

文章编号: 1000-0887(2004) 07_0711_07

等直蜂窝夹芯盒式矩形截面杆约束 扭转应力和位移的解析解*

张英世, 张 行

(北京航空航天大学 飞行器设计与应用力学系, 北京 100083)

(我刊原编委何福保推荐)

摘要: 用待定函数法建立等截面蜂窝夹芯盒式矩形截面直杆约束扭转微分方程并求得其通解求得无量纲化的面板正应力、剪应力, 芯材剪应力和横截面的翘曲位移。数值结果表明, 面板正应力沿轴向衰减很快。距固定端 $20h$ 远处横截面的面板正应力仅为固定端处的百分之一。

关键词: 蜂窝结构; 约束; 扭转; 衰减; 矩形截面杆; 正应力; 剪应力; 翘曲位移

中图分类号: V214.6 文献标识码: A

引 言

蜂窝夹芯结构具有比强度高、比刚度大的特点, 因而日益广泛用于军事工业和民用工业中^[1]。但在此方面未见公开发表的文章, 只有文[2]研究了等直蜂窝夹芯盒式矩形截面杆自由扭转的应力和位移。本文在此基础上, 并考虑到薄壁杆件的经典理论^[3-5], 讨论这种杆约束扭转时的应力和位移。

图 1 所示蜂窝夹芯杆, 其上、下面板承受面内正应力与剪应力, 左右腹板只承受面内剪应力, 中间填充的铝合金制成的正六边形蜂窝夹芯材料与面板用胶粘接在一起, 并被简化为无限多个无限薄的腹板。

1 几何方程

蜂窝夹芯盒式矩形截面杆发生约束扭转时, 其各个横截面的翘曲各不相同, 翘曲位移是 x, y 的函数 $u_s = u_s(x, y)$ 。首先利用面板的剪应变导出 u_s 的表达式。根据乌曼斯基假设^[6], 设面板的剪应变为

$$\gamma_s = f(x)g(y), \quad (1)$$

式中, $f(x)$ 为待定函数; $g(y)$ 为杆自由扭转时面板的剪应变

$$g(y) = \gamma_s^{(f)}(y), \quad (2)$$

* 收稿日期: 2001_12_21; 修订日期: 2003_11_01

基金项目: 航空基金资助项目(99B51024)

作者简介: 张英世(1948—), 男, 北京人, 副教授(联系人, Tel: + 86_10_82317508; Fax: + 86_10_82315644;

E_mail: beihangcaili@yahoo.com.cn)

式(1)表明: 当 x 固定时, 约束扭转的剪应变分布规律与自由扭转时的一样; 当 x 变化时, 不同横截面的 γ_s 不同。

设面板上任一点 A 在 xy 平面内的总位移为 v , 其沿 y 轴在切线方向的分量为 v_s , 沿 z 轴法线方向的分量为 w_c (图2), 则由几何关系, 有

$$v_s = -h\varphi, \quad (3)$$

式中, φ 为杆的扭转角。面板的剪应变为

$$\gamma_s = \frac{\partial v_s}{\partial x} + \frac{\partial w_c}{\partial y} = -h\vartheta + \frac{\partial w_c}{\partial y}, \quad (4)$$

式中, w_c 为扭翘, 即横截面沿 x 方向的位移; $\vartheta = d\varphi/dx = \vartheta(x)$ 为单位长度的扭转角。将式(4)两边对 y 积分, 并考虑到式(1)、(2), 有

$$w_c(x, y) = w_c(x, 0) + f(x) \int_0^y \gamma_s^{(f)}(\xi) d\xi + hy\vartheta, \quad (5)$$

式中, $w_c(x, 0)$ 为点 $z = h, y = 0$ 的扭翘, 根据问题的反对称性, 可使 $w_c(x, 0) = 0$, 故有

$$w_c(x, y) = f(x) \int_0^y \gamma_s^{(f)}(\xi) d\xi + hy\vartheta. \quad (6)$$

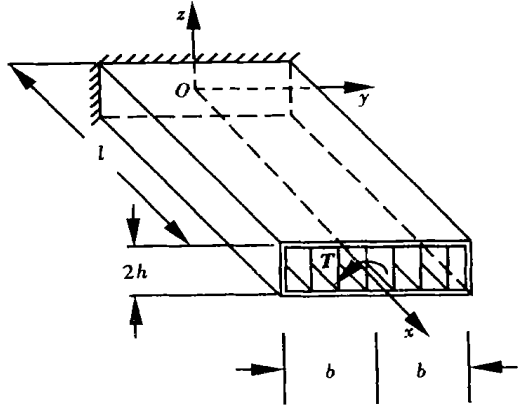


图1 蜂窝夹芯盒式矩形截面杆

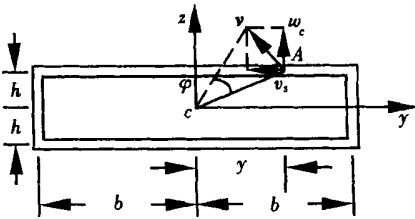


图2 位移分量的前视图

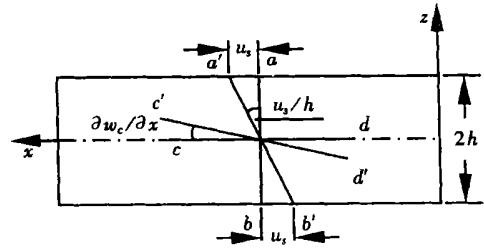


图3 位移分量的侧视图

面板沿 x 方向的正应变为

$$\epsilon_x = \frac{\partial w_c}{\partial x} = \frac{df(x)}{dx} \int_0^y \gamma_s^{(f)}(\xi) d\xi + hy \frac{d\vartheta}{dx}. \quad (7)$$

将蜂窝芯材简化为无限多个无限薄的均匀分布的受纯剪的腹板, 其内沿 z, x 方向的二线条 ab, cd 分别转移到 $a'b', c'd'$ 处 (图3)。由芯材的几何关系, 有

$$\gamma_c = \frac{u_s(x, y)}{h} + \frac{\partial w_c}{\partial x} = \frac{f(x)}{h} \int_0^y \gamma_s^{(f)}(\xi) d\xi + 2y\vartheta. \quad (8)$$

2 物理方程

面板的正应力、剪应力及芯材的剪应力分别为

$$\sigma_s = E_1 \epsilon_x = E_1 \left[\frac{df(x)}{dx} \int_0^y \gamma_s^{(f)}(\xi) d\xi + hy \frac{d\vartheta}{dx} \right], \quad (9)$$

$$\tau_s = G_s \gamma_s = G_s f(x) \gamma_s^{(f)}(y), \quad (10)$$

$$\tau_c = G_c \gamma_c = G_c \left[\frac{u_s(x, y)}{h} + y\vartheta \right]. \quad (11)$$

3 平衡方程

由图 4 所示上面板体素的平衡, 有

$$\frac{\partial q_s}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{ts})}{\partial x} - \tau_c = 0, \quad (12)$$

式中, $q_s = \tau_{ts}$ 为面板横截面上的剪流, t_s 为面板厚度。

横截面上各点剪应力形成的剪力素对扭心的合力矩合成扭矩 T 如下

$$T = -4h \int_0^b q_s dy + 4h \int_0^b \tau_c dy + 4hq_w(b)b, \quad (13)$$

式中, $q_w = \tau_{wtw}$ 为腹板上的剪流。剪流连续条件为

$$q_w = -q_s |_{y=\pm b} \quad (14)$$

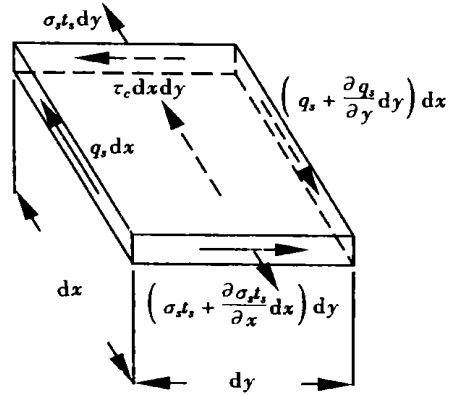


图 4 面板体素示力图

4 支配方程

式(12)两边从 0 到 b 对 y 积分, 并考虑到式(9)、式(10)与式(11), 有

$$Gf(x) \Psi_s^{(f)}(b) - Gf(x) \Psi_s^{(f)}(0) - \frac{G_c}{h} \int_0^b \int_0^b f(x) \Psi_s^{(f)}(\xi) d\xi dy + E_1 t_s \left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \int_0^b \int_0^b \Psi_s^{(f)}(\xi) d\xi dy + \int_0^b hy \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dy \right] - G_c \int_0^b 2y \vartheta dy = 0 \quad (15)$$

将式(6)、(10)、(11)、(14)代入式(13), 可得

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} - \frac{8G_c b^3 h \vartheta}{3\alpha T}, \quad (16)$$

式中

$$\alpha = T \left[\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{2\zeta} \frac{b}{\eta} (\text{sh}rb + br \text{ch}rb) - \frac{1}{2} \frac{G_s t_s h}{G_c b^2} \frac{1}{\zeta} \left(\frac{2}{3} - \frac{\text{ch}rb}{(b^2 r)/\eta} + \frac{\text{sh}rb}{(b^3 r^2)/\eta} \right) \right], \quad (17)$$

$$\zeta = 1 + \frac{\eta}{2b} \left[\left(\frac{G_w t_w}{G_s t_s} \frac{b}{h} - 2 \right) \text{sh}rb + rb \text{ch}rb \right], \quad (18)$$

$$\eta = \frac{2h}{hr \text{ch}rb + \frac{G_w t_w}{G_s t_s} \text{sh}rb}, \quad r = \sqrt{\frac{G_c}{G_s t_s h}}. \quad (19)$$

将式(16)代入式(15), 有

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} - \frac{B}{A} \vartheta = \frac{C}{A}, \quad (20)$$

其中

$$A = E_1 t_s h b^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{\frac{b^2 r}{\eta} - \text{ch}rb + 1}{3 \frac{G_s t_s h r}{G_c} \frac{1}{\eta} \alpha \zeta} \right], \quad (21a)$$

$$B = G_c b^2 \left[\frac{\eta r (\text{ch}rb - 1)}{3\alpha\zeta} + \frac{\frac{b^2 r}{\eta} - \text{ch}rb + 1}{3 \frac{G_s t_s h r}{G_c \eta} \alpha\zeta} + 1 \right], \quad (21b)$$

$$C = -\frac{T}{8bh} \left[\frac{\eta r (\text{ch}rb - 1)}{\alpha\zeta} + \frac{\frac{b^2 r}{\eta} - \text{ch}rb + 1}{\frac{G_s t_s h r}{G_c \eta} \alpha\zeta} \right]. \quad (21c)$$

5 解 法

方程(20)之特解为

$$\vartheta_0(x) = -\frac{C}{B}, \quad (22)$$

其通解为

$$\vartheta(x) = \vartheta(0) \text{ch} \sqrt{\frac{B}{A}}x + \frac{\vartheta'(0)}{\sqrt{\frac{B}{A}}} \text{sh} \sqrt{\frac{B}{A}}x - \frac{C}{B}, \quad (23)$$

式中, $\vartheta(0)$ 、 $\vartheta'(0)$ 为 $\vartheta(x)$ 的初参数, 可由杆的边界条件确定. 将式(23)代入式(16), 有

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} - \frac{8G_c b^3 h}{3d^r} \left[\vartheta(0) \text{ch} \sqrt{\frac{B}{A}}x + \frac{\vartheta'(0)}{\sqrt{\frac{B}{A}}} \text{sh} \sqrt{\frac{B}{A}}x - \frac{C}{B} \right]. \quad (24)$$

将式(23)、(24)代入式(6)、(9), 利用杆的边界条件

$$u_s(0, 0) = 0, \quad \alpha_s(l, y) = 0, \quad (25)$$

可得

$$\begin{aligned} \vartheta(0) = \frac{C}{B} = -\frac{3T}{8b^3 h G_c} \frac{M}{N} = \\ -\frac{3T}{8b^3 h G_c} \times \frac{\eta r (\text{ch}rb - 1) + \frac{\frac{b^2 r}{\eta} - \text{ch}rb + 1}{\frac{G_s t_s h r}{G_c \eta}}}{\eta r (\text{ch}rb - 1) + \frac{\frac{b^2 r}{\eta} - \text{ch}rb + 1}{\frac{G_s t_s h r}{G_c \eta}} + 3\alpha\zeta}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\vartheta'(0) = -\frac{\sqrt{\frac{B}{A}} \text{sh} \sqrt{\frac{B}{A}}l}{\text{ch} \sqrt{\frac{B}{A}}l} \vartheta(0), \quad (27)$$

$$\frac{M}{N} = \left[\eta r (\text{ch}rb - 1) + \frac{\frac{b^2 r}{\eta} - \text{ch}rb + 1}{\frac{G_s t_s h r}{G_c \eta}} \right] \left[\eta r (\text{ch}rb - 1) + \frac{\frac{b^2 r}{\eta} - \text{ch}rb + 1}{\frac{G_s t_s h r}{G_c \eta}} + 3\alpha\zeta \right]^{-1}. \quad (28)$$

将式(23)、(24)、(26)与式(27)代入式(9)、(10)、(11)及式(5)可得无量纲化的面板正应力、剪应力、芯材剪应力及横截面的翘曲位移如下

$$\sigma_s = \frac{\sigma_s}{\tau_s^{(0)}(0)} = \frac{3t_s \zeta}{\frac{G_c}{E_1}(2 - \eta_r)} \left[\frac{2 \frac{y}{\eta} - \text{sh}ry}{3 \frac{G_s}{G_c} \frac{t_s}{\eta} \alpha \zeta} + \frac{hy}{b^2} \right] \frac{M}{N} \sqrt{\frac{B}{A}} \times \left(\text{sh} \sqrt{\frac{B}{A}} x - \frac{\text{sh} \sqrt{\frac{B}{A}} l}{\text{ch} \sqrt{\frac{B}{A}} l} \text{ch} \sqrt{\frac{B}{A}} x \right), \quad (29)$$

$$\tau_s = \frac{\tau_s}{\tau_s^{(0)}(0)} = \frac{2 - \eta_r \text{ch}ry}{\alpha(2 - \eta_r)} \times \left[1 + \frac{M}{N} \left(\text{ch} \sqrt{\frac{B}{A}} x - \frac{\text{sh} \sqrt{\frac{B}{A}} l}{\text{ch} \sqrt{\frac{B}{A}} l} \text{sh} \sqrt{\frac{B}{A}} x - 1 \right) \right], \quad (30)$$

$$\tau_c = \frac{\tau_c}{\tau_s^{(0)}(0)} = \frac{2 \frac{y}{\eta} - \text{sh}ry}{\frac{G_s}{G_c} \frac{h}{\eta} \alpha(2 - \eta_r)} + \frac{3 \zeta_s \eta}{b^2(2 - \eta_r)} \times \frac{M}{N} \left[\frac{2 \frac{y}{\eta} - \text{sh}ry}{3 \frac{G_s}{G_c} \frac{h}{\eta} \alpha \zeta (2 - \eta_r)} + 2 \frac{y}{\eta} \right] \left(\text{ch} \sqrt{\frac{B}{A}} x - \frac{\text{sh} \sqrt{\frac{B}{A}} l}{\text{ch} \sqrt{\frac{B}{A}} l} \text{sh} \sqrt{\frac{B}{A}} x - 1 \right), \quad (31)$$

$$u_s(x, y) = \frac{u_s(x, y)}{u_s^{(0)}(b)} = \frac{2 \frac{y}{\eta} - \text{sh}ry}{\alpha \left(\frac{b}{\eta} - \text{sh}rb \right)} + \frac{3 \zeta}{\frac{b}{t_s} \frac{G_c}{G_s} \left(\frac{b}{\eta} - \text{sh}rb \right)} \times \frac{M}{N} \left[\frac{2 \frac{y}{\eta} - \text{sh}ry}{3 \frac{G_s}{G_c} \frac{t_s}{b} \alpha \zeta} + \frac{hy}{b \eta} \right] \left(\text{ch} \sqrt{\frac{B}{A}} x - \frac{\text{sh} \sqrt{\frac{B}{A}} l}{\text{ch} \sqrt{\frac{B}{A}} l} \text{sh} \sqrt{\frac{B}{A}} x - 1 \right), \quad (32)$$

式中, $\tau_s^{(0)}(0)$ 与 $u_s^{(0)}(b)$ 分别为杆自由扭转时, 面板中点处的剪应力值与横截面右上角的翘曲值^[2]

$$\begin{cases} \tau_s^{(0)}(0) = -\frac{T(2 - \eta_r)}{8t_s h b \zeta}, \\ u_s^{(0)}(b) = -\frac{T(b - \eta_s h r b)}{8t_s h b G_s \zeta}. \end{cases} \quad (33)$$

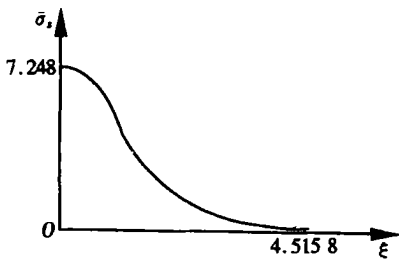


图5 σ_s 沿轴向的分布

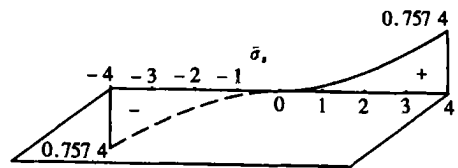


图6 σ_s 沿横截面宽度的分布

6 算 例

求图 1 所示蜂窝夹芯盒式矩形截面杆约束扭转的应力和位移。取 $E_1 = 70 \text{ GPa}$, $G_c = 0.21 \text{ GPa}$, $G_s = G_w = 27 \text{ GPa}$, $t_s = t_w = h/50$, $b = 4h$ 。求得 $x = 10h$ 处的 σ_s 、 τ_s 、 τ_c 和 u_s 值, 示于表 1。其中, 横截面形心所在的横向位置为点 0, 向右分别为点 1, 2, 3, 4, 向左分别为点 -1, -2, -3, -4, 相邻两点间的距离为 h 。

表 1 应力和位移沿 y 方向的变化

点	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
σ_s	0.757 4	0.602 4	0.414 8	0.210 8	0	-0.210 8	-0.414 8	-0.602 4	-0.757 4
τ_s	-0.665 2	-0.856 6	-0.955 8	-1.002 9	-1.016 8	-1.002 9	-0.955 8	-0.856 6	-0.665 2
τ_c	-0.049 5	-0.038 3	-0.026 0	-0.013 1	0	0.013 1	0.026 0	0.038 3	0.049 5
u_s	-4.195 1	-3.370 4	-2.204 3	-1.091 2	0	1.091 2	2.204 3	3.370 4	4.195 1

表 2 σ_s 沿 x 方向的变化

$x \sqrt{B/A}$	0	0.226 0	0.451 9	0.677 4	0.903 2	1.129 0	1.354 7	2.257 9	3.386 9	4.515 8	6.773 7
σ_s	7.248 0	7.205 9	4.612 4	3.679 5	2.935 3	2.341 6	1.868 0	0.756 5	0.244 4	0.079 0	0.008 2

7 结 论

数值结果表明, 等直蜂窝夹芯盒式矩形截面杆约束扭转时, 面板正应力、芯材剪应力及横截面的翘曲位移沿横截面宽度呈反对称分布, 面板剪应力沿截面宽度呈对称分布; 面板正应力 σ_s 、剪应力 τ_s 和横截面的翘曲位移 u_s 均沿截面宽度呈反对称分布, 芯材剪应力 τ_c 沿截面宽度呈对称分布。面板正应力沿轴向衰减很快。距固定端 $20h$ 远处横截面的面板正应力仅为固定端处的百分之一。

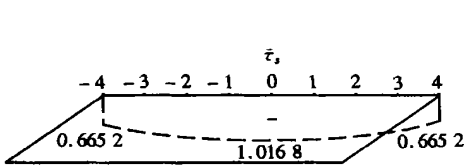


图 7 τ_s 沿横截面宽度的分布

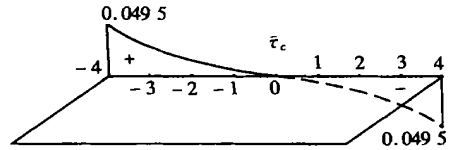


图 8 τ_c 沿横截面宽度的分布

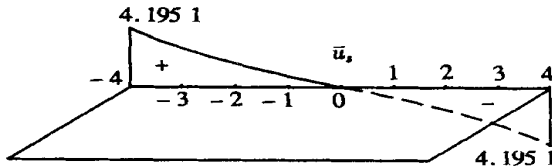


图 9 u_s 沿横截面宽度的分布

[参 考 文 献]

- [1] Gerard R. Minimum Weight Analysis of Compression Structures [M]. New York: New York University Press, 1956.
- [2] Khalid M Tahir, ZHANG Xing. Analysis of shear stress distribution in honeycomb aircraft wing structure.

- ture subjected to (s. t.) torque[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 1997, **10**(3): 182—187.
- [3] Vlasov V Z. Thin_Walled Elastic Beam [M]. 2nd Ed. Israel Prog, Jerusalem: for Scientific Translation, 1961.
- [4] von Karman, CHIEN Wei_zang. Torsion with variable twist[J]. J of Aero Sci, 1946, **13**: 503—510.
- [5] Murray N W. Introduction to the Theory of Thin_Walled Structures [M]. Oxford: Clarendon Press, 1984.
- [6] 詹涅里杰, 巴诺夫柯. 弹性薄壁杆件的静力学[M]. 胡海昌, 解伯民译. 北京: 科学出版社, 1965.

Analytical Solution of Restrained Torsional Stresses and Displacement for Rectangular Section Box Bar With Honeycomb Core

ZHANG Ying_shi, ZHANG Xing

(Department of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, P. R. China)

Abstract: Differential equation of restrained torsion for rectangular_section box bar with honeycomb core was established and solved by using the method of undetermined function. Non_dimension normal stress, shear stress acting in the faceplate and shear stress acting in the honeycomb_core and warping displacement were deduced. Numerical analysis shows the normal stress attenuates quickly along x_axis. Normal stress acting on the cross_section at a distance of $20h$ from the fixed end is only one per cent of that acting on the fixed end.

Key words: honeycomb structure; constrain; twist; attenuation; rectangular section box bar; normal stress; shear stress; warping displacement