应用数学和力学，第10卷第8期(1989年8月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

角点支承矩形板的振动*

成祥生

(同济大学，1988年6月15日收到)

摘　要

本文用能量原理讨论在四角点被支承的矩形板上有对称的集中质量时计算最低固有频率的近似方法．当板上有几个集中质量的情形下，可应用迭加原理，很方便地求出质量换算系数，从而求出薄板的最低固有频率．文中列举了许多数值算例．

一、引　言

求板的固有频率，常常导至解一个频率方程的根，该频率方程是一个高次代数方程。当集中质量在板上的布置先后不同时，就必须重新解算一次上述代数方程的根，当集中质量较多时，运算显得非常麻烦。本文用能量原理讨论在四个角点被支承的矩形板上有若干个对称安置的集中质量时，计算最低固有频率的近似方法，该方法既方便又实用，在建立这个方法时，必须仔细选取一个合适的振形曲面函数，逐步使它满足板边的位移边界条件和一部份内力边界条件，以便使振形曲面函数中独立参数的个数减少，从而达到计算简便和精度提高的目的。当板上有几个集中质量时，可应用迭加原理很容易地求出质量换算系数，于是薄板的固有频率也就很方便地求出来了。

二、方 法 概 述

应用能量原理求薄板的最低固有频率时，必须先从研究薄板系统的总能量出发，它包括了薄板系统的应变能和薄板系统的动能。如果薄板为一等厚的各向同性板，则整个薄板系统的应变能是[1]

$$U=\frac{D}{2}\iint[(\nabla^2 w)^2-2(1-\mu)(w_{xx}w_{yy}-w_{xy}^2)]dxdy \tag{2.1}$$

其中，$D=Eh^3/12(1-\mu^2)$ 是薄板的弯曲刚度；E，h，μ 分别为薄板材料的弹性模量、板厚和波松比，w 为瞬时振形函数；而 w_{xx}，w_{yy}，w_{xy} 分别为瞬时振形函数对相应下标的偏导数。如果是正交各向异性板，则（2.1）式应换成如下的公式[2]

$$U=\frac{1}{2}\iint[D_1w_{xx}^2+D_2w_{yy}^2+2(D_3-2D_k)w_{xx}w_{yy}+4D_kw_{xy}^2]dxdy$$

* 钱伟长推荐。

上式中的各个符号，参见[2]。

以上各式中所有的二重积分均遍及板的中面。

薄板系统的动能应包括由薄板本身的质量和板上所有集中质量所产生的动能

$$K=\frac{1}{2}\frac{\gamma h}{g}\iint(\dot{w}_t)^2dxdy+\frac{1}{2}\sum_i M_i(\dot{w}_t)_i^2 \tag{2.2}$$

式中γ，g，M_i分别为薄板材料的比重、重力加速度和第i个集中质量；$(\dot{w}_t)_i$为第i个集中质量的安置点板的横向运动速度。设第i个集中质量是安置在板上的$(\xi_i,\ \eta_i)$点，$(\dot{w}_t)_i$的下标i表示该括号中的量应取集中质量安置点$(\xi_i,\ \eta_i)$处的值。

若选取板的瞬时振形函数为

$$w(x,\ y,\ t)=w(x,\ y)\exp[i\omega t] \tag{2.3}$$

其中ω为薄板自由振动的固有频率，t为时间。我们称$w(x,\ y)$为振形函数，它的选取至少应满足薄板的位移边界条件。

为了求薄板系统自由振动的最低固有频率，我们应用雷莱氏的能量守恒原理[3]：薄板系统的最大应变能应等于系统最大的动能，即

$$U_{\max}=K_{\max} \tag{2.4}$$

为求薄板系统应变能及动能的最大值，只要将(2.3)代入(2.1)和(2.2)，最后令$\exp[i\omega t]=1$，便得到它们的最大值，其中应变能的最大值$U_{\max}$在形式上和(2.1)式的一样，而$K_{\max}$可写成

$$K_{\max}=\frac{1}{2}\omega^2\left[\frac{\gamma h}{g}\iint w^2(x,\ y)dxdy+\sum_i M_i w_i^2(\xi_i,\ \eta_i)\right] \tag{2.5}$$

在以后我们将省略$U_{\max}$及$K_{\max}$的最大值的符号"max"。

将(2.1)和(2.5)代入(2.4)便得到计算固有频率的公式

$$\omega=\sqrt{2U}\left[\frac{\gamma h}{g}\iint w^2dxdy+\sum_i M_i w_i^2(\xi_i,\ \eta_i)\right]^{-1/2} \tag{2.6}$$

其中U由(2.1)式计算。

当振形函数中的独立参数只有一个时，应用(2.6)式求薄板的最低固有频率就特别方便，因为这时从(2.4)所得到的频率方程是一个线性代数方程。若独立的参数有几个，那时得到的频率方程是一个线性代数方程组，从而得到关于固有频率的一个高阶代数方程。它解起来很麻烦。因此关于振形函数的选取是非常重要的，我们将尽可能地使独立参数的数目减至最少。

三、关于振形函数

设一矩形薄板，支承于四角点，四边自由，如图1所示。我们的讨论仅限于薄板是对称振形。应用雷莱法时，振形函数至少应满足薄板的位移边界条件。今选取如下的振形函数

$$w(x,\ y)=f_1\sin\frac{\pi}{b}y+f_2\sin\frac{\pi}{a}x+f_3\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y \tag{3.1}$$

其中a和b分别为薄板沿x轴和y轴方向边的长度，f_1和f_2分别为边长为b和a边跨中央的挠度，而f_3则表示板中心的挠度，它们都是未知的参数。

显然，振形函数(3.1)已满足了薄板的位移边界条件

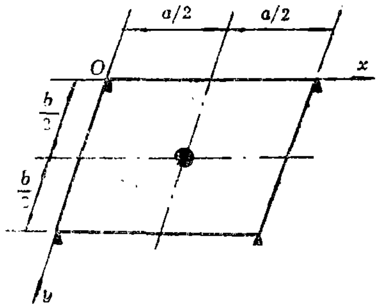

图 1

$$w(0,0)=0,\ w(a,0)=0,\ w(0,b)=0,\ w(a,b)=0 \tag{3.2}$$

并且薄板四边的挠度都不等于零。假如能满足一部或全部内力边界条件，不但能使计算固有频率的精度提高，而且还能使函数（3.1）中独立参数的数目减少，从而使计算简便。

因为所有四条边界都是自由的，所以在这些边界上的弯矩及合成横向剪力应为零。但它们不一定都满足。今打算使在所有自由边上合成横向剪力为零。

若所讨论的是各向同性板，那末这些剪力为零的条件可写为

$$[w_{xxx}+(2-\mu)w_{xyy}]_{\substack{x=0\\x=a}}=0 \tag{3.3}$$

$$[w_{yyy}+(2-\mu)w_{xxy}]_{\substack{y=0\\y=b}}=0 \tag{3.4}$$

现在将（3.1）式分别代入（3.3）和（3.4），并分别取 $x=0$ 和 $y=0$ 可得

$$f_2=\beta_2 f_3 \tag{3.5}$$

$$f_1=\beta_1 f_3 \tag{3.6}$$

其中

$$\beta_1=-\frac{\pi}{4}\left[1+(2-\mu)\frac{b^2}{a^2}\right],\qquad \beta_2=-\frac{\pi}{4}\left[1+(2-\mu)\frac{a^2}{b^2}\right] \tag{3.7}$$

不难看出，它们都是常数。若在（3.3）和（3.4）式中分别取 $x=a$ 和 $y=b$ 也得到与（3.5）和（3.6）式相同的结果。就是说，若 β_1 和 β_2 取（3.7）式的值，那末全部四条自由边的综合横向剪力都为零。

如薄板是正交各向异性板，则综合横向剪力为零的条件（3.3）和（3.4）就应该用下面的公式来代替[2]

$$\left[w_{xxx}+\left(2\frac{D_3}{D_1}-\mu_2\right)w_{xyy}\right]_{\substack{x=0\\x=a}}=0 \tag{3.8}$$

$$\left[w_{yyy}+\left(2\frac{D_3}{D_2}-\frac{D_1}{D_2}\mu_2\right)w_{xxy}\right]_{\substack{y=0\\y=b}}=0 \tag{3.9}$$

以上我们得到了函数（3.1）中的各参数之间的两个约束条件（3.5）和（3.6），其中独立的参数只有一个。于是函数（3.1）不仅满足了薄板的全部位移边界条件，同时还满足周边上合成横向剪力为零的部分内力边界条件。这样在分析薄板的固有频率时将会带来计算方便和精度提高的效果。

现在函数（3.1）可写成

$$w=f_3\left(\beta_1\sin\frac{\pi}{b}y+\beta_2\sin\frac{\pi}{a}x+\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y\right) \tag{3.10}$$

四、固有频率的数值分析

（A） 设有一方形薄板，支承于四个角点，四边自由，在板上除了有薄板本身的分布质

量之外，还在板中心（$a/2$，$a/2$）点有一个集中质量M，如图 1 所示。今计算此板的自由振动的最低固有频率。

振形函数用（3.10）式。因为是方板，所以$b=a$，若取$\mu=0.3$，由（3.7）式可得

$$\beta_1=\beta_2=-2.12057 \tag{4.1}$$

先计算薄板的最大应变能，为此将振形函数（3.10）代入（2.1），然后进行积分，并利用（4.1）可得

$$U=\frac{1}{2}\times 300.06269\frac{D}{a^2}f_1^2 \tag{4.2}$$

再计算薄板系统的最大动能。将（3.10）代入（2.5）进行积分，并注意到$\xi=a/2$，$\eta=a/2$，再利用（4.1）可得薄板系统动能的最大值

$$K=\frac{1}{2}\omega^2\left(5.69199\frac{\gamma h}{g}a^2+9.50499M\right)f_1^2 \tag{4.3}$$

将（4.2）和（4.3）代入（2.4）或直接由公式（2.6）可得到薄板在（$a/2$，$a/2$）点有一个集中质量M时的最低固有频率

$$\omega_{\min}=\frac{7.26062}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\gamma h/g+1.66989M/a^2}} \tag{4.4}$$

在上式根号内的分母中的第二项，表示将该集中质量乘上 1.66989 倍，然后均匀分布在板的中面上，因此数值 1.66989 可看成是把集中质量折算成均布质量的换算系数，对于已知的方板，不论集中质量有多少，或对称地放在板上的任意点，公式（4.4）可写成比较一般的形式

$$\omega_{\min}=\frac{7.26062}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\gamma h/g+\eta M/a^2}} \tag{4.5}$$

式中η就是质量换算系数。如果没有集中质量，则在上式中令$\eta=0$，于是可得到

$$\omega_{\min}=\frac{7.26062}{a^2}\sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}} \tag{4.6}$$

用同上述一样的方法还计算了如下(B)～(F)的几种方板的情形，就是

(B) 在板的一对对边的中心（0，$a/2$）和（a，$a/2$）点各有一个集中质量M，见图2。

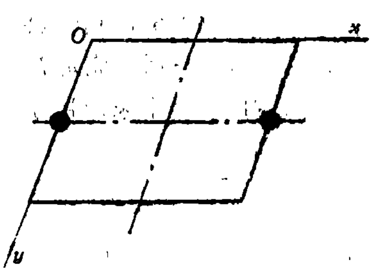

图 2

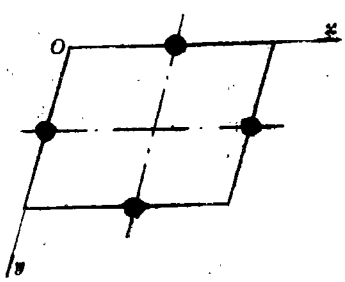

图 3

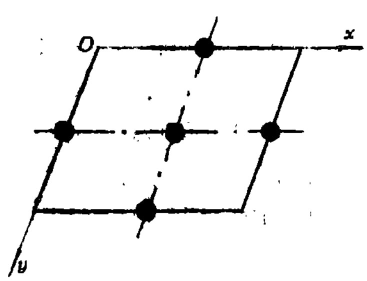

图 4

(C) 在四个自由边的中点，各有一个集中质量M，见图 3。

(D) 在板上有 5 个集中质量M，见图 4。

(E) 在每根对角线半长的中点上，各有一个集中质量M，见图 5。

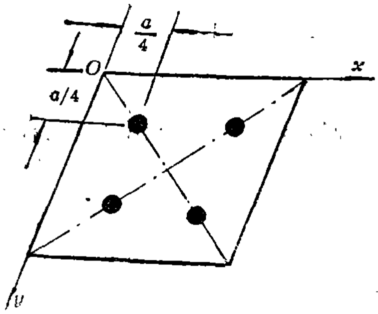

图 5

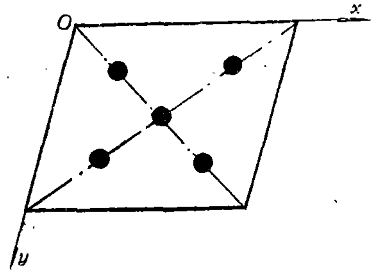

图 6

(F) 在板上有 5 个集中质量M，见图 6。

以上我们假定所有集中质量M都相同，并且各个集中质量都安置在和板的中心线为对称的地方。今将以上所有的计算结果列于下面表 1 中

表 1

情 形	质量换算系数 η	图 号	情 形	质量换算系数 η	图 号
A	1.66989	1	D	4.83008	4
B	1.58009	2	E	4.38859	5
C	3.16019	3	F	6.05848	6

从表中可看出：质量换算系数η之间存在迭加原理。例如，情形(C)的换算系数η可看成是情形(B)的换算系数的两倍，情形(D)的换算系数η可由情形(A)和情形(C)的η之和求得，情形(F)的换算系数η可由情形(A)和情形(E)的η之和而得到，等等。这个关系只有当振形函数中仅有一个独立参数时才成立。

五、结 束 语

1. 在振形函数中，如果只有一个独立的参数，求板上有集中质量的最低固有频率时，必须求解高阶代数方程的根。

2. 要使振形函数中只有一个独立的参数，那就必须在选择该函数时，除了满足全部位移边界条件之外，还使它满足一部分内力边界条件，于是振形函数中各参数之间就存在某些约束条件，从而使独立参数的数目减少。

3. 质量换算系数之间存在简单的迭加原理。

4. 若集中质量M不完全相同，或者是不放在有规则的节点上，然而质量换算系数的迭加原理仍旧成立。但(4.5)式应当修改。

5. 若为任意边比的矩形板，除了β_1和β_2须重新计算外，并且还要将公式(4.5)中根号内的a^2写成ab。

参 考 文 献

[1] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, second edit., McGrow-Hill Book Comp. Inc. (1959).

[2] Лехницкий С. Г., *Анизотропные Пластинки*, Гостехиздат, М. (1957).
[3] Rayleigh, J. W. S., *Theory of Sound*, Macmillan and Co. Ltd., London (1877).

Vibrations of Rectangular Plates Supported at Corner Points

Cheng Xiang-sheng

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

This paper discusses by energy theorem the method of approximate computation for the lowest eigenfrequencies of rectangular plates, on which there are symmetrical concentrated masses, supported at corner points. In the case of several concentrated masses, by using the principle of superposition we may find the reduced coefficients of masses conveniently. Hence we can obtain the lowest eigenfrequencies of thin plates. In the paper a good many numerical calculating examples are illustrated.