应用数学和力学，第10卷第8期(1989年8月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性分析中的全量刚度矩阵与增量刚度矩阵*

李龙元

(上海市应用数学和力学研究所，1988年5月3日收到)

摘　要

本文详细导出了非线性分析中的全量（割线）刚度矩阵和增量（切线）刚度矩阵的一般表达式，并由此进一步讨论了它们二者之间的数学关系。

本文的结果对于非线性方程的求解，及非线性、线性稳定性分析都具有重要帮助作用。

一、引　言

在采用有限元数值方法分析的非线性问题中，通常要遇到二个刚度矩阵的概念，其中一个是全量形式的刚度矩阵，另一个是增量形式的刚度矩阵。在数学上，用它们表示的代数平衡方程为

$$K_s u = P \tag{1.1}$$

$$K_\Delta \Delta u = \Delta P \tag{1.2}$$

式中，P为外载荷矢量，ΔP为相应的外载荷矢量的增量；u为节点位移矢量，Δu为相应的节点位移矢量的增量；K_s为用全量形式表示的刚度矩阵；K_Δ为用增量形式表示的刚度矩阵。

明显地，对于线性问题，由于K_s与K_Δ均与位移矢量u无关，因而二者是相同的。而对于非线性问题，由于它们均与位移矢量相关，因而二者是不同的。在几何上，全量形式的刚度矩阵表示为割线刚度矩阵，而增量形式的刚度矩阵表示为切线刚度矩阵。

在现有的文献介绍中，人们都或是采用全量形式的刚度矩阵[1,2]，或是采用增量形式的刚度矩阵[3,4,5]，来讨论各种非线性问题。但是讨论它们二者之间的关系的文献很少，而且，对于在推导增量形式的刚度矩阵表达式时，由于所采用的原理及方法不尽相同，导出的结果也略有差异。当然，这种差异只仅仅与增量同量级的小量有关[3,4]。

在本文，一方面我们将详细导出增量刚度矩阵与全量刚度矩阵在数学上这二者的关系表达式，另一方面也将澄清目前关于各种增量刚度矩阵的差异性。

二、全量形式的刚度矩阵

根据弹性力学的基本原理，受载弹性体的势能可以写成如下形式：

* 卢文达推荐.

$$\Pi=\int_V \frac{1}{2}\sigma^T\varepsilon dV-\int_A \mathbf{P}^T\mathbf{u}dA \tag{2.1}$$

其中，σ为应力矢量；D为弹性矩阵；ε为应变矢量。

方程(2.1)式中，应力矢量 σ，应变矢量 ε，和位移矢量 u 还满足如下二个基本方程：

$$\sigma=\mathbf{D}\varepsilon \tag{2.2}$$

$$\varepsilon=\mathbf{B}_L\mathbf{u}+\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})\mathbf{u} \tag{2.3}$$

其中，$\mathbf{B}_L$ 和 $\mathbf{B}_{NL}$ 分别为与位移矢量 u 无关及一次相关的应变位移矩阵。而且可以证明，$\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})\mathbf{u}$具有如下性质：(证明见附录)

$$\delta[\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})\mathbf{u}]=2\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})\cdot\delta\mathbf{u} \tag{2.4}$$

根据最小势能原理，弹性体的平衡方程为：

$$\delta\Pi=\int_V \varepsilon^T\mathbf{D}\delta\varepsilon dV-\int_A \mathbf{P}^T\delta\mathbf{u}dA=0 \tag{2.5}$$

式(2.5)亦称作虚功平衡方程。

将(2.3)式代入(2.5)式，并注意到方程(2.4)，则(2.5)式为：

$$[\mathbf{K}_0+\mathbf{N}_1(\mathbf{u})+\mathbf{N}_2(\mathbf{u}^2)]\mathbf{u}=\mathbf{R} \tag{2.6}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{K}_0=\int_V \mathbf{B}_L^T\mathbf{D}\mathbf{B}_L dV,\ \ \mathbf{N}_1(\mathbf{u})=2\int_V \mathbf{B}_L^T\mathbf{D}\mathbf{B}_{NL}dV+\int_V \mathbf{B}_{NL}^T\mathbf{D}\mathbf{B}_L dV\\&\mathbf{N}_2(\mathbf{u}^2)=2\int_V \mathbf{B}_{NL}\mathbf{D}\mathbf{B}_{NL}dV,\ \ \mathbf{R}=\int_A \mathbf{P}dA\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

方程(2.6)就是一般的用全量来表示的矩阵平衡方程，而

$$\mathbf{K}_s=\mathbf{K}_0+\mathbf{N}_1(\mathbf{u})+\mathbf{N}_2(\mathbf{u}^2) \tag{2.8}$$

称为全量刚度矩阵，它在弱非线性问题的分析中采用得比较多。

三、增量形式的刚度矩阵

为方便起见，将应力矢量、应变矢量、和位移矢量写成如下的增量形式

$$\left.\begin{aligned}&\sigma=\sigma_1+\Delta\sigma,\ \ \varepsilon=\varepsilon_1+\Delta\varepsilon\\&\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\Delta\mathbf{u},\ \ \mathbf{P}=\mathbf{P}_1+\Delta\mathbf{P}\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

式中，具有上标1的参量表示为在状态1时的参量；而参量前有符号Δ者分别表示为它们的各自增量。

根据方程(2.2)、(2.3)，知

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_1=\mathbf{D}\varepsilon_1,\ \ \varepsilon_1=\mathbf{B}_L\mathbf{u}_1+\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1,\ \ \Delta\sigma=\mathbf{D}\Delta\varepsilon\\&\Delta\varepsilon=\mathbf{B}_L\Delta\mathbf{u}+\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}_1)\Delta\mathbf{u}+\mathbf{B}_{NL}(\Delta\mathbf{u})\mathbf{u}_1+\mathbf{B}_{NL}(\Delta\mathbf{u})\Delta\mathbf{u}\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

将方程(3.1)代入(2.5)式，并注意到方程(2.5)在状态1时亦成立的性质，得

$$\delta\Pi=\delta\cdot\left\{\frac{1}{2}\int_V[\varepsilon_1^T\mathbf{D}\Delta\varepsilon+\Delta\varepsilon^T\mathbf{D}\varepsilon_1+\Delta\varepsilon^T\mathbf{D}\Delta\varepsilon]dV\right.$$

$$\left.-\int_A[\Delta\mathbf{P}^T\mathbf{u}_1+\mathbf{P}_1^T\Delta\mathbf{u}+\Delta\mathbf{P}^T\Delta\mathbf{u}]dA\right\} \tag{3.3}$$

上式亦可写成如下的虚功方程：

$$\int_V (\boldsymbol{\varepsilon}_1+\Delta\boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{D}\delta(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})dV=\int_A (\mathbf{P}_1+\Delta\mathbf{P})^T\delta(\Delta\mathbf{u})dA \tag{3.4}$$

进一步，注意到

$$\delta(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})=[\mathbf{B}_L+2\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}_1)+2\mathbf{B}_{NL}(\Delta\mathbf{u})]\delta(\Delta\mathbf{u}) \tag{3.5}$$

及

$$\mathbf{B}_{NL}(\Delta\mathbf{u})\mathbf{u}_1=\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}_1)\Delta\mathbf{u} \tag{3.6}$$

（有关方程式(3.6)的证明见附录）。得

$$[\mathbf{K}_0+\mathbf{K}_1(\mathbf{u}_1)+\mathbf{K}_2(\mathbf{u}_1^2)]\Delta\mathbf{u}=\Delta\mathbf{R} \tag{3.7}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{K}_1(\mathbf{u}_1)&=\int_V 4\mathbf{B}_L^T\mathbf{D}\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}_1)dV+\int_V 2\mathbf{B}_{NL}^T(\mathbf{u}_1)\mathbf{D}\mathbf{B}_L dV\\ \mathbf{K}_2(\mathbf{u}_1^2)&=\int_V 6\mathbf{B}_{NL}^T(\mathbf{u}_1)\mathbf{D}\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}_1)dV,\quad \Delta\mathbf{R}=\int_A \Delta\mathbf{P}dA\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

显然方程(3.7)与文[4,5]中的增量平衡方程是略有差异的。比较方程(3.7)与(2.6)、(3.8)与(2.7)，不难发现，它们二者间的关系为：

$$\mathbf{K}_1=2\mathbf{N}_1,\quad \mathbf{K}_2=3\mathbf{N}_2 \tag{3.9}$$

公式(3.9)就是表示增量刚度矩阵与全量刚度矩阵之间关系的方程。

实际上，关系方程(3.9)可从方程(2.6)式的直接微分来得到，即：

$$\mathbf{K}_1(\mathbf{u})\Delta\mathbf{u}=\frac{d}{d\mathbf{u}}[\mathbf{N}_1(\mathbf{u})\mathbf{u}]\Delta\mathbf{u},\quad \mathbf{K}_2(\mathbf{u}^2)\Delta\mathbf{u}=\frac{d}{d\mathbf{u}}[\mathbf{N}_2(\mathbf{u}^2)\mathbf{u}]\Delta\mathbf{u} \tag{3.10}$$

四、结 语

本文所导出的关于增量刚度矩阵与全量刚度矩阵之间的关系，一方面可用在非线性分析中的增量迭代混合算法中。另一方面也可用在线性及非线性的稳定性分析中。

附 录

1. 公式(2.4)的证明

由弹性力学基本定理知，应变矢量的非线性部分可表示为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}=\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})\mathbf{u}=\frac{1}{2}\mathbf{C}(\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\mathbf{C}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{u} \tag{A.1}$$

其中，

$$\mathbf{C}(\mathbf{u})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}_x^T & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{\theta}_y^T & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{\theta}_z^T\\ 0 & \boldsymbol{\theta}_z^T & \boldsymbol{\theta}_y^T\\ \boldsymbol{\theta}_z^T & 0 & \boldsymbol{\theta}_x^T\\ \boldsymbol{\theta}_y^T & \boldsymbol{\theta}_x^T & 0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}_x\\ \boldsymbol{\theta}_y\\ \boldsymbol{\theta}_z\end{bmatrix}$$

$$\theta_x=[u_{,x},\ v_{,x},\ w_{,x}]^T,\ \theta_y=[u_{,y},\ v_{,y},\ w_{,y}]^T,\ \theta_z=[u_{,z},\ v_{,z},\ w_{,z}]^T$$

显然，

$$\delta \mathbf{C}\cdot\theta=\mathbf{C}\cdot\delta\theta \tag{A.2}$$

所以，

$$\delta[\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}]=\delta\left[\frac{1}{2}\mathbf{C}(\mathbf{u})\cdot\theta(\mathbf{u})\right]=\frac{1}{2}\mathbf{C}(\mathbf{u})\delta\theta+\frac{1}{2}\delta\mathbf{C}\cdot\theta(\mathbf{u})$$

$$=\mathbf{C}(\mathbf{u})\delta\theta=\mathbf{C}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{G}\cdot\delta\mathbf{u}=2\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})\delta\mathbf{u} \tag{A.3}$$

证毕。

2. 公式(3.6)的证明：

由方程(A.1)，很容易看出：

$$\mathbf{B}_{NL}(\Delta\mathbf{u})\mathbf{u}_1=\frac{1}{2}\mathbf{C}(\Delta\mathbf{u})\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}_1=\frac{1}{2}\mathbf{C}(\Delta\mathbf{u})\cdot\theta(\mathbf{u}_1) \tag{B.1}$$

明显地，有

$$\mathbf{C}(\Delta\mathbf{u})\cdot\theta(\mathbf{u}_1)=\mathbf{C}(\mathbf{u}_1)\cdot\theta(\Delta\mathbf{u}) \tag{B.2}$$

所以，

$$\mathbf{B}_{NL}(\Delta\mathbf{u})\mathbf{u}_1=\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}_1)\Delta\mathbf{u} \tag{B.3}$$

证毕。

参 考 文 献

[1] Dahlquist, G. and A. Gjörck, *Numerical Methods*, translated by N. Anderson, Prentice-Hall (1974).

[2] 谢贻权、何福保编，《弹性和塑性力学中的有限单元法》，机械工业出版社 (1981).

[3] Kratzig, W. B. and Y. Basar, Nonlinear behaviour and elastic stability of shells, *Proc. of State-of-the-Art Colloquium*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1982), 19—56.

[4] Bathe, K. J., E. Ramm and E. L. Wilson, Finite element formulations for large displacement and large strain analysis, UC-SESM Report No.73—14, Division of the Structural Engineering and Structural Mech., Univ. of California, Berkeley, Feb. (1974).

[5] Kanoknukulchai, W., A large-deformation formulation for shell analysis by the finite element method, Ph. D. Dissertation, Div. of Structural Engineering and Structural Mech., Univ. of California, Berkeley (1978).

The Increment Stiffness Matrix and Total Quantum Stiffness in Nonlinear Analyses

Li Long-yuan

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai*)

Abstract

In this paper, the expressions of both increment stiffness matrix and total quantum stiffness matrix in nonlinear analyses are derived in detail, and their relationship is discussed in mathematical meaning.

The results given in our paper will be of great importance to the analyses of nonlinear numerical and nonlinear stability in finite element methods.