 \quad (4.20)$$

得

$$\Delta \boldsymbol{\beta} = \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{D} \Delta \mathbf{q} + \mathbf{E}) \quad (4.21)$$

将(4.21)式代入(4.9)式得

$$\begin{aligned} \Pi_R(\Delta \mathbf{q}, \Delta h) = \sum_e \left(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} + \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{L} \Delta h \right. \\ \left. + X \Delta h - \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{R} - \Delta \mathbf{q}^T \Delta \mathbf{R} + \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{Z} + F \Delta h \right) + \Pi_0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

式中

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{D} + \mathbf{K}_s \quad (4.23)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{D}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{E} \quad (4.24)$$

对泛函取驻值

$$\delta \Pi_R = 0 \quad (4.25)$$

即

$$\frac{\partial \Pi_R}{\partial \Delta \mathbf{q}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_R}{\partial \Delta h} = 0 \quad (4.26)$$

由上式可得单元基本方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{R} + \mathbf{R} - \mathbf{M} - \mathbf{Z} \\ -X - F \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

有了单元基本方程, 就可以利用通常的有限元方法, 对每一载荷增量步求得 $\Delta \mathbf{q}$ 和 Δh , 利用(4.2)和(4.3)式求得单元位移增量矢量 $\Delta \mathbf{u}$ 和偏应力增量矢量 $\Delta \mathbf{S}_i$, 再利用(2.22)式求得应力增量矢量 $\Delta \mathbf{S}$.

从上述分析可知, \mathbf{K} 阵中与一般非线性问题一样, 包括线性刚度矩阵, 大位移矩阵和初应力矩阵, \mathbf{K} 中除了与材料常数有关外, 还与水静压力有关。(4.27)式中的矢量 $\mathbf{R} - \mathbf{M} - \mathbf{Z}$ 为不平衡力的修正项, 而 $-X - F$ 为不可压缩性偏差的修正项。由于引入了这些修正项, 在实际计算时, 可采用简单的增量解法, 而不需要进行迭代。这样, 在相同的精度条件下, 提高了计算速度, 节省了机时。

五、算 例

用四边形等参数单元计算受均匀内压的无限长厚壁圆筒。四结点四边形等参数元的形函数矩阵 \mathbf{N} 采用有限元位移法相同的形式。而选择应力函数矩阵 \mathbf{P} 时，由于基本方程 (4.27) 式中已引入修正项，所以，使其满足线性平衡方程和协调条件，并考虑到坐标不变性的要求，我们采用下列 7β 的 \mathbf{P} 阵^[2]

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & z & r & \frac{1}{r} & \frac{z}{r} & 0 & 0 \\ 1 & z & 2r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3r & -\frac{1}{r} & -\frac{z}{r} & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{r}{2} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

厚壁圆筒的几何尺寸、受载和单元划分示于图 1(a) 上，圆筒内半径 $R_1=7(\text{in})$ ，外半径 $R_2=18.625(\text{in})$ ，内压 $p=128.2(\text{psi})$ ，材料常数 $c_1=80(\text{psi})$ ， $c_2=20(\text{psi})$ 。用简单增量法求解，其载荷增量段 N 分别为 10, 15 和 20。

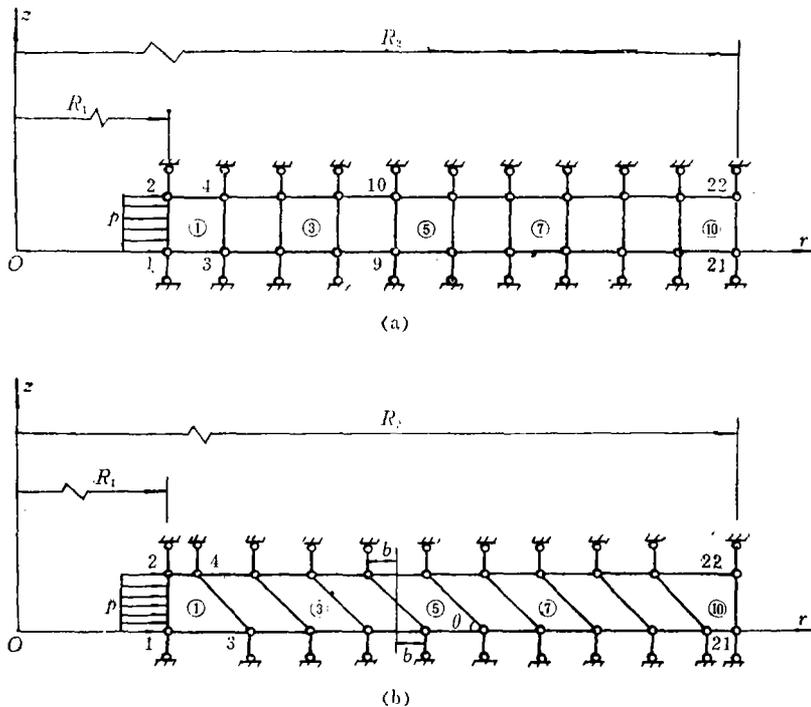


图 1

径向位移 u ，径向应力 σ_r 和环向应力 σ_θ 随半径 r 变化的误差（与精确解相比）分别示于图 2~4 上。图上的应力已转换为变形状态的实际应力。

为了分析单元歪斜的影响，对于上述算例我们还采用图 1(b) 的单元划分进行了计算。

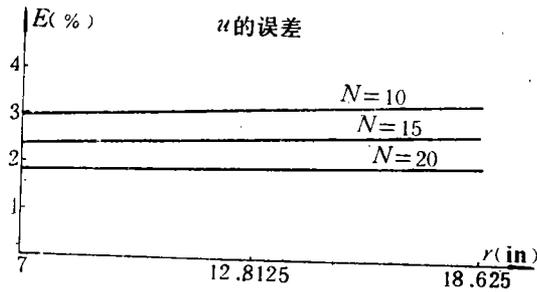


图 2

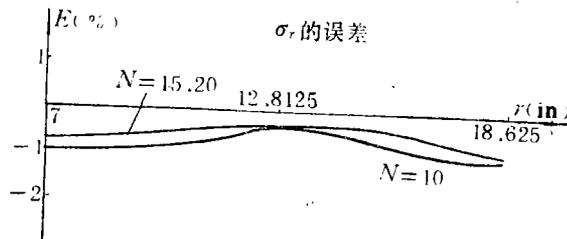


图 3

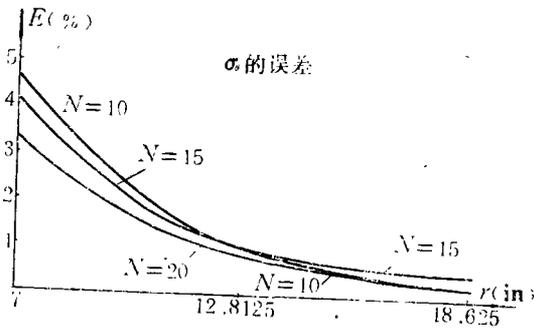


图 4

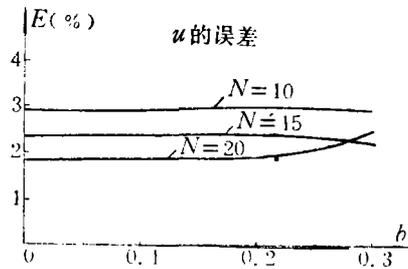


图 5

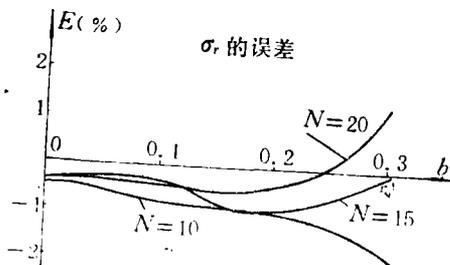


图 6

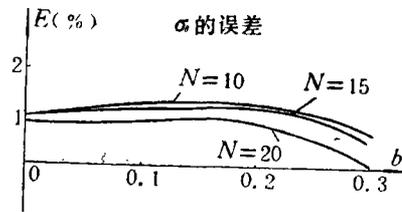


图 7

其内壁的径向位移 u , 第 5 个单元形心处的径向应力 σ_r 和环向应力 σ_θ 随 b (图 1(b)) 的变化情况分别示于图 5~7 上。

从上述曲线可以看出

(1) 对于矩形单元, u , σ_r 和 σ_θ 与精确解相比, 其百分误差都不大, 并随着载荷步数的增加, 其误差都进一步降低, 呈收敛状态。在 $N=15$ 时, u 的误差 $< 2.8\%$, σ_r 的绝对

误差 $<1\%$, σ_θ 的误差 $<4.2\%$ 。这些误差在工程上是可以被允许的。

(2) 对于非矩形四边形单元, 在 $b \leq 0.3$ (即 $\theta > 59^\circ$) 的情况下, u , σ_r 和 σ_θ 的百分误差仍然是不大的。所以, 只要单元不过分的歪斜, 单元的精度仍是有保证的。

参 考 文 献

- [1] Oden, J. T., *Finite Element of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill (1972).
- [2] Spliker, R. L., Improved hybrid-stress axisymmetric elements including behaviour for nearly incompressible materials, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 17 (1981).
- [3] Scharnhorst, T. and T. H. H. Pian, Finite element analysis of rubber-like material by a mixed model, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 12 (1978).
- [4] 范家齐, 增量原理有限元分析非线性橡胶类材料, 全国第二次计算力学会议, 论文033号, 上海 (1980).
- [5] 卞学骥, 《有限元法论文选》, 国防工业出版社 (1980).

Incremental Analysis for Nonlinear Rubber-Like Materials by Hybrid Stress Finite Element

Fan Jia-qi Yang Xiao-xiang

(Daqing Petroleum Institute, Anda, Heilongjiang)

Abstract

In this paper, on the basis of the incremental Reissner variational principle, a nonlinear finite element analysis has been accomplished and a formulation of hybrid stress element has been presented for incompressible Mooney rubber-like materials. The corrected terms of the non-equilibrium force and the incompressibility deviation are considered in the formulation. The computed values of numerical example agree very closely with the exact solution.