

板的大变形分析的混合变分泛函*

多斯特** 塔巴洛克***

(加拿大卡尔茄莱大学) (加拿大多伦多大学)

(钱伟长推荐, 1988年1月4日收到)

摘 要

本文导出了板在大变形分析的混合变分表达式, 在本式中, 平衡方程和协调方程是分别用应力函数和位移分量等同满足的, 而应力应变关系是在最小二乘方的意义上满足的。解了一个例, 并和文献中已知的结果进行了比较。

此外, 我们写出了特别适用于板的屈曲失稳分析的泛函, 并举例题证明理论的有效。

一、引 论

弹性静力学的基本方程可以分为三组:

- (i) 用应力变量表示的平衡方程;
- (ii) 用应变变量表示的协调方程;
- (iii) 表示应力应变关系的本构方程;

力和运动的边界条件可以分别看作为平衡方程和协调方程的子集。

弹性静力学各种变量的关系见图1, 其中 ∂_i 表示微分算子。 ∂_1 作用在应力变量时给出平衡方程, 而 ∂_2 作用在应变变量时给出协调方程。要得到精确解, 必须满足平衡方程, 协调方程和本构方程。

习惯上, 我们可以引用一组连续的位移函数 u_i , 它们自动满足协调方程。在这种情况下, 我们一定要使本构方程明确满足, 然后平衡方程变成用位移函数表示的一组方程。另一办法是引用应力函数 ϕ_i 来满足平衡方程。当然我们一定要使本构方程明确满足, 然后协调方程变成用应力函数 ϕ_i 表达的一组方程。这两种处理方法都必须使本构方程即应力应变关系明确满足。

从变分的观点看, 用位移函数处理和最小位能原理有关, 用应力函数处理则和最小余能原理有关。把计算所用函数的容许条件放松, 就能推广这些变分原理, 导出一些混合变分原理, 如 Hellinger-Reissner 原理和 Hu-Washizu 原理^[1~2]。在这些古典的变分表达式中, 一定引用这种和那种位能。在决定这类标量的位能函数中, 我们要求它明确满足本构方程或

* 本文由加拿大国家科技研究会根据 A-1628 号项目资助。原稿为英文, 王志忠译, 陈明伦、杨视校。

** 加拿大阿尔巴塔省卡尔茄莱大学机械工程系教授。

*** 加拿大多伦多大学机械工程系教授和主任。

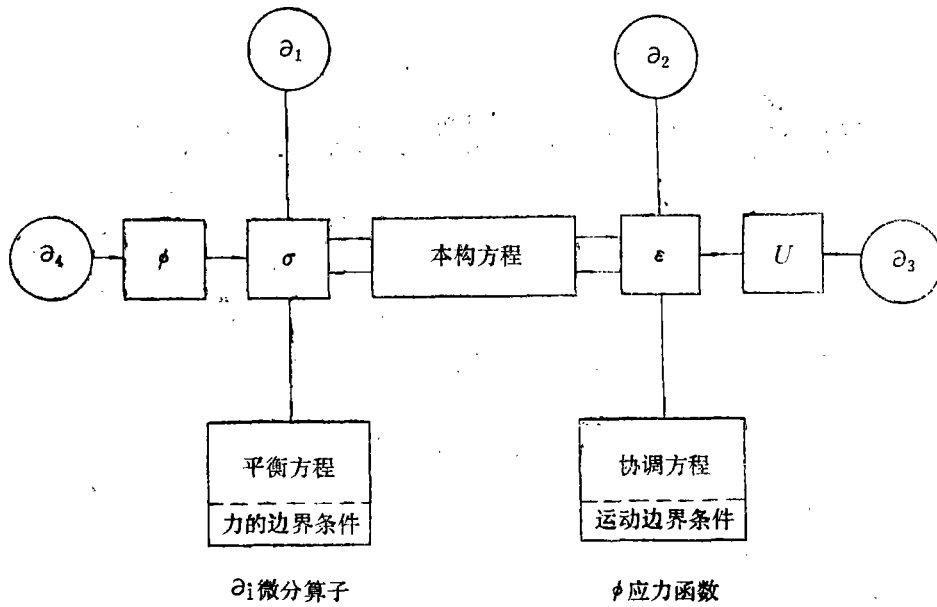


图 1 变量间的关系

应力应变关系。所以，在一切古典的弹性静力学的变分原理中，本构方程都必须明确地满足的¹⁾。

有趣的是导出变分泛函，其计算函数既满足平衡方程，也同时满足协调条件^[3~5]。在这类泛函中，近似计算的误差放在本构方程中。这样的处理，至少对于计算要求而言，是很有趣的。在(i)，(ii)，(iii)三组方程中，前两组是数学属性的，所以要求严格满足。相反，(iii)组方程是物理属性的，只要求近似满足。至少只要求满足到实验测定材料模量的精确度。所以，如果把计算误差放在本来就是近似的方程上，比把它放在精确的方程上，更合于逻辑。进一步讲，从计算观点看，把计算函数，首先明确满足微分方程（即平衡方程和协调方程），然后近似地满足代数的本构方程，比较合理。我们在下文将导出一种泛函，其本构方程是用最小二乘方使它得到总体满足的。在这个泛函中，计算函数的导数的阶数比最小位能原理和最小余能原理的泛函中的导数阶数要低。这一点对导出有限元模型是十分重要的。

为了说明这种泛函的应用情况，本文求解了简支方板在均布载荷下的大挠度分析，并将其结果和文献已知结果^[2,6,7]进行了比较。

我们进一步研究了板的屈曲分析。通过一个简单的例子证明，泛函的极值计算给出了互不耦合的特微值方程，这些特微值方程是分别从属于最小位能和最小余能泛函导出的。

1) 在Hu-Washizu原理中，在决定应变能密度函数 $A(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \dots)$ 时，要求明确满足本构方程。不过，在极值条件下，在拉氏乘子 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots$ 和 A 间得到像 $(\frac{\partial A}{\partial \epsilon_{xx}} - \sigma_{xx}) = 0$ 等关系式，但求得它们时，必须要求真正的应力分量等于有关的拉氏乘子。

在Hellinger-Reissner原理中，在决定余能密度函数 $B(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots)$ 时，要求明确满足本构方程。不过在极值条件下，在拉氏乘子 $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \dots$ 和 B 间得到像 $(\frac{\partial B}{\partial \sigma_{xx}} - \epsilon_{xx}) = 0$ 等关系式。在求得它们时，必须要求真正的应变分量等于有关的拉氏乘子。

二、基本方程

非线性板的理论的基本方程可以写为

1. 应变, 曲率-位移关系

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2, & K_{xx} &= w_{,xx} \\ \varepsilon_{yy} &= v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2, & K_{yy} &= w_{,yy} \\ 2\varepsilon_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y}, & K_{xy} &= w_{,xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

2. 平衡方程

$$\left. \begin{aligned} N_{xx,x} + N_{xy,y} &= 0, & N_{xy,x} + N_{yy,y} &= 0 \\ M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xx}w_{,xx} & \\ & + N_{yy}w_{,yy} + 2N_{xy}w_{,xy} &= -\bar{p} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

3. 本构方程

$$\left. \begin{aligned} N_{xx} &= C(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}), & M_{xx} &= -D(K_{xx} + \nu K_{yy}) \\ N_{yy} &= C(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}), & M_{yy} &= -D(K_{yy} + \nu K_{xx}) \\ N_{xy} &= C(1-\nu)\varepsilon_{xy}, & M_{xy} &= -D(1-\nu)K_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

4. 协调方程

$$\left. \begin{aligned} K_{yy,x} - K_{xy,y} &= 0, & K_{xx,y} - K_{xy,x} &= 0 \\ \varepsilon_{xx,yy} - 2\varepsilon_{xy,xy} + \varepsilon_{yy,xx} + K_{xx}w_{,yy} - 2K_{xy}w_{,xy} & \\ & + K_{yy}w_{,xx} + w^2_{,xy} - w_{,xz}w_{,yy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

其中

$$C \equiv \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D \equiv \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

各种符号都是常用的符号。

现在我们考虑边界条件。如果在某部份板的边界上, 运动条件是已给的, 则这部份边界用 S_u 表示; 在其余边界上, 外力已给, 则这部份边界用 S_σ 表示。于是板的边界条件可以写出如下:

在 S_u 上

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w}, \quad w_{,n} = \bar{w}_{,n} \quad (2.5)$$

在 S_σ 上

$$N_{nn} = \bar{N}_{nn}, \quad N_{nt} = \bar{N}_{nt}, \quad V_n = \bar{V}_n, \quad M_{nn} = \bar{M}_{nn} \quad (2.6)$$

其中 V_n 为有效剪力, 它是

$$V_n = M_{nt,s} + M_{nt,t} + M_{nn,n} + w_{,n}N_{nn} + w_{,s}N_{nt}$$

在角点上

$$M_{ni} \Big|_{s^-}^{s^+} = H_n \quad (2.7)$$

其中 H_n 为角点所受外力。

上述方程的详细推导和有关的根本假定见[1, 7, 8]。从上述方程和条件, 我们将建立一种混合变分原理。

三、混合变分表达式

在这个变分式中, 由于采用了运动条件(2.1), 协调条件(2.4)式是满足的。而平衡方程(2.2)是通过下列应力函数来满足的。

$$N_{zz} = \phi_{,yy}, \quad N_{yy} = \phi_{,zz}, \quad N_{zy} = -\phi_{,zy} \quad (3.1)$$

而

$$\left. \begin{aligned} M_{zz} &= V_{,y} - \omega\phi_{,yy} - \bar{\Omega} \\ M_{yy} &= U_{,z} - \omega\phi_{,zz} - \bar{\Omega} \\ M_{zy} &= -\frac{1}{2}(U_{,y} + V_{,z}) + \omega\phi_{,zy} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

其中我们假定 \bar{p} 是由势函数 $\bar{\Omega}$ 给出的

$$\bar{p} = \bar{\Omega}_{,zz} + \bar{\Omega}_{,yy} \quad (3.3)$$

函数 ϕ 是 Airy 应力函数, 而 U 及 V 是 Southwell 应力函数^[6]。

现在让我们引进一种泛函数, 它在总体上由加权最小二乘方的意义上满足本构方程(2.3)。这个泛函可以写成

$$\Pi(M, N, K, \varepsilon) = \frac{1}{2} \int_A [\{m\}^T \{K\} + \{n\}^T \{\varepsilon\}] dA \quad (3.4)$$

其中各剩余矩阵量是由下式定义的

$$\begin{aligned} \{m\} &= \begin{pmatrix} M_{zz} \\ M_{yy} \\ 2M_{zy} \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{zz} \\ K_{yy} \\ K_{zy} \end{pmatrix} \equiv \{M\} + D[C]\{K\} \\ \{n\} &= \begin{pmatrix} N_{zz} \\ N_{yy} \\ 2N_{zy} \end{pmatrix} - C \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zy} \end{pmatrix} \equiv \{N\} - C[C]\{\varepsilon\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\{K\} = \frac{1}{D} [C]^{-1} \{m\}, \quad \{\varepsilon\} = \frac{1}{C} [C]^{-1} \{n\}$$

$\Pi(M, N, K, \varepsilon)$ 的显式为

$$\begin{aligned} \Pi(M, N, K, \varepsilon) &= \frac{1}{2} \iint \left\{ \frac{1}{D(1-\nu^2)} [M_{zz}^2 - 2\nu M_{zz} M_{yy} + M_{yy}^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(1+\nu) M_{zy}^2] + \frac{1}{C(1-\nu^2)} [N_{zz}^2 - 2\nu N_{zz} N_{yy} + N_{yy}^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(1+\nu) N_{zy}^2] + 2[M_{zz} K_{zz} + M_{yy} K_{yy} \right. \\ &\quad \left. + 2M_{zy} K_{zy}] - 2[N_{zz} \varepsilon_{zz} + N_{yy} \varepsilon_{yy} + 2N_{zy} \varepsilon_{zy}] \right. \\ &\quad \left. + D[K_{zz}^2 + 2\nu K_{zz} K_{yy} + K_{yy}^2 + 2(1-\nu) K_{zy}^2] \right\} \end{aligned}$$

$$+C[e_{xx}^2 + 2\nu e_{xx}e_{yy} + e_{yy}^2 + 2(1-\nu)e_{xy}^2]dxdy \quad (3.6)$$

在利用了(3.1), (3.2)式的应力函数定义, 和(2.1)式的应变曲率和位移关系以后, 我们可以把 Π 用平衡应力合量和可协调的位移来表示. $\Pi(U, V, \phi, u, v, w)$ 的极值条件为

$$\delta U: -\frac{1}{D(1-\nu^2)} [(M_{yy} - \nu M_{xx})_{,x} - (1+\nu)M_{xy, y}] = 0 \quad (3.7)$$

$$\delta V: -\frac{1}{D(1-\nu^2)} [(M_{xx} - \nu M_{yy})_{,y} - (1+\nu)M_{xy, x}] = 0 \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \delta \phi: & -\frac{1}{D(1-\nu^2)} [(wM_{xx} - \nu wM_{yy})_{,yy} + (wM_{yy} - \nu wM_{xx})_{,xx} \\ & - 2(1+\nu)(wM_{xy})_{,xy}] + \frac{1}{C(1-\nu^2)} [(N_{xx} - \nu N_{yy})_{,yy} \\ & + (N_{yy} - \nu N_{xx})_{,xx} - 2(1+\nu)N_{xy, xy}] \\ & - w_{,xx}w_{,yy} + w_{,xy}^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\delta u: C[(e_{xx} + \nu e_{yy})_{,x} + (1-\nu)e_{xy, y}] = 0 \quad (3.10)$$

$$\delta v: C[(e_{yy} + \nu e_{xx})_{,y} + (1-\nu)e_{xy, x}] = 0 \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \delta w: & D[K_{xx} + \nu K_{yy})_{,xx} + D(K_{yy} + \nu K_{xx})_{,yy} + 2D(1-\nu)K_{xy, xy} \\ & - \frac{1}{D(1-\nu^2)} \{ (M_{xx} - \nu M_{yy})N_{xx} + (M_{yy} - \nu M_{xx})N_{yy} \\ & + 2(1+\nu)M_{xy}N_{xy} \} - (N_{xx}w_{,xx} + N_{yy}w_{,yy} + 2N_{xy}w_{,xy}) \\ & - C(e_{xx} + \nu e_{yy})w_{,xx} - C(e_{yy} + \nu e_{xx})w_{,yy} - 2(1-\nu)C e_{xy}w_{,xy} + \bar{p} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

在利用了(3.1), (3.2)式, 并用(2.1)式把应变和曲率用位移 u, v 和 w 表示以后, 上式各式(3.7)~(3.11)式的力和弯矩可以用应力函数 ϕ, U, V 以及位移 w 表示. 因此, (3.7)~(3.11)是本文所用的方程式, 它们是由 U, V, ϕ, u, v, w 来表示的. 这里必须指出, 这六个方程代表本构方程所导入的计算误差. 如果本构方程(2.3)能够明确满足, 则这六个方程就代表协调方程(2.4)式和平衡方程(2.3)式.

我们现在试以一简单例题来说明本法的应用和已知结果相比较. 设有一矩形板, 尺寸为 a 和 b , 在四边简支. 对 Π 的有关变量, 我们取下列容许函数:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 \sin \frac{2\pi x}{a}, \quad v = v_1 \sin \frac{2\pi y}{b} \\ U &= U_1 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad V = V_1 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \\ w &= w_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \phi = \phi_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ \bar{\Omega} &= \bar{\Omega}_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

这里应指出, 上述各函数都满足板四边的边界条件. 为了简化并易于和已知结果相比较, (3.6)的泛函中, 我们将取 $a=b=1, \nu=0.3^1)$. 这个泛函的极小条件给出了决定 $U_1, V_1,$

1) 所以代数运算, 我们采用了名为MACSYMA的计算程序.

u_1 , v_1 , ϕ_1 , 和 w_1 的六个联立方程。在这些方程中, 除 w_1 外, 其它参数都是线性的。因此, 我们可以消去其它线性参数, 得到一个 w_1 的非线性方程。

$$\begin{aligned} & h^3 E^2 (5.44h^3 + 12.347w_1 - w_1^2)w_1 \\ & + h^3 E [-7.895w_1 (Eh^3w_1^2 + 22.21w_1\bar{\Omega}_1) \\ & \cdot (14.06h^3 + 18.27w_1^2)^{-1} + 29.71\bar{\Omega}_1] \\ & - 87.67\bar{\Omega}_1 (Eh^3w_1^2 + 22.21w_1\bar{\Omega}_1) (14.06h^3 + 18.27w_1^2)^{-1} \\ & + 72.13w_1 (Eh^3w_1^2 + 22.21w_1\bar{\Omega}_1)^2 (14.06h^3 + 18.27w_1^2)^{-2} = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

应注意, (3.14) 式中的系数是有量纲的。如取 $h=0.1$, 数值计算结出的 w_1 见图 2。为了比较, Lery^[6], Donnell^[7] 和 Tabarrok-Dost^[2] 的结果也见图 2。

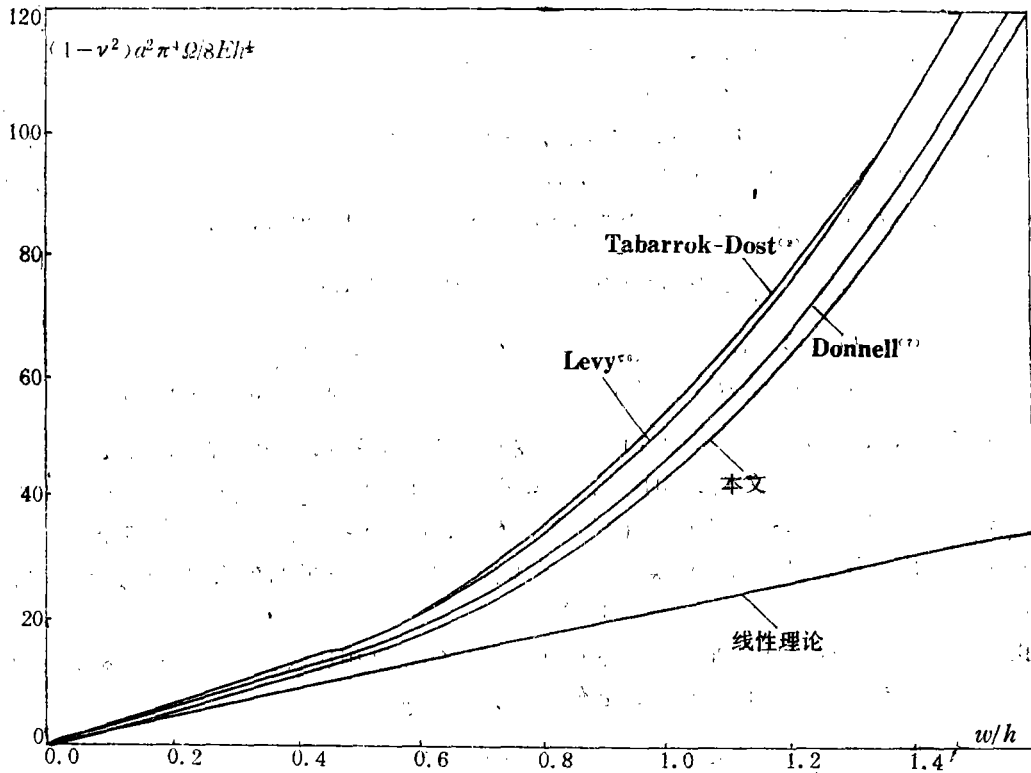


图 2 方板的侧向位移

Lery 应用卡门方程, 在求解时, 采用了很多项的级数。一般都把他的结果当作精确解, 这对一般实用问题讲是足够的。相应, Donnell 只在各个变量的级数中保留首项, 所以, 结果也比较简单。从图 2 可以看到, 各种结果大体一致。

如果我们想求内力, 原则上我们可以从 w_1 , u_1 , v_1 来计算这些内力量。但这样计算所得的内力, 是违反平衡方程的。当然, 从本文的推导看, 我们可以从应力函数 U , V , ϕ 和位移 w 来计算内力, 这样计算所得内力满足平衡方程。这样计算所得的两类内力之差就代表本构方程的近似满足中所引起的误差。

四、板的线性稳定

为了求得板的稳定条件,我们设在初始平衡位置的附近另有某一平衡位置。为了处理这一问题,我们把位移、弯矩、和板面的内力分成两部份,即:

$$\{u\} = \{u\}_0 + \{u\}_1, \quad w = w_0 + w_1 \quad (4.1a, b)$$

$$\{N\} = \{N\}_0 + \{N\}_1, \quad \{M\} = \{M\}_0 + \{M\}_1 \quad (4.2)$$

其中 $\{u\}_0$ 和 w_0 代表初始位置下的有关位移,而 $\{u\}_1$, w_1 代表增加的位移。 $\{N\}_0$, $\{M\}_0$ 代表初始位置下的板面内的内力和弯矩,而 $\{N\}_1$, $\{M\}_1$ 表示增加的有关内力和弯矩。

把(4.1b)和(4.2)代入平衡方程(2.2),消去非线性项,我们得

$$\left. \begin{aligned} N_{1zz,z} + N_{1zy,y} &= 0, & N_{1zy,z} + N_{1yy,y} &= 0 \\ M_{1zz,zz} + 2M_{1zy,zy} + M_{1yy,yy} - S_{1z,z} - S_{1y,y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

这里我们假定 $w_{0,z}$, $w_{0,y}$ 很小,可以略去,而且初始内力 $\{N\}_0$ 和初始弯矩 $\{M\}_0$ 是自我平衡的。也即是

$$\left. \begin{aligned} N_{0zz,z} + N_{0zy,z} &= 0 & N_{0zy,z} + N_{0yy,y} &= 0 \\ M_{0zz,zz} + 2M_{0zy,zy} + M_{0yy,yy} &= -\bar{p} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} S_{1z} &= -N_{0zz}w_{1,z} - N_{0zy}w_{1,y} \\ S_{1y} &= -N_{0zy}w_{1,z} - N_{0yy}w_{1,y} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

我们应看到 S_{1z} 和 S_{1y} 都是力的量,我们可以说,越出平面的平衡方程完全可以用力的量来表示。这样做时,我们必须顾到(4.5)式中 S_{1z} , S_{1y} 和 $w_{1,z}$, $w_{1,y}$ 之间的关系。因此,这些方程建立了力和运动变量之间的关系,我们也可以把(4.5)式看作为一组新的人为的本构方程。通过这样处理,我们将在(4.13)式的泛函中得到几组解除了耦合的基本方程,这里也应该指出,Stumpf 在处理板的大变形分析[10]的余能原理时,也用相似的办法。

用(4.1)式和(4.2)式,略去非线性项, Π 可以写成:

$$\Pi = \Pi^0 + \Pi^1 + \Pi^2 \quad (4.6)$$

其中

$$\Pi^0 = \frac{1}{2} \int_A [\{m\}_0^T \{K\}_0 + \{n\}_0^T \{e\}_0] dA \quad (4.7)$$

$$\Pi^1 = \frac{1}{2} \int_A [\{m\}_1^T \{K\}_1 + \{m\}_1^T \{K\}_0 + \{n\}_1^T \{e\}_1 + \{n\}_1^T \{e\}_0] dA \quad (4.8)$$

$$\Pi^2 = \frac{1}{2} \int_A [\{m\}_1^T \{K\}_1 + \{n\}_1^T \{e\}_1 + \{p\}_1^T \{q\}_1] dA \quad (4.9)$$

而且

$$\{p\}_1 = \{S\}_1 + [N]_0 \{w\}_1, \quad \{q\}_1 = [N]_0^{-1} \{p\}_1 \quad (4.10)$$

及

$$\{S\}_1^T = [S_{1z}, S_{1y}], \quad \{w\}_1^T = [w_{1,z}, w_{1,y}]$$

1) 以下为简便起见省略符号1.

$$[N]_0 = \begin{bmatrix} N_{0xx} & N_{0xy} \\ N_{0xy} & N_{0yy} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

由于在初始平衡位置上, 本构方程是满足的, 所以 $\delta\Pi^0 = \delta\Pi^1 = 0$, 而 Π^2 的变分极值给出

$$\delta\Pi^2 = 0 \quad (4.12)$$

这就是板的稳定计算的变分原理。 Π^2 的显式表达式为¹⁾

$$\begin{aligned} \Pi^2 = & \frac{1}{2} \iint \left\{ \frac{1}{D(1-\nu^2)} [M_{xx}^2 - 2\nu M_{xx}M_{yy} + M_{yy}^2 \right. \\ & + 2(1+\nu)M_{xy}^2] + \frac{1}{C(1-\nu^2)} [N_{xx}^2 - 2\nu N_{xx}N_{yy} + N_{yy}^2 \\ & + 2(1+\nu)N_{xy}^2] + 2[M_{xx}K_{xx} + M_{yy}K_{yy} \\ & + 2M_{xy}K_{xy}] - 2[N_{xx}\epsilon_{xx} + N_{yy}\epsilon_{yy} + 2N_{xy}\epsilon_{xy}] \\ & + D[K_{xx}^2 + 2\nu K_{xx}K_{yy} + K_{yy}^2 + 2(1-\nu)K_{xy}^2] \\ & + C[\epsilon_{xx}^2 + 2\nu\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{yy}^2 + 2(1-\nu)\epsilon_{xy}^2] \\ & + \frac{1}{N_{xy}^0 N_{xy}^0 - N_{xy}^0} [S_x^2 N_{yy}^0 - 2S_x S_y N_{xy}^0 + S_y^2 N_{xx}^0] \\ & \left. + 2[S_x w_{,xz} + S_y w_{,yz}] + [N_{xx}^0 w_{,z}^2 + 2N_{xy}^0 w_{,z} w_{,z} + N_{yy}^0 w_{,z}^2] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (4.13)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= u_{,x}, \quad \epsilon_{yy} = v_{,y}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) \\ K_{xx} &= w_{,xx}, \quad K_{yy} = w_{,yy}, \quad K_{xy} = w_{,xy} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

现在让我们研究简支矩形板的经典屈曲问题, 在这种情况下:

$$N_{0xx} = -N, \quad N_{0yy} = N_{0xy} = 0 \quad (4.15)$$

方程(4.3)这个平衡方程当

$$N_{xx} = N_{yy} = N_{xy} = 0 \quad (4.16)$$

时是完全满足的。而且

$$M_{xx} = V_{,y} + \int S_x dx, \quad M_{yy} = U_{,x}, \quad 2M_{xy} = -U_{,y} - V_{,x} \quad (4.17)$$

我们取

$$\left. \begin{aligned} w &= w_1 \sin \lambda x \sin \mu y \\ U &= U_1 \cos \lambda x \sin \mu y \\ V &= V_1 \sin \lambda x \cos \mu y \\ S_x &= S_1 \cos \lambda x \sin \mu y \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

其中

$$\lambda = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu = \frac{n\pi}{b} \quad (m, n=1, 2, \dots)$$

我们这里指出, (4.18) 满足所有边界条件, 在用了这些函数后, 泛函(4.13)可以写成

$$\begin{aligned} \Pi^2 = & \frac{1}{D(1-\nu^2)} \left\{ \left[\frac{S_1}{\lambda} - \mu V_1 \right]^2 + 2\nu \lambda U_1 \left[\frac{S_1}{\lambda} - \mu V_1 \right] + \lambda^2 U_1^2 \right. \\ & \left. + \frac{1+\nu}{2} (\mu U_1 + \lambda V_1)^2 \right\} + D(\lambda^2 + \mu^2) w_1^2 - \frac{1}{N} S_1^2 - N \lambda^2 w_1^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Π^2 的极值条件为

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + \frac{1+\nu}{2} \mu^2 & \frac{1-\nu}{2} \lambda \mu & \nu & 0 \\ & \mu^2 + \frac{1+\nu}{2} \lambda^2 & -\frac{\mu}{\lambda} & 0 \\ & & \frac{1}{\lambda^2} - \frac{D(1-\nu^2)}{N} & 0 \\ \text{对称} & & & D(\lambda^2 + \mu^2)^2 - \lambda^2 N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ S_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.20)$$

这是 N 的特微值问题。这里必须指出， w_1 的特微方程，和 U_1 ， V_1 ， S_1 的特微方程完全解除了耦合，亦即，有

$$[D(\lambda^2 + \mu^2)^2 - \lambda^2 N] w_1 = 0 \quad (4.21)$$

和

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + \frac{1+\nu}{2} \mu^2 & \frac{1-\nu}{2} \lambda \mu & \nu \lambda \\ & \mu^2 + \frac{1+\nu}{2} \lambda^2 & -\mu \\ & & 1 - \frac{D(1-\nu^2)}{N} \lambda^2 \\ \text{对称} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ S_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.22)$$

(4.21)式，(4.22)式给出相同屈曲载荷，这是因为我们采用了精确的容许函数。

$$N = -\frac{1}{\lambda^2} (\lambda^2 + \mu^2)^2 \quad (4.23)$$

(4.21)式和最小位能原理的结果有关，而(4.22)式则和余能原理的特微值问题的结果有关，它和文[2]所得的结果相同。

如果我们不用精确解作为容许函数，则上述推导将给出两个不同的屈曲载荷，一个相当于最小位能原理，另一相当于最小余能原理。我们可以证明，这两个近似的屈曲载荷都低于精确特征值。其中有一个更接近于精确值，究竟哪一个接近，取决于所取容许函数和边界条件。

五、结 论

本文建立了适用于板的大变形分析的混合变分泛函。在这个变分泛函中，本构方程是在最小二乘方的意义上整体地满足的，而平衡方程是通过应力函数的引用得到完全满足，协调方程则使用连续位移也得到满足。泛函的极值条件给出一组用应力函数和位移来表示的方程组，它代表本构方程所引起的近似误差。如果本构方程得到明确满足，这些方程归化为平衡方程和协调方程。

由于在这个泛函中,平衡的应力函数是组成基本变量的组成部份,所以,它的计算结果应该比常用的用微分近似位移场求得的不平衡的应力函数要精确得多。

本法通过方板大挠度分析作为实例来说明其优越性,其结果也和文献上已知的结果进行对比,它们是互相一致的。

本文第二部份,用板的稳定分析进行了验证。通过使在初始平衡位置附近的泛函线性化,我们得到板的稳定的变分结果。离开平面的平衡方程所含有的侧向位移,通过引进一组新的力场而消除了,为了引进这个新的力场,我们在泛函中增加了一组“人为的”本构方程。在引用了这个新的力场以后,我们求得了用应力函数和侧向位移表示的解除了耦合的特征值方程。我们得到了两组特征值方程,一组相当于最小位能原理所得的方程,另一组相当于最小余能原理所得的方程。如果我们使用精确的容许函数,这两组特征值是相同的。这种解除耦合的特性,是本法的主要贡献。

对于那些没有精确的容许函数的载荷和边界条件,我们的泛函给出两种不同的近似屈曲载荷和屈曲形式,它们分别相当于最小位能原理和最小余能原理的解^[6]。

参 考 文 献

- [1] Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, 3rd Edition (1982).
- [2] Tabarrok, B. and S. Dost, Some variational formulations for large deformation analysis of plates, *Compt. Meth. in Appl. Mech. Engg.*, 22, 3 (1980), 279.
- [3] Chien, W. Z., Further study on generalized variational principles in elasticity, Paper presented at 16th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 19-25 August, Lyngby, Denmark (1984).
- [4] Qing, J. and H. Li, New variational principles in linear and non-linear theories of elasticity, thermoelasticity and viscoelasticity, Paper presented at 16th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 19-25 August, Lyngby, Denmark (1984).
- [5] Tabarrok, B. and L. Assamoi, A new variational principle in elastodynamics, *J. Compt. Meth. Appl. Mech. Engg.* (to appear).
- [6] Levy, S., Bending of rectangular plates with large deflections, *NACA Tech. Note*, No. 846 (1942).
- [7] Donnell, L. H., *Beams, Plates, and Shells*, Mc-Graw Hill (1976).
- [8] Fung, Y. C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall (1965).
- [9] Southwell, R. V., On the analogues relating flexure and extension of flat plates, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 3 (1950), 257-270.
- [10] Stumpf, H., Die extremalprinzipie der nichtlinearen plattentheorie, *ZAMM*, 55 (1975), 110-112.

A Mixed Variational Formulation for Large Deformation Analysis of Plates

S. Dost

*(Department of Mechanical Engineering,
University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada)*

B. Tabarrok

*(Department of Mechanical Engineering,
University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada)*

Abstract

A mixed variational formulation for large deformation analysis of plates is introduced. In this formulation the equilibrium and compatibility equations are satisfied identically by means of stress functions and displacement components, respectively, and the constitutive equations are satisfied in a least square sense. An example is solved and the results are compared with those available in the literature.

Further, the functional is particularized for buckling analysis of plates and a simple example is solved to illustrate the theory.