

弯曲扩压管道中三维不可压粘性流的数值计算及湍流模型的研究*

焦德勇 杨弘炜 赵志君 苏杰先 冯国泰

(哈尔滨工业大学, 1988年5月20日收到)

摘 要

为了便于复杂形状管道中粘性流动的数值计算, 本文在任意曲线坐标系下导出了控制方程的 Favre 质量加权平均形式, 导出了一种考虑曲率影响的湍流模型。采用抛物化方法对弯曲扩压管道内的层流和湍流流动进行了数值计算。根据计算结果对压气机静叶流道内的气动性能进行了初步的分析。

一、前 言

弯曲扩压管道的一个重要工程应用就是压气机叶栅。

众所周知, 叶栅中的二次流在某些情况下对气流的稳定性有很大的影响。因此, 随着工程技术的发展, 特别是航空技术的发展, 对叶栅(包括管道)内的二次流研究受到了越来越多的重视。二次流的研究已经从非粘有旋模型^[1]发展到全粘 N-S 方程的直接求解。从理论上讲, 直接解 N-S 方程是最准确的方法, 但是由于它对计算机性能的要求很高, 工程应用受到了很大的限制, 必须对方程做一些比较符合实际的简化。自从 Spalding 首次提出抛物化假设的计算方法^[2]之后, 这种方法已经在等截面管内三维粘性流计算中得到了广泛的应用^{[3][4]}。为了在变截面管或其它更复杂形状的管道流动中使用抛物化方法, 采用曲线坐标系是很方便的, 因此有必要导出任意曲线坐标系中的流动的控制方程。

高雷诺数流动, 必然涉及湍流模型的选择。对于三维管流, 在众多的湍流模型中, κ - ϵ 模型是最合适的^[5]。为了考虑曲率及管道扩张等几何因素对湍流的影响, 本文采用了任意曲线坐标系中的度量张量重新推导了 κ 方程和 ϵ 方程, 给出了 κ - ϵ 方程模型曲率修正的统一形式。

叶栅端部的流动情况是非常复杂的, 弄清其机理, 改善二次流的分布, 可以提高压气机叶片负荷并能防止过早喘振, 对压气机设计和运行都有很大的意义。

二、任意曲线坐标系中质量加权平均的气动基本方程

在湍流计算中, 特别是可压缩湍流的计算, 通常应用 Favre 质量加权平均形式的控制方程。这是因为: 1) 方程中的脉动相关项要比由雷诺时均方程中的脉动相关项少得多; 2) 质量加平均值更接近于实测值^[6]。Favre 质量加权平均的概念为

* 叶开沅推荐。

$$\bar{\Phi}^0(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho \Phi(\mathbf{r}, t)}{\bar{\rho}} \quad (2.1)$$

其中 Φ 为任意物理量, ρ 为密度。

先对矢量形式的 N-S 方程组分别作质量加权平均处理, 然后运用一些矢量、张量公式, 即得曲线坐标系中的平均方程。

1. 连续方程

质量加权平均连续方程仍为守恒型, 其在任意曲线坐标系中的展开式为:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\bar{\rho} \sqrt{g} v^{0a})}{\partial x^a} = 0 \quad (2.2)$$

2. 动量方程

首先, 导出矢量形式的平均动量方程

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{v}^0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{v}^0 \bar{v}^0) = \bar{\rho} \mathbf{m} + \nabla \cdot (\bar{\Pi} - \bar{\rho} \bar{v}^0 \bar{v}^0) - \nabla \bar{p} \quad (2.3)$$

方程中脉动相关项仅剩一端应力张量项。略去质量力, 平均动量方程在任意曲线坐标系中的形式为:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} v_i^0) e^i + \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{g} g^{ab} v_i^0 v_j^0 \bar{\rho}) + \frac{1}{2} v_i^0 v_j^0 \frac{\partial g^{ab}}{\partial x^c} \right] e^i \\ & = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x^i} e^i + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{ab}}{\partial x^c} [\bar{\Pi}_{ab} - \bar{\rho} v_i^0 v_j^0] e^i \\ & + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{g} g^{ab} \bar{\Pi}_{ab} - \sqrt{g} g^{ab} \bar{\rho} v_i^0 v_j^0) e^i \end{aligned} \quad (2.4)$$

式中

$$\bar{\Pi}_{ab} = \mu \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial x^a} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x^b} - 2v_i^0 \Gamma_{ab} \right) - \frac{2}{3} \mu g_{ab} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} v^{0a})}{\partial x^a}$$

3. 能量方程

以总焓 H 所表示的能量方程在任意曲线坐标系中的展开式为:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} H^0) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{g} \bar{\rho} H^0 v^{0a}) \\ & = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{g} k \frac{\partial T}{\partial x^a}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^a} [\sqrt{g} (\bar{\Pi}^{ab} v_i^0 \\ & + \bar{\Pi}^{ab} v_i^0)] - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} \bar{\rho} H^0 v^{0a})}{\partial x^a} \end{aligned} \quad (2.5)$$

同样, 以内能 E 、焓 h 等所表示的能量方程也可以得到, 其形式与(2.5)式类似。

另外, 湍流理论分析和湍流模型研究中的两个重要方程——平均动能方程和湍应力方程的张量形式及其在任意曲线坐标系中的展开式也已导出, 由于一般湍流计算中并不涉及这两个方程, 本文中不予给出, 详见[7]。

三、任意曲线坐标系中的 κ, ϵ 模型方程

为了考虑曲率及管道扩张等几何因素对湍流的影响，作者在曲线坐标系下导出了 κ, ϵ 方程。因为度量张量（或拉梅系数）是一种表示坐标曲线变化的量，完全可以包含几何形状变化所产生的效应。这样，曲率及管道扩张对湍流的影响自然就考虑进去了。

考虑略去质量力的动量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \Pi \quad (3.1)$$

用 \mathbf{v} 对上式分别左、右点积，再将所得两方程相加，并考虑下列形式的连续方程

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) - \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.2)$$

然后将所得方程作质量加权平均处理，得：

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \rho \mathbf{v}^0 \cdot \nabla \kappa = & -\nabla \cdot (p' \mathbf{v}'' + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}'' \mathbf{v}'' - \rho \mathbf{v}'' \mathbf{v}'' : \nabla \mathbf{v}^0 \\ & + \mu \nabla^2 \kappa - \mu (\nabla \mathbf{v}'') : (\nabla \mathbf{v}'') + p' \nabla \cdot \mathbf{v}'' + \frac{1}{3} \mu \mathbf{v}'' \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}'') \end{aligned} \quad (3.3)$$

式中脉动相关项的模化处理的方法与 Jones-Launder 的 $\kappa-\epsilon$ 模型相同。处理后，在任意曲线坐标系中展开，得：

$$\rho \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \rho g^{a\alpha} \bar{v}_a^0 \frac{\partial \kappa}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\Gamma_{*} g^{a\alpha} \sqrt{g} \frac{\partial \kappa}{\partial x^\alpha} \right) + \kappa \left(\frac{P_{*}}{\kappa} - \frac{\rho \epsilon}{\kappa} \right) \quad (3.4)$$

同样也可导出 ϵ 方程在曲线坐标系中的展开式：

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho g^{a\alpha} \bar{v}_a^0 \frac{\partial \epsilon}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\Gamma_{*} g^{a\alpha} \sqrt{g} \frac{\partial \epsilon}{\partial x^\alpha} \right) + \epsilon \left(c_1 \frac{P_{*}}{\kappa} - \frac{c_2 \rho \epsilon}{\kappa} \right) \quad (3.5)$$

式(3.4)和(3.5)就是作者重新导出的、考虑了曲率及管道扩张等几何参数影响的 $\kappa-\epsilon$ 方程。式中 $\Gamma_{*} = \mu + \mu_t / \sigma_{*}$ 及 $\Gamma_{*} = \mu + \mu_t / \sigma_{*}$ 。湍流生成项 P_{*} 为：

$$\begin{aligned} P_{*} = & \mu_t g^{a\alpha} g^{\beta\beta} \left(\frac{\partial v_a^0}{\partial x^\alpha} - v_a^0 \Gamma_{*}^{\alpha} \right) \left(\frac{\partial v_\beta^0}{\partial x^\alpha} - v_\beta^0 \Gamma_{*}^{\alpha} \right) \\ & + \mu_t g^{a\alpha} g^{\beta\beta} \left(\frac{\partial v_a^0}{\partial x^\alpha} - v_a^0 \Gamma_{*}^{\alpha} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

湍流粘性系数 $\mu_t = c_{*} \rho \kappa^2 / \epsilon$ 。

四、弯曲扩压管道中三维不可压粘性流的数值计算方法

本文研究了一弯曲扩压管道（图1），其两个侧面为等半径的圆柱面，上下端面为平行平面。计算采用正交曲线坐标系。 x_1 选为沿侧面的圆弧曲线作为准主流方向，与 x_1 正交的 x_2, x_3 组成的坐标曲面为二次流面。

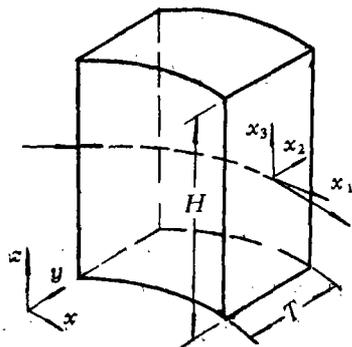


图 1

1. 控制方程的抛物化处理

将定常、不可压条件代入式(2.2)、(2.3)、(3.4)和(3.5)中,引入抛物化假设,湍流应力项直接用 Boussinesq 公式代入,得下列方程(为了表示简单,以下各方程中省去表示平均量的上标符号)

连续方程

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{v_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (4.1)$$

动量方程

$$W_i \frac{\partial v_i}{\partial x_1} = - \frac{1}{H_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}_T} \left(\frac{1}{H_i^2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \right) + c \frac{\partial v_i}{\partial x_2} - v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3} + F_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.2)$$

式中 v_i , H_i 分别为 x_i 方向的速度和拉梅系数; $\text{Re}_T = \text{Re}/(1 + \mu_t/\mu)$ 为湍流雷诺数; W , C 和 F_i 是 v_i 和 H_i 的函数。

湍流模型方程

$$W_i \frac{\partial f}{\partial x_1} = \Gamma_f \left(\frac{1}{H_i^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) + C_{f1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + C_{f2} \frac{\partial f}{\partial x_3} + F_f \quad (4.3)$$

式中 f 分别表示 κ 和 ε ; W_f , C_{f1} , C_{f2} 及 F_f 分别为 v_i , f 和 H_i 等的函数。

2. 定解条件

以 ϕ 表示二次流面修正速度的势函数,由连续方程(4.1)得二次速度的修正方程

$$(\partial^2 \phi / \partial x_2^2) / H_2^2 + A(\partial \phi / \partial x_2) + \partial^2 \phi / \partial x_3^2 = S_\phi \quad (4.4)$$

湍流计算时的边界处理采用了壁函数方法,即在紧邻近壁面的第一个网格点 P 处有下列关系:

$$\frac{u_y}{(\tau/\rho)_w} C_v^{1/4} K_p^{3/2} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[E y_p \frac{\rho (C_v^{1/2} K_p)^{1/2}}{\mu} \right] \quad (4.5)$$

式中 K_p 为 P 点的湍动能, κ 为 von Karman 常数, E 为经验常数。

3. 数值方法及求解过程

抛物型方程采用的是基于 Crank-Nicolson 隐式格式 ADI 的方法离散; Poisson 方程是采用五点差分格式,离散时考虑了对角占优。于是整个求解采用步进积分方法,在每个流面上采用 TDMA 法分别沿 x_2 、 x_3 扫描若干次,直到满足收敛条件,然后再进行下一个流面的迭代计算。

五、计算结果与实验结果的比较和分析

本文对图 1 所示的弯曲扩压管道内的流场进行了计算。计算分为两部分:一是不可压层流计算(低雷诺数);二是不可压湍流计算(高雷诺数)。

图 2 为低雷诺数 ($\text{Re}=300$, $H/T=2.0$) 下出口截面上主流速度分布图。由图可见主流速度的最大值偏向压力面一侧。主流速度的最大值随 Re 增大而减小。图 3 为 $\text{Re}=206$,

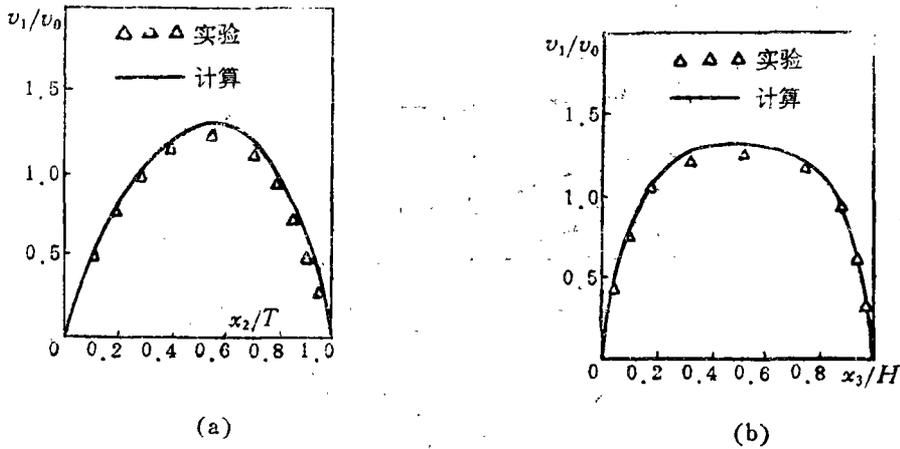


图 2

$H/T=1.0$, $x_2/T=0.4$ 时的二次流速度 v_2 的分布曲线。图 4 是沿流道的平均流向旋涡 Ω_2 的变化与 Squire-Winter 的流向涡理论计算公式 $\Omega_2=2\theta\eta_1$ 的比较。从图可见, 当流道转角较小时, 两者比较接近, 这同实验结果是一致的, 即 S-W 公式在转角比较小时具有一定的准确性。因为本方法考虑了粘性的影响, 计算所得的流向涡分布是更可信的。

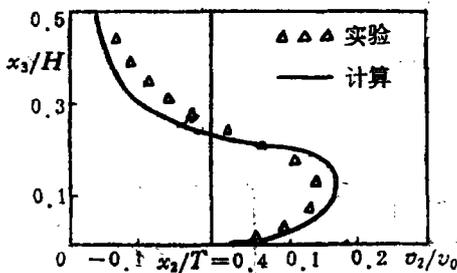


图 3

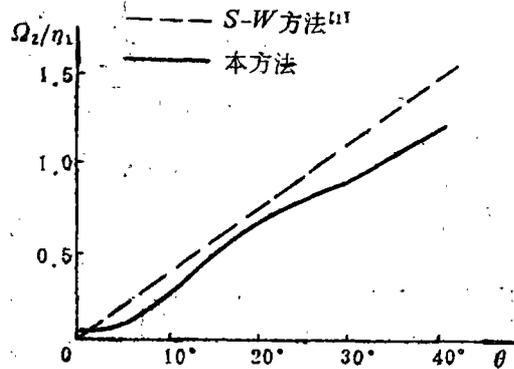


图 4

图 5、图 6 和图 7 分别给出了 $Re=10^5$ 时用本文给出的湍流模型所得到的计算结果, 依次给出了出口截面上的二次流速度 v_2 , v_3 和主流速 v_1 的分布, 图中也给出了实验结果。从图中的比较可以看出与实验结果吻合很好。这说明本文给出的 $k-\epsilon$ 模型可进行大雷诺数湍流

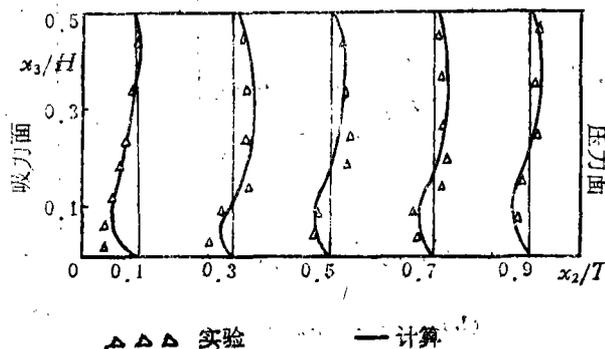


图 5

计算, 能够反映曲率的影响。

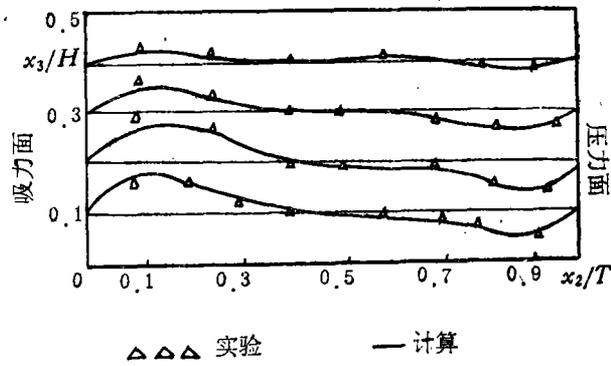


图 6

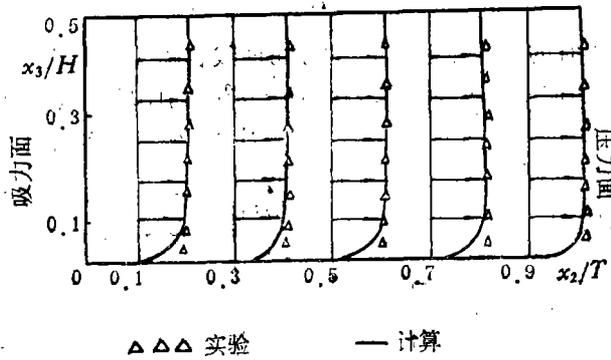
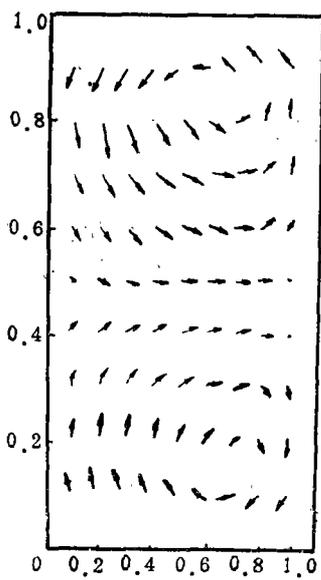
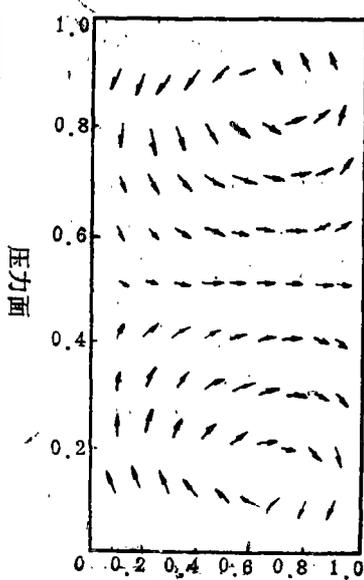


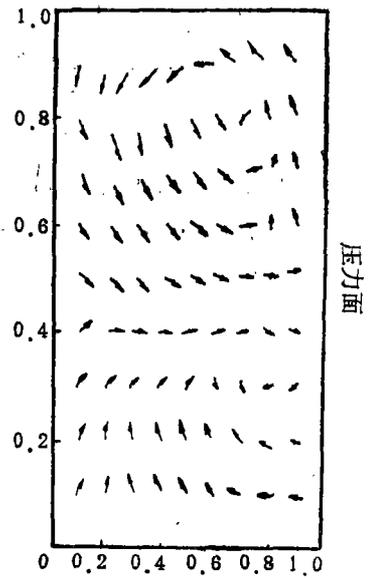
图 7



(a) $v_R=0.2$



(b) $v_R=0$



(c) $v_R=0.5$

为了探讨改善叶栅中的二次流分布的途径,我们对端壁的运动对流动的影响做了数值计算研究尝试。图8给出了大的进口速度梯度下端壁以不同速度 v_B 运动时出口截面上的二次流流谱。 v_B 为相对于进口平均主流速度的无量纲值。从 $v_B=0$ 的流谱图可以看出,端壁不动时吸力面壁角区处的二次流比较强。当端壁由吸力面向压力面方向运动时,吸力面壁角区处的二次流明显减弱。这与实验结果也是一致的^[10]。国内外的实践都证明,在单级压气机和多级压气机的前几级中内围带对压气机的喘振特性的影响不大^{[8],[9]}。这是因为入口条件均匀。当叶栅进口条件很坏时,若有内围带,则气道后半壁角区流向旋涡很强,主流速度降低,气流有很强的过转现象,引起后面动叶进口冲角增大,引起动叶脱流和失速,甚至进而引起整个压气机喘振。去掉内围带可以改变流向旋涡的强度和分布,使壁角区的主流速度增大,减小甚至清除过转现象。从而可以防止气流脱流,压气机的喘振特性也可能由此而得到改善。

六、结 束 语

1. 本文导出了适用于气动力学粘性流求解的任意曲线坐标系中质量加权平均的控制方程及湍流模式方程,为计算具有复杂边界的粘性流动(层流及湍流)提供了方面的理论基础;

2. 采用抛物化方法对弯曲扩压管内的层流和湍流进行了数值研究,所得结果与实验结果吻合很好。

参 考 文 献

- [1] Squire, H. B. and K. G. Winter, The Secondary Flows in Cascades of Airfoils in a Nonuniform Stream, *Journal of Aeronautical Science*, 18, April (1951).
- [2] Patankar, S. V. and D. B. Spalding, A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flow, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 15 (1972).
- [3] Prapat, V. S. and D. B. Spalding, Numerical computation of flow in curved ducts, *The Aeronautical Quarterly*, 26, August (1975).
- [4] Reitman, V., M. Isreali and M. Wolfshin, Numerical solution of the Reynolds stress equations in a developing duct flow, AIAA Paper, No. 83-1883 (1983).
- [5] 焦德勇, 杨弘炜, 湍流的数学模型, 哈尔滨工业大学科学研究报告, KJ8702004 (1987).
- [6] 王应时、范维澄、周力行、徐旭常, 《燃烧过程的数值计算》, 科学出版社(1986).
- [7] 杨弘炜、焦德勇、冯国泰, 粘性湍流模式基本方程及其在非正交曲线坐标系中的展开式, 哈尔滨工业大学学报, 2 (1986).
- [8] 蔡睿贤、王锡刚等, 静叶内围带对轴流式压气机气动性能的影响及4500马力燃气轮机的热力性能, 工程热物理学报, 1, 1 (1980).
- [9] Jefferson, J. F. and R. C. Turner, Some shrouding and tip clearance effects in axial flow compressors, *Transaction of Northwest Coast Institute of Shipbuilding and Engineering*, 5 (1958).
- [10] 赖声错、苏荣培等, 扩压叶栅中端部流动的实验研究, 工程热物理学报, 3, 4 (1982).

Numerical Investigation of Three-Dimensional Viscous Incompressible Flows in Divergent Curved Channels and Turbulent Model Study

Jiao De-yong Yang Hong-wei Zhao Zhi-jun

Su Jie-xian Feng Guo-tai

(*Haerbin Institute of Technology, Haerbin*)

Abstract

In order to make the numerical calculation of viscous flows more convenient for the flows in channel with complicated profile governing equations expressed in the arbitrary curvilinear coordinates were derived by means of Favre density-weighted averaged method, and a turbulent model with effect of curvature modification was also derived. The numerical calculation of laminar and turbulent flows in divergent curved channels was carried out by means of parabolized computation method. The calculating results were used to analyze and investigate the aerodynamic performance of stator cascades in compressors preliminarily.