应用数学和力学，第10卷第6期(1989年6月)　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

概率度量空间中的拓朴度理论与不动点定理*

张石生　　陈玉清

(四川大学数学系，1987年11月25日收到)

摘　要

在本文中我们在概率线性赋范空间中建立了 Leray-Schauder 度理论，并以此为工具得出了概率线性赋范空间中的某些不动点定理。

自1942年K．Menger 引入概率度量空间的概念以来，概率度量空间的理论及应用的研究已取得重要的进展．Schweizer 和 Sklar[1] 描述了这类空间的拓扑结构，另外在他们的专著[2]中介绍和总结了这一领域当前的发展概况．在 Sherwood 的工作[5]中还指出了通常的概念空间是概率度量空间的一特例，这就使得概率度量空间理论和应用的研究具有重要的实际意义．

近年来不少学者从事于概率度量空间中算子理论的研究（见，例如，Bocsan[6]，Istratescu[7]，林熙[9]及张石生[11～14]等）．我们知道赋范空间中的 Leray-Schauder 度理论在算子理论研究中是一强有力的工具，因此，我们自然希望建立概率度量空间中的 Leray-Schauder 度理论．

本文的目的就是为了解决上述问题．在本文的第二节中我们在 t-范数 $\varDelta$ 满足 $\varDelta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$的条件下建立了概率线性赋范空间$(E,\mathscr{F},\varDelta)$中的 Leray-Schauder度理论；在第三节中我们借助于第二节中所建立的度理论得出了概率线性赋范空间中的某些不动点定理．

这里应该指出：当$\varDelta$满足条件$\varDelta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$时，概率线性赋范空间$(E,\mathscr{F},\varDelta)$是一局部凸的线性拓扑空间，而局部凸线性拓扑空间上的拓扑度本质上在 Nagumo[3]中已经建立，不过[3]中所考虑的是一般的局部凸空间，而本文是借助于概率度量在一类特殊的局部凸空间——概率线性赋范空间上建立 Leray-Schauder 度理论，这种度理论有其自身的特色和兴趣，这是一般的局部凸空间上的度理论所不能取代和包含的．

一、预　备　知　识

为叙述方便，我们先引出某些定义和符号(见[2]或[11])．

* 国家自然科学基金资助项目．

以后我们常用$\mathscr{D}$表一切左连续分布函数的集合，$R=(-\infty,\ \infty)$，而$H(t)$表由下式定义的函数：

$$H(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0\end{cases}$$

一映象$\Delta:[0,\ 1]\times[0,\ 1]\to[0,\ 1]$称为$t$-范数，如果$\Delta$满足条件：$\Delta(a,\ 1)=a$；$\Delta(a,\ b)=\Delta(b,\ a)$；$\Delta(c,\ d)\geqslant\Delta(a,\ b)$当$\forall c\geqslant a,\ d\geqslant b$；$\Delta(\Delta(a,\ b),\ c)=\Delta(a,\ \Delta(b,\ c))$，$\forall a,b,c,d\in[0,\ 1]$。

Menger概率线性赋范空间（简称Menger PN-空间）是一有序的三元组$(E,\ \mathscr{F},\ \Delta)$，其中$E$是一实线性空间，$\mathscr{F}$是$E\to\mathscr{D}$的映象（以下记$\mathscr{F}(x)$为$f_x$，又$f_x(t)$表分布函数$f_x$在$t\in R$处的值），并设$f_x$满足下面的条件：

(PN-1) $f_x(0)=0$；

(PN-2) $f_x(t)=H(t)$，$\forall t\in R$，当而且仅当$x=0$；

(PN-3) 对任一实数α，$f_{\alpha x}=f_x(t/|\alpha|)$；

(PN-4) （Menger三角不等式）对任意的$x,\ y\in E$

$f_{x+y}(t_1+t_2)\geqslant\Delta(f_x(t_1),\ f_y(t_2))$， $\forall t_1,\ t_2\geqslant 0$

设$(E,\ \mathscr{F},\ \Delta)$是一Menger PN-空间，设$\Delta$是满足条件：$\sup\limits_{0<t<1}\Delta(t,\ t)=1$的$t$-范数，则由文[1]知$(E,\ \mathscr{F},\ \Delta)$是由邻域系

$$\{U_y(\varepsilon,\ \lambda):y\in E,\ \varepsilon>0,\ \lambda>0\}=\{y+U_\theta(\varepsilon,\ \lambda):y\in E,\ \varepsilon>0,\ \lambda>0\}$$

其中$U_y(\varepsilon,\ \lambda)=\{x\in E:f_{x-y}(\varepsilon)>1-\lambda\}$，所导出的拓扑$\mathscr{T}$的Hausdorff线性拓扑空间，按照这一拓扑$\mathscr{T}$，可引进$\mathscr{T}$-完备、$\mathscr{T}$-收敛和$\mathscr{T}$-Cauchy列等概念，并可证明下面的定理。

定理 (Schweizer-Sklar[1]) 设$(E,\ \mathscr{F},\ \Delta)$是一Menger PN-空间，其中$\Delta$满足$\sup\limits_{0<t<1}\Delta(t,\ t)=1$，则序列$\{x_n\}\subset E$是$\mathscr{T}$-收敛于$x\in E$，当而且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}f_{x_n-x}(t)=H(t)$，$\forall t\in R$。

定义1 设$(E,\ \mathscr{F},\ \Delta)$是一Menger PN-空间，$D\subset E$。映象$A:D\to E$称为紧的，如果$\overline{A(D)}$是$E$中的紧集。

引理1.1 设$(E,\ \mathscr{F},\ \Delta)$是Menger PN-空间，其中$\Delta$满足条件$\Delta(t,\ t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,\ 1]$。设$\Omega\subset E$，设$T:\Omega\to E$是紧连续映象，则对零点$\theta$的任一邻域$u(\varepsilon,\ \lambda)$，$\varepsilon>0$，$\lambda>0$，存在有限维的连续紧算子$T_{(\varepsilon,\lambda)}$，使得

$$Tx-T_{(\varepsilon,\lambda)}x\in u(\varepsilon,\ \lambda),\qquad \forall x\in\Omega$$

证 因$T:\Omega\to E$是紧的，故$\overline{T(\Omega)}$是E中的紧集。对零点θ的任一邻域$u(\varepsilon,\ \lambda)$，$\varepsilon>0$，$\lambda>0$，存在$y_1,\ \cdots,\ y_m\in\overline{T(\Omega)}$，使得$\bigcup\limits_{i=1}^{m}(y_i+u(\varepsilon,\ \lambda))\supset\overline{T(\Omega)}$。令

$$\lambda_i(x)=\max\{0,\ \varepsilon\text{-}\inf\{t:f_{Tx-y_i}(t)>1-\lambda\}\},\quad x\in\Omega,\ i=1,\ \cdots,\ m$$

下证对任一$x\in\Omega$，存在某一i_0，使得$\lambda_{i_0}(x)>0$，$1\leqslant i_0\leqslant m$。

事实上，因$Tx\in\overline{T(\Omega)}\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}(y_i+u(\varepsilon,\ \lambda))$，故存在$i_0$，$1\leqslant i_0\leqslant m$，使得$Tx\in y_{i_0}+u(\varepsilon,\ \lambda)$，即有$f_{Tx-y_{i_0}}(\varepsilon)>1-\lambda$。由分布函数的左连续性，存在$t_0<\varepsilon$，使得$f_{Tx-y_{i_0}}(t_0)>1-\lambda$成立，因而有$\lambda_{i_0}(x)>0$。令

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)$$

则对一切 $x\in\Omega$，$\varphi(x)\neq 0$。现定义 $T_{(\varepsilon,\lambda)}:\Omega\to E$ 如下：

$$T_{(\varepsilon,\lambda)}x=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i(x)}{\varphi(x)}y_i$$

下证 $T_{(\varepsilon,\lambda)}$ 即满足引理的要求。为此，只要证明 $\lambda_i(x)$，$i=1, \cdots, m$ 是连续函数，而这又只要证明

$$p_i(x)=\inf\{t: f_{Tx-y_i}(t)>1-\lambda\}$$

是 x 的连续函数即可。

设 $x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x_0$，易知

$$p_i(x_n)\leqslant p_i(x_0)+\inf\{t: f_{Tx_n-Tx_0}(t)>1-\lambda\}$$
$$p_i(x_0)\leqslant p_i(x_n)+\inf\{t: f_{Tx_0-Tx_n}(t)>1-\lambda\}$$

故

$$|p_i(x_n)-p_i(x_0)|\leqslant\inf\{t: f_{Tx_n-Tx_0}(t)>1-\lambda\}$$

如果上式右端当 $n\to\infty$ 时不收敛于零，则存在某一 $\varepsilon_0>0$，对任给的正整数 N，存在 $n_0>N$，使得

$$\inf\{t: f_{Tx_{n_0}-Tx_0}(t)>1-\lambda\}>\varepsilon_0$$

于是有

$$f_{Tx_{n_0}-Tx_0}(\varepsilon_0)\leqslant 1-\lambda \tag{1.1}$$

但因 T 连续，故 $Tx_n\xrightarrow{\mathscr{T}}Tx_0$，于是有

$$\lim_{n\to\infty}f_{Tx_n-Tx_0}(\varepsilon)=1$$

这就与(1.1)相矛盾。由此矛盾知 $p_i(x_n)\to p_i(x_0)$ $(n\to\infty)$，$i=1, 2, \cdots, m$。另由 Menger 三角不等式知

$$f_{Tx-T_{(\varepsilon,\lambda)}x}(\varepsilon)\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant m,\ \lambda_i(x)\neq 0}\{f_{Tx-y_i}(\varepsilon)\}>1-\lambda$$

故 $$Tx-T_{(\varepsilon,\lambda)}x\in u(\varepsilon, \lambda), \quad \forall x\in\Omega$$

另外，$T_{(\varepsilon,\lambda)}$ 的紧性是显然的。证毕。

我们易于证明下面的结论成立：

引理1.2 设 $(E, \mathscr{F}, \Delta)$ 满足引理1.1中的条件。设 Ω 是 E 中的开子集，$T:\bar{\Omega}\to E$ 是紧连续映象，则 $S=I-T$ 是闭映象。

二、Menger PN-空间中的拓扑度

定义 2 设 $(E, \mathscr{F}, \Delta)$ 是 Menger PN-空间，其中 Δ 满足 $\Delta(t, t)\geqslant t$，$\forall t\in[0, 1]$。设 Ω 是 E 中的开集，设 $T:\bar{\Omega}\to E$ 是紧连续映象。令 $S=I-T$，设 $p\in E\backslash S(\partial\Omega)$。由引理1.2知 S 是闭映象，故 $S(\partial\Omega)$ 是 E 中的闭集，从而存在 θ 点的邻域 $u(\varepsilon, \lambda)$，使得

$$(p+u(\varepsilon, \lambda))\cap S(\partial\Omega)=\phi$$

故由引理1.1知存在 E 的有限维子空间 $E^{(n)}$，$p\in E^{(n)}$ 及连续紧算子 $T_n:\bar{\Omega}\to E^{(n)}$，使得

$f_{Tx-T_nx}(\varepsilon)>1-\lambda$, $\forall x\in\bar{\Omega}$。令$\Omega_n=\Omega\cap E^{(n)}$, $S_n=I-T_n$。下证$p\notin S_n(\partial\Omega_n)$。

事实上，若有$x_0\in\partial\Omega_n\subset\partial\Omega$，使得$p=S_nx_0$，于是有

$$f_{Sx_0-p}(\varepsilon)=f_{Sx_0-S_nx_0}(\varepsilon)=f_{Tx_0-T_nx_0}(\varepsilon)>1-\lambda$$

这与$(p+u(\varepsilon,\ \lambda))\cap S(\partial\Omega)=\phi$相矛盾．又因$(I-(I-T_n))(\Omega_n)$为紧集，故有限维空间$E^{(n)}$中的拓扑度$\deg_n(S_n,\ \Omega_n,\ p)$有意义。我们定义$S$的 Leray-Schauder 度为

$$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)=\deg_n(S_n,\ \Omega_n,\ p) \tag{2.1}$$

为了说明(2.1)中所定义的拓扑度有意义，我们需要说明该拓扑度与$u(\varepsilon,\ \lambda)$、空间$E^{(n)}$及算子T_n的选择无关。

1．先证当$u(\varepsilon,\ \lambda)$固定时，$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)$与$E^{(n)}$及$T_n$的选择无关。事实上，设有$E^{(m)}$, T_m也满足定义 2 中的要求，现证

$$\deg_n(S_n,\ \Omega_n,\ p)=\deg_m(S_m,\ \Omega_m,\ p) \tag{2.2}$$

我们用$E^{(l)}$表$E^{(n)}$与$E^{(m)}$的线性和。令$\Omega_l=E^{(l)}\cap\Omega$。$T_n$可视为$\bar{\Omega}_l\to E^{(l)}$的映象，因此$S_n$映$\bar{\Omega}_l\to E^{(l)}$。由简化定理知

$$\deg_l(S_n,\ \Omega_l,\ p)=\deg_n(S_n,\ \Omega_n,\ p)$$

同理有

$$\deg_l(S_m,\ \Omega_l,\ p)=\deg_m(S_m,\ \Omega_m,\ p)$$

下证

$$\deg_l(S_n,\ \Omega_l,\ p)=\deg_l(S_m,\ \Omega_l,\ p)$$

令

$$h_t(x)=tS_n(x)+(1-t)S_m(x)$$

若有$t_0\in[0,\ 1]$, $x_0\in\partial\Omega$，使得$p=h_{t_0}(x_0)$，则有

$$\begin{aligned}f_{Sx_0-p}(\varepsilon)&=f_{Sx_0-t_0S_n(x_0)-(1-t_0)S_m(x_0)}(\varepsilon)=f_{t_0T_nx_0+(1-t_0)T_mx_0-Tx_0}(\varepsilon)\\&\geqslant\Delta[f_{t_0(T_nx_0-Tx_0)}(t_0\varepsilon),\ f_{(1-t_0)(T_mx_0-Tx_0)}((1-t_0)\varepsilon)]\\&>1-\lambda\end{aligned}$$

矛盾。从而$p\notin h_t(\partial\Omega)$, $\forall t\in[0,\ 1]$，故由有限维空间中拓扑度的同伦不变性知

$$\deg_l(S_n,\ \Omega_l,\ p)=\deg_l(S_m,\ \Omega_l,\ p)$$

从而(2.2)成立。

2．现证$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)$不依赖于$u(\varepsilon,\ \lambda)$的选取。

设另有θ点的邻域$u_1(\varepsilon_1,\lambda_1)$也满足定义 2 中的条件。取

$$0<\varepsilon_0\leqslant\min\{\varepsilon,\ \varepsilon_1\},\ 0<\lambda_0\leqslant\min\{\lambda,\ \lambda_1\}$$

于是$u(\varepsilon_0,\ \lambda_0)$也满足定义 2 中的条件。

设S_n, Ω_n; S_m, Ω_m和S_l, Ω_l分别对$u(\varepsilon,\ \lambda)$, $u_1(\varepsilon_1,\ \lambda_1)$和$u(\varepsilon_0,\ \lambda_0)$满足定义 2 中的条件，于是由$\varepsilon_0$, λ_0的取法知S_l, Ω_l对$u(\varepsilon,\ \lambda)$和$u_1(\varepsilon_1,\ \lambda_1)$都满足定义 2 中的条件。于是由(2.2)可得

$$\deg_n(S_n,\ \Omega_n,\ p)=\deg_l(S_l,\ \Omega_l,\ p)$$
$$\deg_m(S_m,\ \Omega_m,\ p)=\deg_l(S_l,\ \Omega_l,\ p)$$

因而有

$$\deg_m(S_m,\ \Omega_m,\ p)=\deg_n(S_n,\ \Omega_n,\ p)$$

综上所述，由(2.1)式所定义的拓扑度有确定的意义。

下面讨论我们所定义的 Leray-Schauder 度的性质。

定理2.1　(2.1)式中所定义的 Leray-Schauder 度具有如下的性质:

(i) $\mathrm{Deg}(I,\ \Omega,\ p)=1,\ \forall p\in\Omega$;

(ii) $\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)\neq 0$, 则 $S(x)=p$ 在 Ω 中有解;

(iii) 若 $H(t,\ x)$ 是 $[0,\ 1]\times\bar{\Omega}$ 上的连续紧映象且 $p\notin(I-H(t,\ \cdot))(\partial\Omega),\forall t\in[0,1]$, 则 $\mathrm{Deg}(I-H(t,\ \cdot),\ \Omega,\ p)$ 与 $t\in[0,\ 1]$ 无关;

(iv) 设 $\Omega_1,\ \Omega_2$ 是 Ω 中二不相交的开集, 且 $p\notin S(\bar{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))$, 则

$$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)=\mathrm{Deg}(S,\ \Omega_1,\ p)+\mathrm{Deg}(S,\ \Omega_2,\ p)$$

(v) 设 Ω_0 是 Ω 的开子集且 $p\notin S(\bar{\Omega}\backslash\Omega_0)$, 则

$$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)=\mathrm{Deg}(S,\ \Omega_0,\ p)$$

(vi) 设 $p\notin S(\partial\Omega)$, 则

$$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)=\mathrm{Deg}(S-p,\ \Omega,\ \theta)$$

证　(i)和(vi)由定义 2 直接可得.

(ii) 设 $S(x)=p$ 在 Ω 中无解, 故 $p\notin S(\bar{\Omega})$. 由引理1.2, $S(\bar{\Omega})$ 为闭集, 故存在零点 θ 邻域 $u(\varepsilon,\ \lambda)$, 使得 $(p+u(\varepsilon,\ \lambda))\cap S(\bar{\Omega})=\phi$. 取 E 的有限维子空间 $E^{(n)}$ 及有限维连续紧算子 $T_n:\bar{\Omega}\to E^{(n)}$, 使得

$$Tx-T_nx\in u(\varepsilon,\ \lambda),\qquad \forall x\in\bar{\Omega}$$

令 $S_n=I-T_n$, $\Omega_n=E^{(n)}\cap\Omega$. 由定义 2 知

$$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)=\deg_n(S_n,\ \Omega_n,\ p)$$

若有 $x_0\in\bar{\Omega}_n\subset\bar{\Omega}$, 使得 $S_nx_0=p$, , 则有

$$f_{Sx_0-p}(\varepsilon)=f_{Sx_0-S_nx_0}(\varepsilon)=f_{Tx_0-T_nx_0}(\varepsilon)>1-\lambda$$

这与 $(p+u(\varepsilon,\ \lambda))\cap S(\bar{\Omega})=\phi$ 相矛盾. 由此矛盾知 $p\notin S_n(\bar{\Omega}_n)$, 从而有

$$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)=\deg(S_n,\ \Omega_n,\ p)=0$$

矛盾. 由此矛盾结论(ii)得证.

(iii) 先证存在 θ 的邻域 $u(\varepsilon,\ \lambda)$ 使得下式对 $t\in[0,\ 1]$ 一致成立:

$$(p+u(\varepsilon,\ \lambda))\cap(I-H(t,\ \cdot))(\partial\Omega)=\phi$$

设不然, 存在 $\varepsilon_n>0,\ \lambda_n>0,\ n=1,\ 2,\ \cdots$, 且 $\lambda_n\to 0,\ \varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$ 及 $x_n\in\partial\Omega,\ t_n\in[0,\ 1]$, $n=1,\ 2,\ \cdots$, 使得

$$f_{p-x_n+H(t_n,x_n)}(\varepsilon_n)>1-\lambda_n$$

由于 $\{t_n\}$ 和 $\{H(t_n,\ x_n)\}$ 均有收敛子列, 不妨仍记其收敛子列为 $\{t_n\}$ 和 $\{H(t_n,\ x_n)\}$ 且 $t_n\to t_0$, $H(t_n,\ x_n)\to q$. 另由 Menger 三角不等式

$$f_{p-x_n+q}(\varepsilon)\geqslant\Delta\left[f_{p-x_n+H(t_n,x_n)}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),\ f_{q-H(t_n,x_n)}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$

知, $x_n\to p+q\in\partial\Omega(n\to\infty)$, 因而有

$$p=(I-H(t_0,\ \cdot))(p+q)$$

矛盾. 由此矛盾知结论成立.

另由引理 1.1 知, 存在有限维子空间 $E^{(n)}\subset E$ 及有限维连续紧映象 $K_n:[0,\ 1]\times\bar{\Omega}\to E^{(n)}$ 使得

$$H(t,\ x)-K_n(t,\ x)\in u(\varepsilon,\ \lambda),\ \forall(t,\ x)\in[0,\ 1]\times\bar{\Omega}$$

令 $k_t(x)=x-K_n(t,\ x)$, $\Omega_n=E^{(n)}\cap\Omega$. 于是有

$$\mathrm{Deg}(I-H(t,\ \cdot),\ \Omega,\ p)=\deg_n(k_t,\ \Omega_n,\ p),\qquad \forall t\in[0,\ 1]$$

若有 $x_0\in\partial\Omega_n$，$t_0\in[0,\ 1]$，使 $k_{t_0}(x_0)=p$，则有

$$f_{x_0-H(t_0,x_0)-p}(\varepsilon)=f_{x_0-H(t_0,x_0)-x_0+K_n(t_0,x_0)}(\varepsilon)>1-\lambda$$

矛盾。由此矛盾知，$p\notin k_t(\partial\Omega)$，$\forall t\in[0,\ 1]$，于是有

$$\mathrm{Deg}(I-H(t,\ \cdot),\ \Omega,\ p)=\deg_n(k_t,\ \Omega_n,\ p)=\mathrm{const}$$

(iv) 因$\bar{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2)$是闭集，故$S(\bar{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))$是闭集。从而存在零点$\theta$邻域$u(\varepsilon,\lambda)$，使得

$$(p+u(\varepsilon,\ \lambda))\cap S(\bar{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))=\phi$$

故可取有限维子空间$E^{(n)}\subset E$及有限维连续紧算子$T_n:\bar{\Omega}\to E^{(n)}$，使对一切$x\in\bar{\Omega}$，$Tx-T_nx\in u(\varepsilon,\ \lambda)$。

令

$$S_n=I-T_n,\quad \Omega_n=E^{(n)}\cap\Omega,\quad \Omega_n^{(1)}=E^{(n)}\cap\Omega_1,\quad \Omega_n^{(2)}=E^{(n)}\cap\Omega_2$$

由定义 2 知

$$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)=\deg_n(S_n,\ \Omega_n,\ p)$$
$$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega_1,\ p)=\deg_n(S_n,\ \Omega_n^{(1)},\ p)$$
$$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega_2,\ p)=\deg_n(S_n,\ \Omega_n^{(2)},\ p)$$

显然$\Omega_n^{(1)}\cap\Omega_n^{(2)}=\phi$。若有$p\in S_n(\bar{\Omega}_n\backslash(\Omega_n^{(1)}\cup\Omega_n^{(2)}))$，则存在$x_0$，使得$S_n(x_0)=p$。但因

$$f_{x_0-Tx_0-p}(\varepsilon)=f_{x_0-Tx_0-x_0+T_nx_0}(\varepsilon)>1-\lambda$$

这就与

$$(p+u(\varepsilon,\ \lambda))\cap S(\bar{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))=\phi$$

相矛盾。由此矛盾知$p\notin S_n(\bar{\Omega}_n\backslash(\Omega_n^{(1)}\cup\Omega_n^{(2)}))$，故有

$$\deg_n(S_n,\ \Omega_n,\ p)=\deg_n(S_n,\ \Omega_n^{(1)},\ p)+\deg_n(S_n,\ \Omega_n^{(2)},\ p)$$

即

$$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)=\mathrm{Deg}(S,\ \Omega_1,\ p)+\mathrm{Deg}(S,\ \Omega_2,\ p)$$

结论(v)由结论(iv)直接可得。证毕。

定理2.2　由定义 2 所定义的 Leray-Schauder 度有下列性质：

(i) 设映象S_1和S_2按定义 2 所定义的度存在，$p\in E\backslash S_1(\partial\Omega)$，且当$\forall x\in\partial\Omega$时，$S_1(x)=S_2(x)$。则有

$$\mathrm{Deg}(S_1,\ \Omega,\ p)=\mathrm{Deg}(S_2,\ \Omega,\ p)$$

(ii) 当p在$E\backslash S(\partial\Omega)$的连通区域变化时，则$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)$的值不变。

证　(i)直接可得，其证明这里省略。

(ii) 设V是$E\backslash S(\partial\Omega)$的连通区域。取$p\in V$，故存在零点$\theta$邻域$u(\varepsilon_0,\ \lambda_0)$使得$(p+u(\varepsilon_0,\ \lambda_0))\cap S(\partial\Omega)=\phi$。取正数$\varepsilon_1$，$\lambda_1$满足$\varepsilon_1<\varepsilon_0$，$\lambda_1<\lambda_0$，再取$q\in V\cap(p+u(\varepsilon_1,\ \lambda_1))$。令

$$h_t(x)=S(x)-t(q-p),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,\quad x\in\bar{\Omega}$$

若有$t_0\in[0,\ 1]$，$x_0\in\partial\Omega$，使$S(x_0)-t_0(q-p)=p$，则有

$$f_{S(x_0)-p}(\varepsilon_0)=f_{t_0(q-p)}(\varepsilon_0)>1-\lambda_0$$

矛盾。由此矛盾知$p\notin h_t(\partial\Omega)$，$\forall t\in[0,\ 1]$。因此

$$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)=\mathrm{Deg}(S-(q-p),\ \Omega,\ p)$$
$$=\mathrm{Deg}(S-q,\ \Omega,\ \theta)=\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ q)$$

因而映象$\Psi:p\mapsto\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)$是$V$上的连续函数。由拓扑学知$\Psi(V)$是连通区域。因$\Psi$取整值，故当$p\in V$时，$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)$取同一值。证毕。

定理2.3 设T_1和T是两个映$\bar{\Omega}$到E的连续紧映象. 设$p\notin S_1(\partial\Omega)$, $p\notin S(\partial\Omega)$, $S_1=I-T_1$, $S=I-T$, 且

$$f_{T_1x-Tx}(t)\geqslant f_{x-Tx-p}(t),\qquad \forall t>0,\ x\in\partial\Omega \tag{2.3}$$

则必有

$$\mathrm{Deg}(S_1,\ \Omega,\ p)=\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)$$

证 令

$$h_t(x)=x-Tx-t(T_1x-Tx),\qquad t\in[0,\ 1],\ x\in\bar{\Omega}$$

下证$p\notin h_t(\partial\Omega)$, $\forall t\in[0,\ 1]$. 设相反, 存在某一$t_0\in[0,\ 1]$和$x_0\in\partial\Omega$, 使得$h_{t_0}(x_0)=p$. 显然由假定$t_0\neq 0$, $t_0\neq 1$, 故由$x_0-Tx_0-p=t_0(T_1x_0-Tx_0)$知

$$f_{x_0-Tx_0-p}(t)=f_{T_1x_0-Tx_0}(t/t_0),\qquad \forall t>0 \tag{2.4}$$

由(2.4)及假设条件知

$$f_{T_1x_0-Tx_0}(t)=f_{T_1x_0-Tx_0}\left(\frac{t}{t_0}\right)=\cdots=f_{T_1x_0-Tx_0}\left(\frac{t}{t_0^n}\right),\qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

因而有$f_{T_1x_0-Tx_0}(t)=H(t)$, $\forall t>0$. 由(2.4)即得

$$f_{x_0-Tx_0-p}(t)=H(t),\qquad \forall t>0$$

于是有$p=x_0-Tx_0$, 即$p\in S(\partial\Omega)$. 这与$p\notin S(\partial\Omega)$相矛盾. 由此矛盾知$p\notin h_t(\partial\Omega)$, $\forall t\in[0,\ 1]$. 于是有

$$\mathrm{Deg}(S_1,\ \Omega,\ p)=\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ p)$$

证毕.

推论2.4 设$\theta\in\Omega$, $T_1:\bar{\Omega}\to E$是连续紧映象且满足条件: $x\neq T_1x$, $f_{T_1x}(t)\geqslant f_x(t)$, $\forall t>0$, $\forall x\in\partial\Omega$, 则

$$\mathrm{Deg}(I-T_1,\ \Omega,\ \theta)=1$$

定理2.5 设Ω是含$\theta\in\Omega$点的开集, 且关于θ点对称. 设$T:\bar{\Omega}\to E$是连续的紧映象, $S=I-T$. 若

$$T(-x)=-Tx,\ Tx\neq x,\qquad \forall x\in\partial\Omega$$

则$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ \theta)$是一奇数.

证 仿引理1.1的证明, 对零点θ的任一邻域, $u(\varepsilon,\ \lambda)$, $\varepsilon>0$, $\lambda>0$, 可作一有限维的连续紧算子T_n满足下列条件:

(i) $T_n(-x)=-T_n(x)$, $\qquad\forall x\in\partial(\Omega\cap E^{(n)})$

(ii) $Tx-T_nx\in u(\varepsilon,\ \lambda)$, $\qquad\forall x\in\bar{\Omega}$

因而由$\deg(S_n,\ \Omega_n,\ \theta)$为奇数知$\mathrm{Deg}(S,\ \Omega,\ \theta)$为奇数, 这里$\Omega_n=E^{(n)}\cap\Omega$.

三、不动点定理

在本节, 我们将利用前一节所建立的度理论研究Menger PN-空间$(E,\ \mathscr{F},\ \Delta)$中映象的不动点定理. 在本节中我们仍处处假定$\Delta$满足$\Delta(t,\ t)\geqslant t$, $\forall t\in[0,\ 1]$.

定理3.1 设Ω是E中的凸开集, $T:\bar{\Omega}\to E$是连续紧映象, $T(\partial\Omega)\subset\bar{\Omega}$. 则$T$在$\bar{\Omega}$中有不动点.

证 不妨设$Tx\neq x$, $\forall x\in\partial\Omega$(否则定理已证). 取$x_0\in\Omega$, 令$H(t,\ x)=tTx+(1-t)x_0$. 则$H:[0,\ 1]\times\bar{\Omega}\to E$是连续紧映象. 再令$h_t(x)=x-H(t,\ x)$. 下证

$$\theta \notin h_t(\partial\Omega), \qquad \forall t \in [0, 1]$$

设不然，存在 $t_1 \in [0, 1]$，$x_1 \in \partial\Omega$，使得 $h_{t_1}(x_1)=\theta$。于是

$$x_1 = t_1 T x_1 + (1-t_1)x_0$$

显然 $t_1 \neq 0$，$t_1 \neq 1$。因Ω是开集，故存在 $\varepsilon_0>0$，$\lambda_0>0$，使得 $x_0+u(\varepsilon_0, \lambda_0)\subset\Omega$。又因 $Tx_1 \in \bar{\Omega}$，故有 $z_0 \in \Omega$，使得

$$Tx_1 - z_0 \in \frac{1-t_1}{t_1} u(\varepsilon_0, \lambda_0) \tag{3.1}$$

下证

$$t_1 z_0 + (1-t_1)x_0 + (1-t_1)u(\varepsilon_0, \lambda_0) \subset \Omega \tag{3.2}$$

事实上，若 $x \in t_1 z_0+(1-t_1)x_0+(1-t_1)u(\varepsilon_0, \lambda_0)$，故存在某一 $z \in u(\varepsilon_0, \lambda_0)$，使得

$$x = t_1 z_0 + (1-t_1)x_0 + (1-t_1)z = t_1 z_0 + (1-t_1)(x_0+z)$$

因 $x_0+u(\varepsilon_0, \lambda_0)\subset\Omega$，故 $x_0+z\in\Omega$。又 $z_0\in\Omega$，且Ω是凸集，因而 $x\in\Omega$。故(3.2)得证。于是有

$$x_1 = t_1 T x_1 + (1-t_1)x_0 = t_1 z_0 + (1-t_1)x_0 + t_1(Tx_1 - z_0)$$

由(3.1)知 $t_1(Tx_1-z_0)\in(1-t_1)u(\varepsilon_0, \lambda_0)$；再由(3.2)即知 $x_1\in\Omega$，这与 $x_1\in\partial\Omega$ 相矛盾。故 $\theta\notin h_t(\partial\Omega)$，$\forall t\in[0, 1]$，于是有

$$\mathrm{Deg}(I-T, \Omega, \theta) = \mathrm{Deg}(I-x_0, \Omega, \theta) = 1$$

因而T在Ω内存在不动点。证毕。

定理3.2 设 Ω 是 E 中含 $\theta\in\Omega$ 点的开集，且Ω关于 θ 点对称。设 $T:\bar{\Omega}\to E$ 是连续紧映象，且满足

$$T(-x) = -Tx, \qquad \forall x\in\partial\Omega$$

则 T 在 $\bar{\Omega}$ 中有不动点。

证 结论由定理2.5直接可得。

另由推论2.4可得下面的结果。

定理3.3 设Ω是E中的开集，$\theta\in\Omega$，$T:\bar{\Omega}\to E$ 是连续紧映象，再设T满足条件：

$$f_{Tx}(t) \geqslant f_x(t), \qquad \forall x\in\partial\Omega,\ t>0$$

则T在$\bar{\Omega}$中存在不动点。

下面的定理是郭大钧[10]中主要结果的推广。

定理3.4 设 Ω_1，Ω_2 是无穷维 Menger PN-空间$(E, \mathscr{F}, \Delta)$中的两个开集，$\theta\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，其中$\Delta$满足条件$\Delta(t, t)\geqslant t$，$\forall t\in[0, 1]$。设 $T:\bar{\Omega}_2\to E$ 是紧连续映象。若下列条件之一成立：

(i) $x\in\partial\Omega_1$ 时，$f_{Tx}(t)\geqslant f_x(t)$，　　$\forall t\geqslant 0$

　　$x\in\partial\Omega_2$ 时，$f_{Tx}(t)\leqslant f_x(t)$，　　$\forall t\geqslant 0$

(ii) $x\in\partial\Omega_1$ 时，$f_{Tx}(t)\leqslant f_x(t)$，　　$\forall t\geqslant 0$

　　$x\in\partial\Omega_2$ 时，$f_{Tx}(t)\geqslant f_x(t)$，　　$\forall t\geqslant 0$

则 T 在 $\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1$ 中至少存在一不动点。

为证定理3.4，我们先证下面的引理。

引理3.5 设 Ω 是无穷维 Menger PN-空间$(E, \mathscr{F}, \Delta)$中的开集，其中Δ满足$\Delta(t, t)\geqslant t$，$\forall t\in[0, 1]$。设 $T:\bar{\Omega}\to E$ 是紧连续映象且满足条件：

(i) $\theta\notin\overline{T(\partial\Omega)}$

(ii) $Tx\neq\mu x,\qquad \forall\mu\in(0,1],\ x\in\partial\Omega$

则 $\qquad \mathrm{Deg}(I-T,\ \Omega,\ \theta)=0$

证 先证 $\theta\notin\overline{\bigcup_{\mu[0,1]}(\mu I-T)(\partial\Omega)}$。设相反，则存在$x_n\in\partial\Omega$，$\mu_n\in[0,1]$使得$\mu_n x_n-Tx_n\to\theta$ $(n\to\infty)$。因T是紧连续映象，故有子序列$\{\mu_{n_k}\}\subset\{\mu_n\}$，$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，使得$\mu_{n_k}\to\mu_0\in[0,1]$，$Tx_{n_k}\to y_0\in E$。

(1) 若$\mu_0=0$，故$Tx_{n_k}\to\theta$，这与条件(i)矛盾。

(2) 若$\mu_0\neq0$，则$x_{n_k}\to y_0/\mu_0\in\partial\Omega$。因而有

$$T\left(\frac{y_0}{\mu_0}\right)=y_0=\mu_0\cdot\frac{y_0}{\mu_0}$$

这与条件(ii)矛盾。由此矛盾，结论成立。因而存在某一零点θ邻域$u(\varepsilon,\lambda)$，$\varepsilon>0$，$\lambda>0$，使得

$$u(\varepsilon,\ \lambda)\cap\overline{\bigcup_{\mu\in[0,1]}(\mu I-T)(\partial\Omega)}=\phi \tag{3.3}$$

由引理1.1及定义2，存在有限维连续的紧算子$T_n:\bar{\Omega}\to E^{(n)}$，使得

$$Tx-T_nx\in u(\varepsilon,\ \lambda),\qquad \forall x\in\bar{\Omega}$$

且 $\qquad \mathrm{Deg}(I-T,\ \Omega,\ \theta)=\mathrm{deg}(I-T_n,\ \Omega_n,\ \theta)$

其中$\Omega_n=\Omega\cap E^n$。由假设$(E,\ \mathscr{F},\ \Delta)$是无穷维的，故存在$e_1\neq\theta$，$e_1\notin E^{(n)}$。令$E^{(n+1)}=\mathrm{span}\{e_1,\ E^{(n)}\}$，则$T_n$可视为$\bar{\Omega}\to E^{(n+1)}$的映象。令$\Omega_{n+1}=\Omega\cap E^{(n+1)}$，依定义2，又有

$$\mathrm{Deg}(I-T,\ \Omega,\ \theta)=\mathrm{deg}(I-T_n,\ \Omega_{n+1},\ \theta) \tag{3.4}$$

现证对一切$x\in\partial\Omega_{n+1}\subset\partial\Omega$有$\theta\neq\mu x-T_nx$，$\forall\mu\in[0,1]$。

事实上，若有$\mu_0\in[0,1]$，$x_0\in\partial\Omega_{n+1}$，使得$\mu_0x_0-T_nx_0=\theta$，于是有$\mu_0x_0=T_nx_0$。由于$Tx-T_nx\in u(\varepsilon,\lambda)$，$\forall x\in\bar{\Omega}$，故$Tx_0-\mu_0x_0\in u(\varepsilon,\lambda)$。这与(3.3)式相矛盾。故结论成立。于是在$\bar{\Omega}_{n+1}$上有

$$\mathrm{deg}(I-T_n,\ \Omega_{n+1},\ \theta)=\mathrm{deg}(-T_n,\ \Omega_{n+1},\ \theta) \tag{3.5}$$

但因T_n映$\bar{\Omega}_{n+1}\to E^{(n)}$，故$\mathrm{deg}(-T_n,\ \Omega_{n+1},\ \theta)=0$。于是由(3.4)和(3.5)知

$$\mathrm{Deg}(I-T,\ \Omega,\ \theta)=0$$

引理证毕。

定理3.4的证明。

设条件(i)成立，并设T在$\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_1$上无不动点（否则定理已证）。由推论2.4知

$$\mathrm{Deg}(I-T,\ \Omega_1,\ \theta)=1$$

由假设，当$x\in\partial\Omega_2$时，$f_{Tx}(t)\leqslant f_x(t)$，$\forall t\geqslant0$，故有

$$\theta\notin\overline{T(\partial\Omega_2)}\text{且}\ Tx\neq\mu x,\qquad \forall\mu\in(0,1]$$

于是由引理3.5，$\mathrm{Deg}(I-T,\ \Omega_2,\ \theta)=0$。但因

$$\mathrm{Deg}(I-T,\ \Omega_2\backslash\bar{\Omega}_1,\ \theta)=\mathrm{Deg}(I-T,\ \Omega_2,\ \theta)-\mathrm{Deg}(I-T,\ \Omega_1,\ \theta)$$
$$=0-1=-1$$

故T在$\Omega_2\backslash\bar{\Omega}_1$中有不动点。

当条件(ii)成立时，结论类似可证。

定理证毕。

参考文献

[1] Schwerzer, B. and A. Sklar, Statistical metric spaces, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 313—334.

[2] Schwerzer, B. and A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland (1983).

[3] Nagumo, M., Degree of mapping in convex linear topological spaces, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 497—511.

[4] Deimling, K., *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag (1985).

[5] Sherwood, H., On E-spaces and their relation to other classes of probabilistic metric spaces, *J. London Math. Soc.*, **44** (1969), 441—448.

[6] Bocsan, G., On some measures of noncompactness in probabilistic metric spaces, *Proc. Fifth Conf. Probability Theory*, Brasov (1974), 163—168; Bucharest Acad. R. S. R. (1977).

[7] Istratescu, I., A fixed point theorem for mappings with a probabilistic contractive iteration, *Rev. Roumaine Math. Pure Appl.*, **26** (1981), 431—435.

[8] Sehgal, V. M. and A. T. Bharucha-Reid, Fixed point of contraction mapping on probabilistic metric spaces, *Math. Systems Theory*, **6**, 2 (1972), 97—102.

[9] 林熙，一类概率线性赋范空间随机算子，科学通报，4 (1983), 199—201.

[10] 郭大钧，一个新的不动点定理，数学学报，**24** (1981), 444—450.

[11] 张石生，《不动点理论及应用》，重庆出版社 (1984).

[12] 张石生，概率度量空间中映象的不动点定理及应用，中国科学（A辑），**8** (1983), 495—504.

[13] 张石生，概率度量空间中的随机算子理论及应用，应用数学学报，**9**, 2 (1986), 129—137.

[14] Zhang Shi-sheng, On the theory of probabilistic metric spaces with applications, *Acta Math. Sinica*, New Series, **1**, 4 (1985), 366—377.

Topological Degree Theory and Fixed Point Theorems in Probabilistic Metric Spaces

Zhang Shi-sheng Chen Yu-qing

(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu*)

Abstract

The Leray-Schauder topological degree theory is established in the probabilistic linear normed spaces. Based on this theory, some fixed point theorems for mappings in the probabilistic linear normed spaces are shown.