

# 曲梁单元和它的收敛率\*

吕和祥 唐立民 刘秀兰

(大连理工大学, 1988年3月2日收到)

## 摘 要

本文给出了拟协调曲梁和扁曲梁单元。数值结果表明, 用于近似曲梁的拟协调曲梁和扁曲梁单元较直梁单元具有更好的精度。由位移法构造的曲梁单元不能够满足刚体位移条件, 为了近似地满足刚体位移条件必须用很多的单元。

本文证明了直梁单元、拟协调曲梁和扁曲梁单元, 当单元尺寸无限缩小时, 具有相同的收敛速度  $O(l^2)$ , 当使用均匀网格时, 其中  $l$  是单元的长度。

## 一、引 言

研究曲梁是因为它和壳体密切相关的, 在壳体计算中的困难也发生在曲梁的计算中。曲梁本身也是柱壳的一个特殊情况。以前由 R. D. Cook<sup>[1]</sup> 给出的数值例子说明, 曲梁单元不能够满足刚体运动的条件。只有单元的尺寸减小时, 这个条件才能够近似地满足。由直梁单元所给的精度比人们预料的要好。以前直梁单元被怀疑是因为在直梁单元内没有耦联位移的影响, 本文证明了, 当直梁单元的尺寸无限缩小时也逼近真解, 并且直梁单元的收敛率和扁曲梁及曲梁相同。

R. D. Cook<sup>[1]</sup> 讨论了曲梁的计算。他用数值例子说明, 如果用弦所对的弧长代替直梁单元的长度, 将给出非常好的结果。但是这个方法很难推广到具有不可展曲面的壳体单元上, 本文借助于拟协调技术<sup>[2,3,4]</sup> 构造出了拟协调曲梁和扁曲梁单元。这个单元所具有的显著的优点是, 满足刚体位移条件, 正如[3,4]所指出的。数值例子指出, 虽然它们具有相同的收敛率, 但拟协调曲梁和扁曲梁单元较直梁单元具有较好的精度。

## 二、拟协调曲梁单元

令  $u$  和  $w$  为曲梁的切线和法向位移, 如图 1 所示。  
膜应变

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} \quad (2.1)$$

\* 国家自然科学基金资助项目。

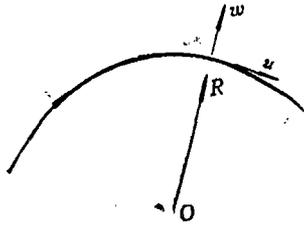


图 1

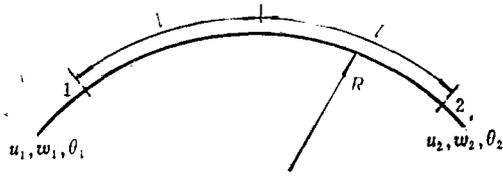


图 2

其中  $s$  是弧长,  $R$  是曲梁的曲率半径。

弯曲应变

$$\chi = -\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \quad (2.2)$$

$$\theta = -\frac{dw}{ds} + \frac{u}{R} \quad (2.3)$$

其中  $\theta$  是旋转角。

### 2.1 拟协调模式离散曲梁单元的应变

令膜应变  $\varepsilon = \text{const} = \varepsilon_0$  由拟协调技术<sup>[2,3,4]</sup>有下面等式

$$\int_{-l}^l \varepsilon ds = \int_{-l}^l \varepsilon_0 ds = \int_{-l}^l \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} \right) ds \quad (2.4)$$

其中  $2l$  是单元的弧长, 如图 2 所示。积分方程(2.4), 有

$$2l\varepsilon = u_2 - u_1 + \frac{1}{R} \int_{-l}^l w ds \quad (2.5)$$

其中令  $R$  是常数。在方程(2.5)中选  $w$  在单元内是三次函数, 即

$$w = N_1 w_1 + N_3 w_2 - \left( \frac{dw}{ds} \right)_1 N_2 - \left( \frac{dw}{ds} \right)_2 N_4 \quad (2.6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 1 + 2\xi^3 - 3\xi^2, & N_2 &= -s(\xi - 1)^2 \\ N_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, & N_4 &= -s(\xi^2 - \xi) \end{aligned} \right\} \xi = s/2l \quad (2.7)$$

把(2.6)和(2.7)二式代入方程(2.5), 完成积分, 有

$$\int_{-l}^l w ds = \int_0^{2l} w ds = 2l \left[ \frac{w_1}{2} + \frac{l}{6} \left( \frac{dw}{ds} \right)_1 + \frac{w_2}{2} - \frac{l}{6} \left( \frac{dw}{ds} \right)_2 \right]$$

把上式代入(2.5)式, 得离散应变

$$\varepsilon = \frac{u_2 - u_1}{2l} + \frac{1}{R} \left[ \frac{w_1}{2} + \frac{l}{6} \left( \frac{dw}{ds} \right)_1 + \frac{w_2}{2} - \frac{l}{6} \left( \frac{dw}{ds} \right)_2 \right] \quad (2.8)$$

对于弯曲应变, 令

$$\chi = \alpha_0 + \alpha_1 s \quad (2.9)$$

有

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \chi ds &= \int_{-l}^l (\alpha_0 + \alpha_1 s) ds = \int_{-l}^l \left( -\frac{d}{ds} \theta \right) ds \\ \alpha_0 &= (\theta_2 - \theta_1) / 2l \\ \int_{-l}^l s(\alpha_0 + \alpha_1 s) ds &= \int_{-l}^l s \frac{d\theta}{ds} ds = l\theta_2 + l\theta_1 - \int_{-l}^l \theta ds \end{aligned} \quad (2.10)$$

把方程(2.3)代入上式, 可以得到

$$\alpha_1 \frac{2}{3} l^3 = l(\theta_1 + \theta_2) - \int_{-l}^l \left[ -\frac{dw}{ds} + \frac{u}{R} \right] ds = l(\theta_1 + \theta_2) + w_2 - w_1 - \frac{u_1 + u_2}{R} \cdot l$$

于是有

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2l} & 0 & 0 & \frac{1}{2l} \\ -\frac{3}{2} \frac{1}{Rl^2} & -\frac{3}{2} \frac{1}{l^3} & \frac{3}{2l^2} & -\frac{3}{2} \frac{1}{Rl^2} & -\frac{1}{2l^3} & \frac{3}{2l^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{B}_M \mathbf{a}^e \quad (2.11)$$

### 2.2 拟协调曲梁单元的刚度矩阵

由方程(2.9)拟协调曲梁单元刚度矩阵的弯曲部分为

$$\mathbf{K}_M = \int_{-l}^l EJB^T \begin{bmatrix} 1 & s \\ s & s^2 \end{bmatrix} \mathbf{B}_M ds = EJB_M^T \begin{bmatrix} 2l & 0 \\ 0 & 2l^3/3 \end{bmatrix} \mathbf{B}_M$$

将由(2.11)式确定的矩阵  $\mathbf{B}_M$  代入上式, 即得

$$\mathbf{K}_M = \begin{bmatrix} \frac{3}{2R^2l} & \frac{3}{2Rl^2} & -\frac{3}{2Rl} & \frac{3}{2R^2l} & -\frac{3}{2Rl^2} & -\frac{3}{2Rl} \\ \frac{3}{2Rl^2} & \frac{3}{2l^3} & -\frac{3}{2l^2} & \frac{3}{2Rl^2} & -\frac{3}{2l^3} & -\frac{3}{2l^2} \\ -\frac{3}{2Rl} & -\frac{3}{2l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{3}{2Rl} & \frac{3}{2l^2} & \frac{1}{l} \\ \frac{3}{2R^2l} & \frac{3}{2Rl^2} & -\frac{3}{2Rl} & \frac{3}{2R^2l} & -\frac{3}{2Rl^2} & -\frac{3}{2Rl} \\ -\frac{3}{2Rl^2} & -\frac{3}{2l^3} & \frac{3}{2l^2} & -\frac{3}{2Rl^2} & \frac{3}{2l^3} & \frac{3}{2l^2} \\ -\frac{3}{2Rl} & -\frac{3}{2l^2} & \frac{1}{l} & -\frac{3}{2Rl} & \frac{3}{2l^2} & \frac{2}{l} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

由方程(2.3)

$$\left( \frac{dw}{ds} \right)_i = -\theta_i + \frac{u_i}{R} \quad (i=1, 2) \quad (2.13)$$

把上式代入方程(2.8), 则得膜应变

$$\epsilon = \left( -\frac{1}{2l} + \frac{l}{6R^2} \right) u_1 + \frac{w_1}{2R} - \frac{l}{6R} \theta_1 + \left( \frac{1}{2l} - \frac{l}{6R^2} \right) u_2 + \frac{w_2}{2R} + \frac{l}{6R} \theta_2 \quad (2.14)$$

或

$$\epsilon = \left[ \left( -\frac{1}{2l} + \frac{l}{6R^2} \right) \frac{1}{2R} - \frac{l}{6R} \left( -\frac{1}{2l} - \frac{l}{6R} \right) \frac{1}{2R} \frac{l}{6R} \right] \mathbf{a}^e$$

其中  $\mathbf{a}^e = \{u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2\}^T$

因此膜应变对单元刚度矩阵的贡献是

$$\mathbf{K}_P = 2lEF \begin{bmatrix} \lambda^2 & \frac{\lambda}{2R} & -\frac{\lambda l}{6R} & -\lambda^2 & \frac{\lambda}{2R} & \frac{\lambda l}{6R} \\ \frac{1}{4R^2} & -\frac{l}{12R^2} & -\frac{\lambda}{2R} & \frac{1}{4R^2} & \frac{l}{12R^2} & -\frac{\lambda l}{6R} \\ & \frac{l^2}{36R^2} & \frac{\lambda l}{6R} & -\frac{l}{12R^2} & -\frac{l^2}{36R^2} & \frac{\lambda l}{6R} \\ & & \lambda^2 & -\frac{\lambda}{2R} & -\frac{\lambda l}{6R} & \frac{l}{12R^2} \\ & & & \frac{1}{4R^2} & \frac{l}{12R^2} & -\frac{\lambda l}{6R} \\ & & & & \frac{l^2}{36R^2} & \frac{\lambda l}{6R} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

对称

$$\text{其中 } \lambda = -\frac{1}{2l} + \frac{l}{6R^2} \equiv -\frac{1}{2l} \left(1 - \frac{l^2}{3R^2}\right) \equiv -\frac{\omega}{2l} \quad (2.16)$$

$F$  是梁横断面积,  $E$  是弹性模量。曲梁单元的刚度矩阵是

$$\mathbf{K}_Q = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_P \quad (2.17)$$

### 2.3 拟协调曲梁单元的收敛率

让我们讨论圆弧曲梁。借助于单元 I,  $\mathbf{I}$  的刚度矩阵, 如图 3 所示, 我们可以得到节点 0 的平衡方程如下:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{19} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{29} \\ k_{31} & k_{32} & \cdots & k_{39} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2l\mathbf{q} \\ 2lq \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } k_{11} &= \frac{3EJ}{2R^2l} - \frac{EF}{2l}\omega^2, & k_{12} &= \frac{3EJ}{2Rl^2} + \frac{EF}{2R}\omega, & k_{13} &= \frac{3EJ}{2Rl} - \frac{EFl}{6R}\omega \\ k_{14} &= \frac{3EJ}{R^2l} + \frac{EF}{l}\omega^2, & k_{15} &= 0, & k_{16} &= -\frac{3EF}{Rl} + \frac{EFl}{3R}\omega^2 \\ k_{17} &= k_{11}, & k_{18} &= -k_{12}, & k_{19} &= k_{13} \\ k_{21} &= -\frac{3EJ}{2Rl^2} - \frac{EF}{2R}\omega, & k_{22} &= -\frac{3EJ}{2l^3} + \frac{EFl}{2R^2}, & k_{23} &= \frac{3EJ}{2l^2} - \frac{EFl^2}{6R^2} \\ k_{24} &= 0, & k_{25} &= \frac{3EJ}{l^3} + \frac{EFl}{R^2}, & k_{26} &= 0 \\ k_{27} &= -k_{21}, & k_{28} &= k_{22}, & k_{29} &= -k_{23} \\ k_{31} &= -\frac{3EJ}{2Rl} - \frac{EFl\omega}{6R}, & k_{32} &= -\frac{3EJ}{2l^2} + \frac{EFl^2}{6R^2}, & k_{33} &= \frac{EJ}{l} - \frac{EFl^3}{18R^2} \\ k_{34} &= -\frac{3EJ}{Rl} + \frac{EFl\omega}{3R}, & k_{35} &= 0, & k_{36} &= \frac{4EJ}{l} + \frac{EFl^3}{9R^2} \\ k_{37} &= k_{31}, & k_{38} &= -k_{32}, & k_{39} &= k_{33} \\ \mathbf{a}_i &= \{u_i \ w_i \ \theta_i\}^T \quad (i=1,0,2) \end{aligned}$$

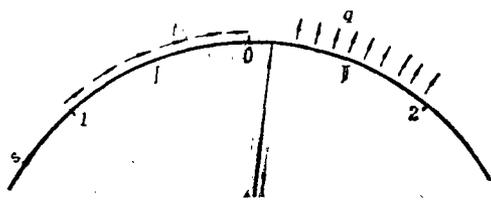


图 3

借助于下面两个公式

$$\left. \begin{aligned} f(s_0 - 2l) &= f_0 - 2l \left( \frac{df}{ds} \right)_0 + \frac{(2l)^2}{2!} \left( \frac{d^2f}{ds^2} \right)_0 - \frac{(2l)^3}{3!} \left( \frac{d^3f}{ds^3} \right)_0 + \dots \\ f(s_0 + 2l) &= f_0 + 2l \left( \frac{df}{ds} \right)_0 + \frac{(2l)^2}{2!} \left( \frac{d^2f}{ds^2} \right)_0 + \frac{(2l)^3}{3!} \left( \frac{d^3f}{ds^3} \right)_0 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

在节点 0 展开方程(2.18), 方程(2.18)的第一个方程的第 1、4、7 项的和是

$$\begin{aligned} & \frac{3EJ}{2R^2l} (u_1 + 2u_0 + u_2) - \frac{EF}{2l} \omega^2 (u_1 - 2u_0 + u_2) \\ &= \frac{3EJ}{2R^2l} \left[ 4u_0 + 4l^2 \left( \frac{d^2u}{ds^2} \right)_0 + O(l^3) \right] - \frac{EF}{2l} \left[ 4l^2 \left( \frac{d^2u}{ds^2} \right)_0 + 2 \frac{(2l)^4}{4!} \left( \frac{d^4u}{ds^4} \right)_0 + O(l^6) \right] \\ &= \frac{6EJ}{R^2l} u_0 + \frac{6EJl}{R^2} \left( \frac{d^2u}{ds^2} \right)_0 - 2lEF \left( \frac{d^2u}{ds^2} \right)_0 + O(l^3) \end{aligned} \quad (a)$$

第 2、5、8 项的和

$$\begin{aligned} & \left( \frac{3EJ}{2Rl^2} + \frac{EF}{2R} \omega \right) (w_1 - w_2) = \left( \frac{3EJ}{2Rl^2} + \frac{EF}{2R} \omega \right) \left[ -4l \left( \frac{dw}{ds} \right)_0 - \frac{8l^3}{3} \left( \frac{d^3w}{ds^3} \right)_0 - O(l^5) \right] \\ &= -\frac{6EJ}{Rl} \left( \frac{dw}{ds} \right)_0 - \frac{2lEF}{R} \left( \frac{dw}{ds} \right)_0 - 4 \frac{EJl}{R} \left( \frac{d^3w}{ds^3} \right)_0 + O(l^3) \end{aligned} \quad (b)$$

第 3、6、9 项的和是

$$\begin{aligned} & -\frac{3EJ}{2Rl} (\theta_1 + 2\theta_0 + \theta_2) - \frac{EFl}{6R} \omega (\theta_1 - 2\theta_0 + \theta_2) \\ &= -\frac{3EJ}{2Rl} \left[ 4\theta_0 + 4l^2 \left( \frac{d^2\theta}{ds^2} \right)_0 + O(l^4) \right] - \frac{EFl}{6R} \left[ 4l^2 \left( \frac{d^2\theta}{ds^2} \right)_0 + O(l^4) \right] \\ &= \frac{6EJ}{Rl} \left( \frac{dw}{ds} \right)_0 + \frac{6EJl}{R} \left( \frac{d^3w}{ds^3} \right)_0 - \frac{3EJ}{2R^2l} 4u_0 - \frac{6EJl}{R^2} \left( \frac{d^2u}{ds^2} \right)_0 + O(l^3) \end{aligned} \quad (c)$$

将(a)、(b)、(c)式相加, 则得方程(2.18)的第 1 个方程的 Taylor 展开式

$$-2lEF \left( \frac{d^2u}{ds^2} \right)_0 - \frac{2lEF}{R} \left( \frac{dw}{ds} \right)_0 + 2l \frac{EJ}{R} \left( \frac{d^3w}{ds^3} \right)_0 + O(l^3) = 2lt$$

除以 2l 并省去下标 0, 则得方程

$$EF \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{EF}{R} \frac{dw}{ds} - \frac{EJ}{R} \frac{d^3w}{ds^3} + t = O(l^2) \quad (2.20)$$

类似地展开方程(2.18)的第二个方程, 其第 1、4、7 项的和是

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3EJ}{2Rl^2}-\frac{EF}{2R}\omega\right)(u_1-u_2) &= \left(\frac{3EJ}{2Rl^2}+\frac{EF}{2R}\omega\right)\left[4l\left(\frac{du}{ds}\right)_0+\frac{8l^3}{3}\left(\frac{d^3u}{ds^3}\right)_0+O(l^6)\right] \\ &= \frac{6EJ}{Rl}\left(\frac{du}{ds}\right)_0+\frac{2EF}{R}l\left(\frac{du}{ds}\right)_0+\frac{4EJl}{R}\left(\frac{d^3u}{ds^3}\right)_0+O(l^3) \end{aligned} \quad (d)$$

第 2、5、8 项的和

$$\begin{aligned} -\frac{3EJ}{2l^3}(w_1-2w_0+w_2)+\frac{EF}{2R^2}(w_1+2w_0+w_2) \\ = -\frac{3EJ}{2l^3}\left[4l^2\left(\frac{d^2w}{ds^2}\right)_0+2\frac{(2l)^4}{4!}\left(\frac{d^4w}{ds^4}\right)_0+O(l^6)\right]+\frac{EF}{2R^2}\left[4w_0+4l^2\left(\frac{d^2w}{ds^2}\right)_0+O(l^4)\right] \\ = -\frac{6EJ}{l}\left(\frac{d^2w}{ds^2}\right)_0-2EJl\left(\frac{d^4w}{ds^4}\right)_0+\frac{2EF}{R^2}w_0+O(l^3) \end{aligned} \quad (e)$$

第 3、6、9 项的和

$$\begin{aligned} \frac{3EJ}{2l^2}(\theta_1-\theta_2)-\frac{EF}{6R^2}(\theta_1-\theta_2) &= \left(\frac{3EJ}{2l^2}-\frac{EF}{6R^2}\right)\left[4l\left(\frac{d\theta}{ds}\right)_0+\frac{8l^3}{3}\left(\frac{d^3\theta}{ds^3}\right)_0+O(l^6)\right] \\ &= \frac{6EJ}{l}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)_0+4EJl\left(\frac{d^3\theta}{ds^3}\right)_0-\frac{6EJ}{Rl}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)_0-\frac{4EJl}{R}\left(\frac{d^3\theta}{ds^3}\right)_0+O(l^3) \end{aligned} \quad (f)$$

将(d)、(e)、(f)式相加, 则得方程(2.18)第二式的 Taylor 展开式

$$2lEJ\left(\frac{d^4w}{ds^4}\right)_0+\frac{2lEF}{R^2}w_0+\frac{2lEF}{R}\left(\frac{du}{ds}\right)_0+O(l^3)=2lq$$

除以  $2l$  并省去下标 0 则得曲梁的法向平衡方程

$$EJ\frac{d^4w}{ds^4}+EF\left(\frac{du}{ds}+\frac{w}{R}\right)-q=O(l^2) \quad (2.21)$$

薄曲梁的平衡微分方程组<sup>[5]</sup>是

$$EF\frac{d^2u}{ds^2}+\frac{EF}{R}\frac{dw}{ds}-\frac{EJ}{R}\frac{d^3w}{ds^3}+t=0 \quad (2.22)$$

$$EJ\frac{d^4w}{ds^4}+EF\left(\frac{du}{ds}+\frac{w}{R}\right)-q=0 \quad (2.23)$$

所以有限单元方程(2.18)近似微分方程(2.22)和(2.23)具有  $O(l^2)$  量级的误差, 当  $l \rightarrow 0$  时, 其收敛速率是  $O(l^2)$ 。

### 三、直梁单元

在曲梁的计算中, 曲梁往往用一些直梁所组成的结构代替曲梁。数值例子指出, 当直梁单元的长度减小时, 计算结果是收敛的。将证明, 当单元长度减小时, 直梁单元的刚度方程逼近微分方程(2.22)和(2.23)。

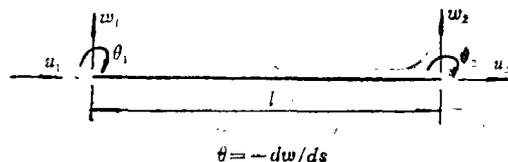


图 4

直梁单元的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_B = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ & & \frac{4EJ}{l} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ & & & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ & & & & & & \text{对称} \\ & & & & & & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ & & & & & & & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

节点位移向量是

$$\mathbf{a}^e = \{u_1, w_1, \theta_1, u_2, w_2, \theta_2\}^T$$

令整体坐标系是描述曲梁的曲线坐标系。在整体坐标系中位移向量的分量方向是曲梁轴线的切线和法线方向，如图 5 所示。

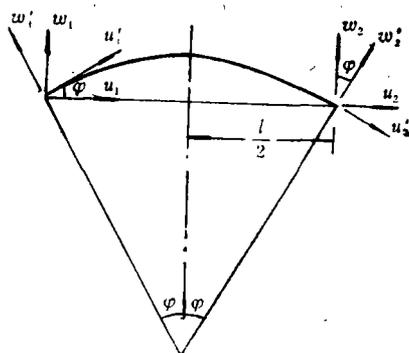


图 5

将在局部坐标系的梁单元刚度矩阵，转换到整体坐标系中，有

$$\mathbf{K}_B^G = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_B \mathbf{R} \quad (g)$$

其中  $\mathbf{R}$  由下式确定

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ w_1' \\ \theta_1' \\ u_2' \\ w_2' \\ \theta_2' \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{R} \mathbf{a}' \quad (3.2)$$

令角  $\varphi$  是小的，有近似关系

$$\sin\varphi \approx \varphi, \quad \cos\varphi \approx 1$$

将(3.1)和(3.2)式代入(g)式，有梁单元在整体坐标系下刚度矩阵

$$K_0 = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} + \frac{12EJ}{l^3} \varphi^2 & -\frac{EF}{l} \varphi + \frac{12EJ}{l^3} \varphi & -\frac{6EJ}{l^2} \varphi & -\frac{EF}{l} + \frac{12EJ}{l^3} \varphi^2 & -\frac{EF}{l} \varphi + \frac{12EJ}{l^3} \varphi & -\frac{6EJ}{l^2} \varphi \\ & \frac{EF}{l} \varphi^2 + \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{EF}{l} \varphi + \frac{12EJ}{l^3} \varphi & \frac{EF}{l} \varphi^2 - \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ & & \frac{4EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} \varphi & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ \text{对称} & & & \frac{EF}{l} + \frac{12EJ}{l^3} \varphi^2 & \frac{EF}{l} \varphi - \frac{12EJ}{l^3} \varphi & -\frac{6EJ}{l^2} \varphi \\ & & & & \frac{EF}{l} \varphi^2 + \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ & & & & & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

在整体坐标系下梁单元的节点位移向量是

$$\mathbf{a}'_0 = \{u'_1 \ w'_1 \ \theta'_1 \ u'_2 \ w'_2 \ \theta'_2\}^T \quad (3.4)$$

在(3.2)式中确定的转换矩阵  $\mathbf{R}$ , 旋转角  $\theta_i$  没有处理, 但是在旋转了以后, 在曲线坐标系下由方程(2.3)所确定  $\theta'_i$ , 即由于坐标转换, 在旋转角中的  $u/R$  项自动地出现. 这个事实可以由给单元一个刚体运动

$$u'_1 = u'_2 = u, \quad w'_1 = w'_2 = 0, \quad \theta'_1 = \theta'_2$$

来证明. 由单元刚度矩阵(3.3)的第三行, 由于在单元中由刚体运动所对应的广义力等于零, 因此有

$$\frac{4EJ}{l} \theta'_1 - \frac{6EJ}{l^2} \varphi u'_1 + \frac{2EJ}{l} \theta'_2 - \frac{6EJ}{l^2} \varphi u'_2 = 0$$

$$\text{即} \quad \frac{6EJ}{l} \theta'_1 = \frac{12EJ}{l^2} u'$$

$$\text{但} \quad l = 2R \sin \varphi \approx 2R \varphi$$

$$\text{有} \quad \theta' = u'/R$$

所以在旋转以后, 在曲线坐标系下梁单元的旋转角为

$$\theta'_i = \theta_i + \frac{u_i}{R} = -\left(\frac{dw}{ds}\right)_i + \frac{u_i}{R} \quad (i=1,2) \quad (3.5)$$

由两个相同的单元, 如图6所示, 形成节点0的平衡方程如下

$$\begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & \cdots & k'_{19} \\ k'_{21} & k'_{22} & \cdots & k'_{29} \\ k'_{31} & k'_{32} & \cdots & k'_{39} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_0 \\ \mathbf{a}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l\mathbf{f} \\ l\mathbf{q} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

其中

$$\mathbf{a}'_i = \{u'_i \ w'_i \ \theta'_i\} \quad (i=1,0,2)$$

$$k'_{11} = -\frac{EF}{l} + \frac{12EJ}{l^3} \varphi^2, \quad k'_{12} = \left(\frac{EF}{l} + \frac{12EJ}{l^3}\right) \varphi, \quad k'_{13} = -\frac{6EJ}{l} \varphi$$

$$k'_{14} = \frac{2EF}{l} + \frac{24EJ}{l^3} \varphi^2, \quad k'_{15} = 0, \quad k'_{16} = -\frac{12EJ}{l^2} \varphi$$

$$k'_{17} = k'_{11}, \quad k'_{18} = -k'_{12}, \quad k'_{19} = k'_{13}$$

$$k'_{21} = -\left(\frac{EF}{l} + \frac{12EJ}{l^3}\right) \varphi, \quad k'_{22} = \frac{EF}{l} \varphi^2 - \frac{12EJ}{l^3}, \quad k'_{23} = \frac{6EJ}{l^2}$$

$$\begin{aligned}
 k'_{24} &= 0, & k'_{25} &= \frac{2EF}{l} + \frac{24EJ}{l^3}, & k'_{26} &= 0 \\
 k'_{27} &= -k'_{21}, & k'_{28} &= k'_{22}, & k'_{29} &= -k'_{23} \\
 k'_{31} &= -\frac{6EJ}{l^2} \varphi, & k'_{32} &= -\frac{6EJ}{l^2}, & k'_{33} &= \frac{2EJ}{l} \\
 k'_{34} &= -\frac{12EJ}{l^2} \varphi, & k'_{35} &= 0, & k'_{36} &= \frac{8EJ}{l} \\
 k'_{37} &= k'_{31}, & k'_{38} &= -k'_{32}, & k'_{39} &= k'_{33}
 \end{aligned}$$

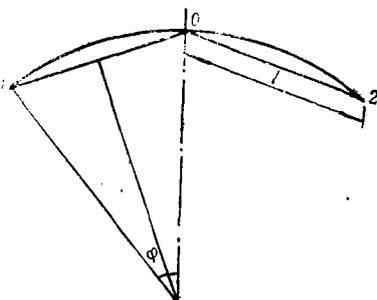


图 6

用公式(2.19), 在节点 0 展开方程(3.6). 方程组(3.6)的第一个方程的 3、6、9 项的和及由(3.5)式, 有

$$\begin{aligned}
 -\frac{6EJ}{l^2} \varphi(\theta'_1 + 2\theta'_0 + \theta'_2) &= -\frac{6EJ}{l^2} \frac{l}{2R} \left[ 4\theta'_0 + l^2 \left( \frac{d^2\theta'}{ds^2} \right)_0 + O(l^4) \right] \\
 &= -\frac{3EJ}{Rl} \left[ -4 \left( \frac{dw'}{ds} \right)_0 - l^2 \left( \frac{d^3w'}{ds^3} \right)_0 + 4 \frac{u'_0}{R} + \frac{l^2}{R} \left( \frac{d^2u'}{ds^2} \right)_0 + O(l^4) \right] \quad (h)
 \end{aligned}$$

第 1、4、7 项和为

$$\begin{aligned}
 -\frac{EF}{l}(u'_1 - 2u'_0 + u'_2) + \frac{12EJ}{l^3} \varphi^2(u'_1 + 2u'_0 + u'_2) \\
 = -\frac{EF}{l} \left[ l^2 \left( \frac{d^2u'}{ds^2} \right)_0 + O(l^4) \right] + \frac{12EJ}{l^3} \frac{l^2}{4R^2} \left[ 4u'_0 + l^2 \left( \frac{d^2u'}{ds^2} \right)_0 + O(l^4) \right] \\
 = -EFl \left( \frac{d^2u'}{ds^2} \right)_0 + \frac{3EJ}{R^2l} \left[ 4u'_0 + l^2 \left( \frac{d^2u'}{ds^2} \right)_0 \right] + O(l^3) \quad (i)
 \end{aligned}$$

第 2、5、8 项的和为

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{EF}{l} + \frac{12EJ}{l^3} \right) \varphi(w'_1 - w'_2) &= \left( \frac{EF}{l} + \frac{12EJ}{l^3} \right) \frac{l}{2R} \left[ -2l \left( \frac{dw'}{ds} \right)_0 - \frac{l^3}{3} \left( \frac{d^3w'}{ds^3} \right)_0 + O(l^5) \right] \\
 &= -\frac{EF}{R} l \left( \frac{dw'}{ds} \right)_0 - \frac{12EJ}{Rl} \left( \frac{dw'}{ds} \right)_0 - 2EJ \frac{l}{R} \left( \frac{d^3w'}{ds^3} \right)_0 + O(l^3) \quad (j)
 \end{aligned}$$

将(h)、(i)、(j)式相加, 并除以  $l$ , 省去下标 0 和撇“'”, 则得方程(3.7)

$$\left( \frac{EF}{l} + \frac{12EJ}{l^3} \right) \varphi \left( \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{EF}{R} \frac{dw}{ds} - \frac{EJ}{R} \frac{d^3w}{ds^3} + t + O(l^2) \right) = 0 \quad (3.7)$$

当  $l \rightarrow 0$  时, 则得与方程(2.22)相同的方程.

借助于等式(2.19)展开方程(3.6)的第二个方程, 第3、6、9项的和为

$$\begin{aligned} \frac{6EJ}{l^2}(\theta'_1 - \theta'_2) &= \frac{6EJ}{l^2} \left[ -2l \left( \frac{d\theta'}{ds} \right)_0 - \frac{l^3}{3} \left( \frac{d^3\theta'}{ds^3} \right)_0 - O(l^5) \right] \\ &= \frac{12EJ}{l} \left( \frac{d^2w'}{ds^2} \right)_0 + 2EJl \left( \frac{d^4w'}{ds^4} \right)_0 - \frac{12EJ}{Rl} \left( \frac{du'}{ds} \right)_0 - \frac{2lEJ}{R} \left( \frac{d^3u'}{ds^3} \right)_0 + O(l^3) \quad (k) \end{aligned}$$

第1、4、7项的和为

$$\begin{aligned} -\left( \frac{EF}{l} + \frac{12EJ}{l^3} \right) \varphi(u'_1 - u'_2) &= \frac{l}{2R} \left( \frac{EF}{l} + \frac{12EJ}{l^3} \right) \left[ 2l \left( \frac{du'}{ds} \right)_0 + \frac{l^3}{3} \left( \frac{d^3u'}{ds^3} \right)_0 + O(l^5) \right] \\ &= \frac{EF}{R} \left( \frac{du'}{ds} \right)_0 + \frac{12EJ}{Rl} \left( \frac{du'}{ds} \right)_0 + 2l \frac{EJ}{R} \left( \frac{d^3u'}{ds^3} \right)_0 + O(l^3) \quad (1) \end{aligned}$$

第2、5、8项的和为

$$\begin{aligned} \frac{EF}{l} \varphi^2(w'_1 + 2w'_0 + w'_2) + \frac{12EJ}{l^3} (-w'_1 + 2w'_0 - w'_2) \\ &= \frac{EF}{4R^2l} \left[ 4w'_0 + l^2 \left( \frac{d^2w'}{ds^2} \right)_0 + O(l^4) \right] - \frac{12EJ}{l^3} \left[ l^2 \left( \frac{d^2w'}{ds^2} \right)_0 + 2 \cdot \frac{l^4}{4!} \left( \frac{d^4w'}{ds^4} \right)_0 + O(l^6) \right] \\ &= \frac{EF}{R^2} w'_0 - \frac{12EJ}{l} \left( \frac{d^2w'}{ds^2} \right)_0 - EJl \left( \frac{d^4w'}{ds^4} \right)_0 + O(l^3) \quad (m) \end{aligned}$$

将(k)、(1)和(m)式相加, 并除以  $l$  省去下标 0 和撇“'”, 则得方程(3.8)

$$EJ \frac{d^4w}{ds^4} + \frac{EF}{R} \left( \frac{du}{ds} + \frac{w}{R} \right) - q + O(l^2) = 0 \quad (3.8)$$

当  $l \rightarrow 0$  时, 则得一个与方程(2.23)相同的方程.

#### 四、扁曲梁单元

扁曲梁的应变是

$$\varepsilon = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R}, \quad \chi = -\frac{d^2w}{ds^2} \quad (4.1)$$

把(4.1)式与(2.1)式相比较, 显然, 扁曲梁的膜应变和曲梁(深曲梁)相同. 因此, 膜应变对单元刚度矩阵的贡献由(2.15)式或  $K_p$  确定. 扁曲梁的弯曲应变与直梁相同, 对应于这个弯曲应变的挠度  $w_B$  是垂直于梁的(因为变量  $s$  的定义域在梁上而不是在弧上), 如图7所

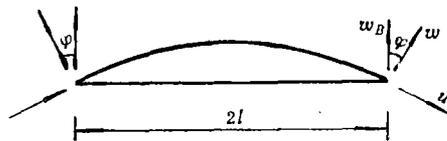


图 7

示. 从方程(4.1)易见膜位移对弯曲应变没有贡献, 因此, 弯曲应变对单元刚度矩阵的贡献是

$$\mathbf{K}_B^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ & & \frac{4EJ}{l} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对称} & & & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ & & & & & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

因为对应于刚度矩阵(4.2)的挠度  $w_B$  是垂直于梁的因此刚度矩阵(4.2)必须由转换矩阵  $\mathbf{R}$  转到整体坐标系中, 于是扁曲梁的单元刚度矩阵是

$$\mathbf{K}^g = \mathbf{K}_P + \mathbf{R}^T \mathbf{K}_B^S \mathbf{R} \quad (4.3)$$

借助于单元刚度矩阵  $\mathbf{K}^g$ , 形成平衡方程, 可以证明, 当单元的长度  $l \rightarrow 0$  时, 这些方程逼近方程(2.22)和(2.23), 并且收敛率也是  $O(l^2)$ .

对于直梁单元、扁曲梁单元和曲梁单元, 虽然具有相同的收敛率, 但数值例子指出, 扁曲梁或曲梁(深曲梁)单元给出了比直梁单元较好的结果。

### 五、例

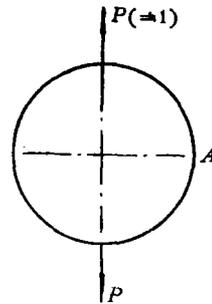
下面给出了两个例子说明三种单元的精度

5.1 两个集中力作用在圆环直径的两端, 如图 8 所示。由于对称, 仅考虑四分之一圆环。

对于不同单元和单元数, 在  $A$  点的切向和法向位移在表 1 中给出。

#### 5.2 圆环受均匀法向载荷

每个节点位移均相等, 其数值在表 2 中给出。



$R=10, EJ=0.8333, EF=1000$

图 8

表 1  $A$  点的法向和切向位移

| 四分之一圆环 | 2 个相等的单元 |        | 4 个相等的单元 |        | 8 个相等的单元 |        | 16 个相等的单元 |        |
|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|-----------|--------|
|        | $u$      | $w$    | $u$      | $w$    | $u$      | $w$    | $u$       | $w$    |
| 曲梁单元   | 164.0    | -153.4 | 174.8    | -161.2 | 177.6    | -163.2 | 178.3     | -163.8 |
| 扁曲梁单元  | 164.8    | -157.8 | 175.4    | -162.5 | 177.8    | -163.6 | 178.4     | -163.8 |
| 直梁单元   | 159.5    | -146.5 | 173.1    | -158.9 | 177.1    | -162.6 | 178.2     | -163.6 |
| 解析解    | 178.4    | -163.9 |          |        |          |        |           |        |

表 2

| 四分之一圆环 | 1 个单元 |     | 2 个单元  |     | 4 个单元  |     |
|--------|-------|-----|--------|-----|--------|-----|
|        | $u$   | $w$ | $u$    | $w$ | $u$    | $w$ |
| 曲梁单元   | 0.1   | 0.0 | 0.1    | 0.0 | 0.1    | 0.0 |
| 扁曲梁单元  |       |     | 0.1026 | 0.0 | 0.1006 | 0.0 |
| 直梁单元   |       |     | 0.1026 | 0.0 | 0.1006 | 0.0 |
| 解析解    | 0.1   | 0.0 |        |     |        |     |

## 参 考 文 献

- [1] Cook, R.D. and Feng Zhao-hua, Deflection and buckling of ring with straight and curved finite elements, *Computers and Structures*, 15, 6 (1982), 647—651.
- [2] Tang Li-min, Lü He-xiang, Chen Wan-ji and Liu Ying-xi, Quasi-conforming element technique for the finite element method, *Numerical Method for Engineering, G. A. M. N. 1.2 2nd International Congress DUNOD* (1980), 565—572.
- [3] 吕和祥, 拟协调元的某些问题和在拱结构中的应用, *固体力学学报*, 4 (1981), 11.
- [4] 吕和祥、刘迎曦, 有限元法中的拟协调元和双曲壳单元上的应用, *大连工学院学报*, 20, 1 (1981), 3.
- [5] Timoshenko, S., *Theory of Plates and Shells*, second edition, McGraw-Hill Book Company, Inc. (1959), 513.
- [6] Cook, R.D., *Concepts and Application of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc. (1974).

## The Curved Beam Element and Its Convergence Rate

Lü He-xiang    Tang Li-min    Liu Xiu-lan

(Department of Engineering Mechanics, Dalian Institute of Technology, Dalian)

## Abstract

The quasi-conforming element of the curved beam and shallow curved beam is given in this paper. Numerical examples illustrate that the quasi-conforming elements of the curved beam and shallow curved beam which is used to approximate the curved beam have better accuracy than the straight beam element. The curved beam element constructed by displacement method can not satisfy rigid body motion condition and the very fine grids have to be used in order to satisfy rigid body motion condition approximately.

In this paper it is proved that the straight beam element and the quasi-conforming element of the curved beam and shallow curved beam, when element size is reduced infinitely, have convergence rate with the same order  $O(l^2)$  and when regular elements are used,  $l$  is the element length.