

空间杆系结构内力与变位的 一种新解析法*

袁发荣 陈雪峰

(陕西机械学院, 1988年5月19日收到)

摘 要

本文以有限元法的思想为基础, 引用 Dirac δ 函数和 Heaviside step 函数, 将梁的弯曲问题的初参数法推广应用到杆系结构, 并据此改进超静定结构分析中的混合法, 提出空间杆系结构内力与变位分析的一种新方法。

采用本文提供的新方法分析杆系结构的内力与变位的问题, 可使整个推导过程与所得解答更加简洁精确。

一、梁的弯曲问题

梁的弯曲问题归结为求解下列方程

$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= \int w(x) dx, & M(x) &= \int Q(x) dx \\ \theta(x) &= \int \frac{1}{EJ} M(x) dx, & f(x) &= \int \theta(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

式(1.1)仅适用于载荷连续、截面连续及材料连续的特殊情形, 其中 w 及 Q, M, θ, f, EJ 分别表示作用在梁上的载荷及梁的剪力、弯矩、转角、挠度及抗弯刚度。

本文引用 Dirac δ 函数

$$\delta(x-\xi) = \begin{cases} 0 & (x \neq \xi) \\ \infty & (x = \xi) \end{cases} \quad (1.2)$$

及 Heaviside step 函数

$$H(x-\xi) = \begin{cases} 0 & (x < \xi) \\ 1 & (x \geq \xi) \end{cases} \quad (1.3)$$

(分别简记为 δ_ξ 及 H_ξ), 并利用下述定义, 将关系式(1.1)推广到一般情形。

$$\left. \begin{aligned} \text{定义} \quad q_k(x) (H_{a_k} - H_{b_k}) &= q_k(x) & (\forall x \in [a_k, b_k]) \\ m_k(x) (\delta_{c_k} - \delta_{d_k}) &= m_k(x) & (\forall x \in [c_k, d_k]) \\ p_k \delta_{e_k} &= p_k & (\forall x = e_k) \\ M_k \eta_{f_k} &= M_k & (\forall x = f_k) \end{aligned} \right\}$$

* 蒋咏秋、徐次达推荐。

据此定义, 可将作用在梁上的各种形式的载荷 (包括支座反力) 统一表示成

$$w(x) = \sum q_k(x)(H_{a_k} - H_{b_k}) + \sum m_k(x)(\delta_{c_k} - \delta_{d_k}) + \sum P_k \delta_{e_k} + \sum M_k \eta_{f_k} \quad (1.4)$$

且有式(1.1)成立.

式(1.4)中 $q_k(x)$ 为区间 $[a_k, b_k]$ 上连续分布力的集度, $m_k(x)$ 为区间 $[c_k, d_k]$ 上连续分布力矩的集度, P_k 为点 e_k 处的集中力, M_k 为点 f_k 处的集中力矩, 而

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^x \eta(t-\xi) dt &= \delta(x-\xi) \\ \int_{-\infty}^x \delta(t-\xi) dt &= H(x-\xi) \\ \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x H(t-\xi) dt^n &= H(t-\xi) \frac{(x-\xi)^n}{n!} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

二、杆件单元分析

设杆系结构离散为 m 个杆件单元与 n 个节点, 记 $\{m\} = \{1, 2, \dots, m\}$, $\{n\} = \{1, 2, \dots, n\}$, 对于其中任意一个杆件单元 $e \in \{m\}$, 其长度为 $l^{(e)}$, 端点 (节点) 序号为 $i, j \in \{n\}$, 取杆件单元局部坐标系的原点 O 与始端点 i 重合, 坐标轴 Ox 与杆轴 ij 重合, 则根据式(1.1)及(1.4), 在坐标面 xOy 内有

$$\left. \begin{aligned} w_y^{(e)}(x) &= w_y^{(e)}(x, q_y, m_z, P_y, M_z) \\ Q_y^{(e)}(x) &= \int_{-\infty}^x w_y^{(e)}(t) dt \\ M_z^{(e)}(x) &= \int_{-\infty}^x Q_y^{(e)}(t) dt \\ \tilde{\theta}_z^{(e)}(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{E^{(e)} J_z^{(e)}} M_z^{(e)}(t) dt \\ \tilde{f}_y^{(e)}(x) &= \int_{-\infty}^x \tilde{\theta}_z^{(e)}(t) dt \end{aligned} \right\} \quad (\forall e \in \{m\}) \quad (2.1)$$

其中 P_y 表示作用在坐标面 xOy 内且平行于坐标轴 Oy 的集中力, M_z 表示作用在坐标面 xOy 内的集中力矩, 余类同. 同理, 有

$$\left. \begin{aligned} w_z^{(e)}(x) &= w_z^{(e)}(x, q_z, m_y, P_z, M_y) \\ Q_z^{(e)}(x) &= \int_{-\infty}^x w_z^{(e)}(t) dt \\ M_y^{(e)}(x) &= \int_{-\infty}^x Q_z^{(e)}(t) dt \\ \tilde{\theta}_y^{(e)}(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{E^{(e)} J_y^{(e)}} M_y^{(e)}(t) dt \\ \tilde{f}_z^{(e)}(x) &= \int_{-\infty}^x \tilde{\theta}_y^{(e)}(t) dt \end{aligned} \right\} \quad (\forall e \in \{m\}) \quad (2.2)$$

及

$$\left. \begin{aligned} M_x^{(e)}(x) &= M_{x_i} H_{\xi_i} + \sum \left[\int_{\xi_{a_k}}^x m_{x_k}(t) dt (H_{\xi_{a_k}} - H_{\xi_{b_k}}) \right] \\ &\quad + \sum M_{x_k} H_{\xi_k} + M_{x_j} H_{\xi_j} \\ \theta_x^{(e)}(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{G^{(e)} J_p^{(e)}} M_x^{(e)}(t) dt \end{aligned} \right\} (\forall e \in \{m\}) \quad (2.3)$$

其中 M_x 为绕坐标轴 Ox 的扭矩, θ_x 为扭转角。

对于短而粗的杆件单元, 尚须考虑轴向力 $N^{(e)}(x)$ 引起的杆件轴向变形 $\Delta^{(e)}(x)$ 与剪切变形引起的杆件剪切挠度 $\bar{f}^{(e)}(x)$, 且

$$\left. \begin{aligned} N_x^{(e)}(x) &= N_{x_i}^{(e)} H_{\xi_i} + \sum \left[\int_{\xi_{a_k}}^x t_{x_k}(t) dt \cdot (H_{\xi_{a_k}} - H_{\xi_{b_k}}) \right] \\ &\quad + \sum T_{x_k} H_{\xi_k} + N_{x_j}^{(e)} H_{\xi_j} \\ \Delta_x^{(e)}(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{N_x^{(e)}(t)}{E^{(e)} A^{(e)}} dt \end{aligned} \right\} (\forall e \in \{m\}) \quad (2.4)$$

及

$$\left. \begin{aligned} \bar{\theta}_y^{(e)} &= \frac{\alpha^{(e)}}{G^{(e)} A^{(e)}} \left\{ Q_{y_i}^{(e)} H_{\xi_i} + \sum P_{y_k} H_{\xi_k} \right. \\ &\quad \left. + \sum \left[\int_{\xi_{a_k}}^x q_{y_k}(t) dt (H_{\xi_{a_k}} - H_{\xi_{b_k}}) \right] + Q_{y_j}^{(e)} H_{\xi_j} \right\} \\ \bar{f}_y^{(e)}(x) &= \int_{-\infty}^x \bar{\theta}_y^{(e)}(t) dt \end{aligned} \right\} (\forall e \in \{m\}) \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\theta}_z^{(e)} &= \frac{\alpha^{(e)}}{G^{(e)} A^{(e)}} \left\{ Q_{z_i}^{(e)} H_{\xi_i} + \sum P_{z_k} H_{\xi_k} \right. \\ &\quad \left. + \sum \left[\int_{\xi_{a_k}}^x q_{z_k}(t) dt (H_{\xi_{a_k}} - H_{\xi_{b_k}}) \right] + Q_{z_j}^{(e)} H_{\xi_j} \right\} \\ \bar{f}_z^{(e)}(x) &= \int_{-\infty}^x \bar{\theta}_z^{(e)}(t) dt \end{aligned} \right\} (\forall e \in \{m\}) \quad (2.6)$$

其中 T , $\tau(x)$ 及 EA 分别为沿杆件轴向作用的集中力、连续分布力及杆件的轴向刚度, α 与 GA/α 分别称为杆件的剪切系数与剪切刚度。于是, 杆件单元的实际转角和挠度应是

$$\left. \begin{aligned} \theta_y^{(e)}(x) &= \bar{\theta}_y^{(e)}(x) + \bar{\theta}_y^{(e)}(x) \\ \theta_z^{(e)}(x) &= \bar{\theta}_z^{(e)}(x) + \bar{\theta}_z^{(e)}(x) \\ f_y^{(e)}(x) &= \bar{f}_y^{(e)}(x) + \bar{f}_y^{(e)}(x) \\ f_z^{(e)}(x) &= \bar{f}_z^{(e)}(x) + \bar{f}_z^{(e)}(x) \end{aligned} \right\} (\forall e \in \{m\}) \quad (2.7)$$

由于在区间 $[0, l^{(e)}]$ 以外无载荷, 故有

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N^{(e)}(0-\varepsilon) &= 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q^{(e)}(0-\varepsilon) = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M^{(e)}(0-\varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

因而 $N^{(e)}(x)$, $Q^{(e)}(x)$ 及 $M^{(e)}(x)$ 中的积分常数均为零; 式 $\Delta^{(e)}(x)$, $\theta^{(e)}(x)$, $f^{(e)}(x)$ 中的积分常数 $\Delta_{x_i}^{(e)}$, $\theta_{x_i}^{(e)}$, $\theta_{y_i}^{(e)}$, $\theta_{z_i}^{(e)}$, $f_{y_i}^{(e)}$ 及 $f_{z_i}^{(e)}$ 等, 则需根据结构变形谐调条件及支座位移约束条件确定。

本文约定力及线位移的方向与坐标轴正向一致者为正, 力偶与角位移的转向符合右手规则者为正。

三、杆系结构整体分析

设杆件单元局部坐标 (x, y, z) 与杆系结构整体坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 的变换式为

$$\bar{x}=\bar{x}(x, y, z), \bar{y}=\bar{y}(x, y, z), \bar{z}=\bar{z}(x, y, z) \quad (3.1)$$

现以每一杆件单元的端点内力与始端位移 $N_{x_i}^{(e)}, Q_{y_i}^{(e)}, Q_{z_i}^{(e)}, M_{x_i}^{(e)}, M_{y_i}^{(e)}, M_{z_i}^{(e)}, N_{x_j}^{(e)}, Q_{y_j}^{(e)}, Q_{z_j}^{(e)}, M_{x_j}^{(e)}, M_{y_j}^{(e)}, M_{z_j}^{(e)}, \Delta_{x_i}^{(e)}, \theta_{x_i}^{(e)}, \theta_{y_i}^{(e)}, \theta_{z_i}^{(e)}, f_{y_i}^{(e)}, f_{z_i}^{(e)}$ ($e \in \{m\}, i, j \in \{n\}$) 作为基本参量分析如下。

1. 杆件单元平衡条件

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow l^{(e)} + \varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} N_x^{(e)}(x) = 0, & \quad \lim_{\substack{x \rightarrow l^{(e)} + \varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} M_x(x) = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow l^{(e)} + \varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} Q_y(x) = 0, & \quad \lim_{\substack{x \rightarrow l^{(e)} + \varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} M_y(x) = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow l^{(e)} + \varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} Q_z(x) = 0, & \quad \lim_{\substack{x \rightarrow l^{(e)} + \varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} M_z(x) = 0 \end{aligned} \right\} (\forall e \in \{m\}) \quad (3.2)$$

整个结构可建立杆件单元平衡方程 $6m$ 个。

2. 节点平衡条件

设杆系结构有 p 个非支座节点, 记 $\{n_p\} = \{n_1, n_2, \dots, n_p\} \subset \{n\}$, ($n_p \leq n$)。设有 t 个杆件单元联接于节点 n_k ($\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}, \bar{z}_{n_k}$), 记 $\{m_t\} = \{m_1, m_2, \dots, m_t\} \subset \{m\}$, ($m_t \leq m$), 则有

$$\left. \begin{aligned} \sum_{e=1}^t F_{\bar{x}_{n_k}}^{(m_e)} = 0, & \quad \sum_{e=1}^t M_{\bar{x}_{n_k}}^{(m_e)} = 0 \\ \sum_{e=1}^t F_{\bar{y}_{n_k}}^{(m_e)} = 0, & \quad \sum_{e=1}^t M_{\bar{y}_{n_k}}^{(m_e)} = 0 \\ \sum_{e=1}^t F_{\bar{z}_{n_k}}^{(m_e)} = 0, & \quad \sum_{e=1}^t M_{\bar{z}_{n_k}}^{(m_e)} = 0 \end{aligned} \right\} (\forall m_e \in \{m_t\}, n_k \in \{n_p\}) \quad (3.3)$$

式(3.3)中 $F_{\bar{x}_{n_k}}^{(m_e)}, F_{\bar{y}_{n_k}}^{(m_e)}, \dots, M_{\bar{x}_{n_k}}^{(m_e)}$ 为联接节点 n_k 的杆件单元 m_e 的端点内力 $N_{\bar{x}_{n_k}}^{(m_e)}$,

$Q_{\bar{y}_{n_k}}^{(m_e)}, \dots, M_{\bar{z}_{n_k}}^{(m_e)}$ 沿坐标轴 $\overline{Ox}, \overline{Oy}, \overline{Oz}$ 方向的投影。整个结构可建立节点平衡方程 $6p$ 个。

3. 支座位移约束条件

设杆系结构有 $s = n - p$ 个支座, 记 $\{n_s\} = \{n_1, n_2, \dots, n_s\} \subset \{n\}$, ($n_s \leq n$); 设有 q 个杆件单元联接于支座 n_k , 记 $\{m_q\} = \{m_1, m_2, \dots, m_q\} \subset \{m\}$ ($m_q \leq m$)。若 n_k 为刚接支座,

则有

$$u_{n_k}^{(m_e)} = 0, v_{n_k}^{(m_e)} = 0, w_{n_k}^{(m_e)} = 0 \quad (\forall m_e \in \{m_q\}, n_k \in \{n_s\}) \quad (3.4)$$

$$\theta_{\bar{x}n_k}^{(m_e)} = 0, \theta_{\bar{y}n_k}^{(m_e)} = 0, \theta_{\bar{z}n_k}^{(m_e)} = 0 \quad (\forall m_e \in \{m_q\}, n_k \in \{n_s\}) \quad (3.5)$$

其中 $u_{n_k}^{(m_e)}$, $v_{n_k}^{(m_e)}$, $w_{n_k}^{(m_e)}$ 为杆件单元 m_e 的端点 (支座) n_k 沿坐标轴 \overline{Ox} , \overline{Oy} , \overline{Oz} 方向的线位移, $\theta_{\bar{x}n_k}^{(m_e)}$, $\theta_{\bar{y}n_k}^{(m_e)}$, $\theta_{\bar{z}n_k}^{(m_e)}$ 为绕对应轴的角位移。整个结构可建立支座约束方程

$$6 \sum_{k=1}^s q_{n_k} \text{ 个.}$$

若 n_k 为铰接支座, 则式 (3.5) 应改写成

$$M_{\bar{x}n_k}^{(m_e)} = 0, M_{\bar{y}n_k}^{(m_e)} = 0, M_{\bar{z}n_k}^{(m_e)} = 0 \quad (\forall m_e \in \{m_q\}, n_k \in \{n_s\}) \quad (3.5)'$$

且有式 (3.4) 成立。

若 n_k 为连杆支座, 例如只有沿 \overline{Ox} 方向的线位移受到刚性约束, 则式 (3.4) 应改写成

$$\left. \begin{aligned} u_{n_k}^{(m_e)} = 0, \sum_{e=1}^q F_{\bar{y}n_k}^{(m_e)} = 0 \\ \sum_{e=1}^q F_{\bar{x}n_k}^{(m_e)} = 0, \quad (\forall m_e \in \{m_q\}) \\ v_{n_k}^{(m_1)} = v_{n_k}^{(m_2)} = \dots = v_{n_k}^{(m_r)} \\ w_{n_k}^{(m_1)} = w_{n_k}^{(m_2)} = \dots = w_{n_k}^{(m_r)} \end{aligned} \right\} (\forall n_k \in \{n_s\}) \quad (3.4)'$$

且有式 (3.5)' 成立。

4. 结构变形谐调条件

设有 r 个杆件单元联接于非支座节点 n_k , 记 $\{m_r\} = \{m_1, m_2, \dots, m_r\} \subset \{m\} (m_r \leq m)$ 。

若 r 个杆件单元刚接于节点 n_k , 则有

$$\left. \begin{aligned} u_{n_k}^{(m_1)} = u_{n_k}^{(m_2)} = \dots = u_{n_k}^{(m_r)} \\ v_{n_k}^{(m_1)} = v_{n_k}^{(m_2)} = \dots = v_{n_k}^{(m_r)} \\ w_{n_k}^{(m_1)} = w_{n_k}^{(m_2)} = \dots = w_{n_k}^{(m_r)} \end{aligned} \right\} (\forall n_k \in \{n_p\}) \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_{\bar{x}n_k}^{(m_1)} = \theta_{\bar{x}n_k}^{(m_2)} = \dots = \theta_{\bar{x}n_k}^{(m_r)} \\ \theta_{\bar{y}n_k}^{(m_1)} = \theta_{\bar{y}n_k}^{(m_2)} = \dots = \theta_{\bar{y}n_k}^{(m_r)} \\ \theta_{\bar{z}n_k}^{(m_1)} = \theta_{\bar{z}n_k}^{(m_2)} = \dots = \theta_{\bar{z}n_k}^{(m_r)} \end{aligned} \right\} (\forall n_k \in \{n_p\}) \quad (3.7)$$

整个结构可建立变形谐调方程的数目为 $6 \sum_{k=1}^s (r_{n_k} - 1)$ 。

若 r 个杆件单元均铰接于节点 n_k , 则式(3.7)应改写成

$$M_{\bar{x}n_k}^{(m_r)} = 0, M_{\bar{y}n_k}^{(m_r)} = 0, M_{\bar{z}n_k}^{(m_r)} = 0$$

$$(\forall m_r \in \{m_r\}, n_k \in \{n_r\}) \quad (3.7)'$$

且有式(3.6)成立。

综上所述, 对于整个杆系结构而言, 由式(3.2)至(3.7), 可建立的方程的数目为

$$s = 6m + 6p + 6 \sum_{k=1}^s q_{n_k} + 6 \sum_{k=1}^p (r_{n_k} - 1)$$

$$= 6m + 6 \left(\sum_{k=1}^s q_{n_k} + \sum_{k=1}^p r_{n_k} \right)$$

$$= 18m$$

将式(2.1)~(2.7)代入式(3.2)~(3.7), 即可建立以所有杆件单元的端点内力 $N_{z_i}^{(e)}$, $Q_{y_i}^{(e)}$, $Q_{z_i}^{(e)}$, $M_{x_i}^{(e)}$, $M_{y_i}^{(e)}$, $M_{z_i}^{(e)}$, $N_{z_j}^{(e)}$, $Q_{y_j}^{(e)}$, $Q_{z_j}^{(e)}$, $M_{x_j}^{(e)}$, $M_{y_j}^{(e)}$, $M_{z_j}^{(e)}$ 与始端位移 $\Delta_{z_i}^{(e)}$, $\theta_{y_i}^{(e)}$, $\theta_{z_i}^{(e)}$, $f_{y_i}^{(e)}$, $f_{z_i}^{(e)}$ 为基本未知量的 $18m$ 阶线性代数方程组, 据此可解得各杆件单元的端点内力与始端位移, 再将其代回式(2.1)~(2.7), 即可得到各杆件单元的内力与位移的解析解, 从而使得空间杆系结构的内力与变位的问题获解。

四、算 例

平面刚架及施加的载荷如图1所示, 大写阿拉伯数字表示 EJ 的倍数。

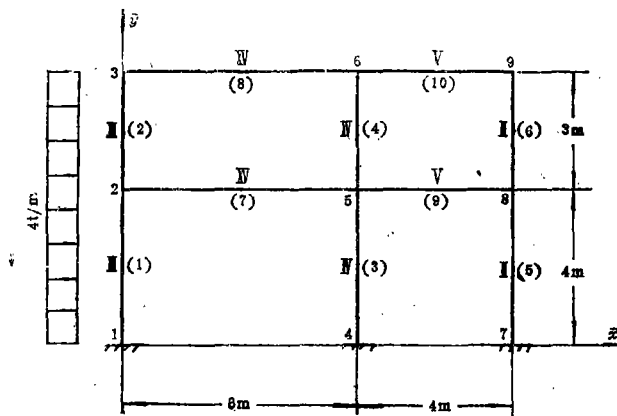


图1 平面刚架

现将刚架离散为10个杆件单元及9个节点, 其中横杆取左端为节点 i , 竖杆取下端为节点 i , 且忽略不计轴向力与剪切变形对杆件单元变位的影响。

基本参量计算结果列于表1, 其中负号表示实际内力或变位和本文规定的正向相反。

根据式(2.1)及(3.1)并利用图1及表1, 即可求得图1平面刚架的内力与变位如图2~图5所示。

表1. 杆端内力与始端位移的计算结果

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_1^{(e)}$	-5.12	-0.73	0.17	-0.25	4.95	0.98	9.71	3.55	3.37	0.85
$N_2^{(e)}$	5.12	0.73	-0.17	0.25	-4.95	-0.98	-9.71	-3.55	-3.37	-0.85
$Q_1^{(e)}$	14.74	8.45	9.04	2.7	4.22	0.85	-4.39	-0.73	-3.97	-0.98
$Q_2^{(e)}$	1.26	3.55	-9.04	-2.7	-4.22	-0.85	4.39	0.73	3.97	0.98
$M_1^{(e)}$	-19.48	-5.6	-18.94	-3.27	-9.07	-0.6	13.27	1.56	7.43	2
$M_2^{(e)}$	-7.47	-1.56	-17.22	-4.83	-7.82	-1.94	13.07	2.83	8.42	1.94
$\theta_1^{(e)}$	0	-2.89	0	-3.43	0	-2.51	-13.47	-0.29	-4.29	-1.37
$f_1^{(e)}$	0	41.31	0	55.08	0	27.54	0	0	0	0

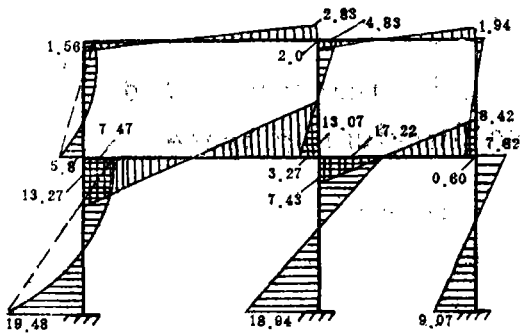


图2 弯矩图

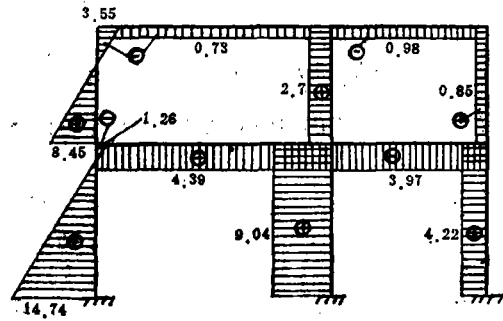


图3 剪力图

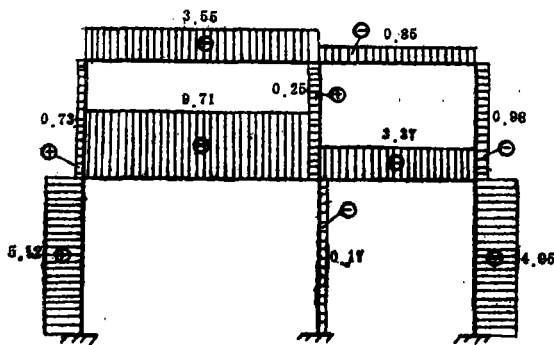


图4 轴力图

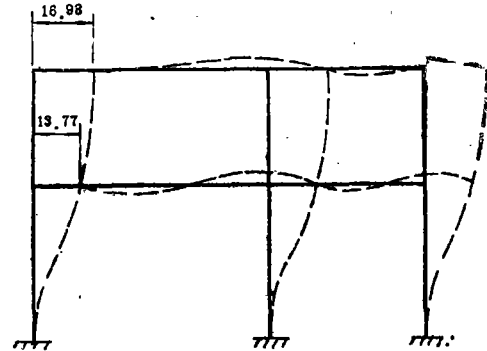


图5 变位图

五、讨 论

本文提供的新方法, 实质上是杆系结构有限元法、梁的弯曲问题的初参数法及超静定结构分析中的混合法的综合、改进与推广。其特点是:

1. 与杆系结构有限元法对比, 本方法无需将载荷向结点移置, 可用较少的杆件单元来离散原结构;

2. 与梁的弯曲问题的初参数法对比, 本方法引用 Dirac δ 函数和 Heaviside step 函数

以简化表达式,从而将初参数法推广应用到杆系结构。

3. 与超静定结构分析中的混合法对比,本方法无需给出原结构的基本体系,也无需确定独立未知量的数目,而是将所有杆件单元的端点内力与始端位移都当作基本参量。

采用本文提供的新方法分析杆系结构的内力与变位的问题,可使整个推导过程与所得解答更加简洁精确。

参 考 文 献

- [1] 夏道行等,《实变函数与泛函分析》,人民教育出版社(1978)。
- [2] 吴从炘, δ 函数对力学应用的几点注记,工程学学报,1(1984)。
- [3] 袁发荣,空间杆系结构有限元法及其在造型机框架的内力与变位分析中的应用,力学学报,2(1977)。
- [4] 袁发荣,平面刚架内力与变位分析的一种解析法,应用力学学报,3(1987)。

An Analytical Method for Solving Internal Forces and Deformations of Bar-System Structure in Space

Yuan Fa-rong Chen Xue-feng

(Dept. of Basic Sci., Shanxi Inst. of Mech. Eng., Xi'an)

Abstract

In this paper, based on the idea of finite element method, the initial parametric method in bending problem of a beam is extended to analyse the bar-system structure by employing Dirac δ function and Heaviside step function. Then a new method for analysing the internal forces and deformations of bar-system structure in space is suggested by improving the mixed method in statically indeterminate structure.

The inferred process and obtained answer will be more succinct and accurate when the problem of internal forces and deformations of bar-system structure is analysed by using the new method provided in this paper.