

# 边界元法中的改进等参变换

丁浩江 何文军

(浙江大学, 1988年5月3日收到)

## 摘 要

首先考察三维边界元法中八结点等参单元边中结点的敏感性, 指出对于常规等参变换计算, 边中结点同有限元计算情形一样, 仍必须遵守位于相邻角点间距离的三分之一内的建议, 且限制应更严格, 才能保证计算的有效性. 其次, 将改进等参变换引入到边界元法, 并解决了相应的奇异积分处理等问题, 提出了一个比常规等参变换时更加一般的坐标变换关系式. 最后, 对于立方块受单向拉伸和纯弯曲两种情况作了计算, 结果表明, 在边界元法中, 改进等参变换的引入, 使得计算具有更大的适应性.

## 一、引 言

等参变换在边界元法中有广泛的应用, 但是, 等参单元会因边中结点配置不恰当或者单元的过于畸变, 造成计算精度的损失. 这是由于此时坐标变换的雅可比行列式奇异性造成的. 对于常规等参变换, Zienkiewicz曾建议<sup>[1]</sup>, 对抛物型单元, 边中结点必须位于相邻角点间距离的中间三分之一内, 且要检查雅可比行列式, 从而来保证计算的有效性. 在有限元计算中, Henshell等人<sup>[6]</sup>就考察过具体的边中结点配置的影响. 由于程序前处理技术的发展, 边中结点配置的这些限制会给网格自动划分的应用带来不便, 一旦配置不当则会给计算带来隐患. 直到近来, Mullen<sup>[2]</sup>, Celia和Gray<sup>[3]</sup>各自独立地提出了改进等参变换后, 才解决了有限元计算中因边中结点配置不当而产生计算精度损失的问题. 文[4, 5, 9]对有限元法中的改进等参变换作了新的发展和推广.

边界元法作为一种较有限元法有其特有优越性的方法, 在工程数值计算上已受到广泛注意. 自从Lachat等人<sup>[7]</sup>将等参变换引入到边界元计算后, 使得边界元计算有效性和数值计算精度得到很大的改进. 有关等参单元边中结点对边界元计算敏感性考察, 以及将改进等参变换引入到边界元, 尚未见到这方面的工作. 本文首先考察等参变换边中结点对边界元计算的敏感性. 其次, 在边界元法中引入改进等参变换, 并解决了相应的奇异积分处理问题. 这个问题是因为边界元法的特点引起的. 这里, 我们提出了一种更为一般的坐标变换关系式, 来处理改进等参变换的奇异积分, 它的特殊情形, 便是常规等参变换边界元法中的处理奇异积分的坐标变换关系式. 最后, 对于立方体受单向拉伸和纯弯曲的两种情形, 作了数值计算, 用来验证本文所提方法的有效性.

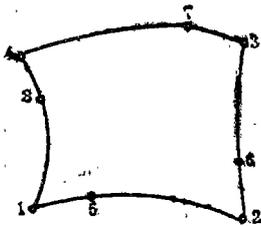
## 二、边界元法中的改进等参变换

### (1) 改进等参变换的概念

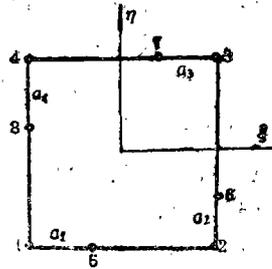
以八结点等参元为例，常规的等参变换，不但将实际单元变换为边长是2的方形母单元，而且不管实际单元中边中结点的位置如何，一概将它变换到母单元边的中点。改进等参变换则与此不同，它并要求母单元的边中结点在边中央，而代之以实际单元边中结点的位置来确定相应母单元的边中结点的位置。

边界元法中的改进等参变换，与有限元法中一样，它们的形函数有同样的表达式。这里，对于图1所示的八结点改进等参单元，直接写出它的形函数：

$$\begin{aligned}
 N_1 &= [(2-a_4)\xi^2 + (a_4-2)\xi^2\eta - a_1\xi\eta^2 + a_1\eta^2 + a_1(2-a_4)\xi\eta + a_1(a_4-1)\xi \\
 &\quad + (a_1a_4 - 2a_1 - a_4 + 2)\eta + (a_1 + a_4 - a_1a_4 - 2)] / (8a_1 - 4a_1a_4) \\
 N_2 &= [a_2\xi^2 - a_2\xi^2\eta + (2-a_1)\eta^2 + (2-a_1)\xi\eta^2 + a_2(a_1-2)\xi\eta + (2a_2 - a_1a_2 + a_1 - 2)\xi \\
 &\quad + a_2(a_1-1)\eta + (a_1 + a_2 - a_1a_2 - 2)] / (8a_2 - 4a_1a_2) \\
 N_3 &= [(2-a_2)\xi^2 + (2-a_2)\xi^2\eta + a_3\eta^2 + a_3\xi\eta^2 + a_3(2-a_2)\xi\eta + a_3(1-a_2)\xi \\
 &\quad + (2a_3 - a_2a_3 + a_3 - 2)\eta + (a_2 + a_3 - a_2a_3 - 2)] / (8a_3 - 4a_2a_3) \\
 N_4 &= [a_4\xi^2 + a_4\xi^2\eta + (2-a_3)\eta^2(1-\xi) + a_4(a_3-2)\xi\eta + (a_3a_4 - 2a_4 - a_3 + 2)\xi \\
 &\quad + a_4(1-a_3)\eta + (a_3 + a_4 - a_3a_4 - 2)] / (8a_4 - 4a_3a_4) \\
 N_5 &= (1-\xi^2)(1-\eta) / [2a_1(2-a_1)], \quad N_6 = (1-\eta^2)(1+\xi) / [2a_2(2-a_2)] \\
 N_7 &= (1-\xi^2)(1+\eta) / [2a_3(2-a_3)], \quad N_8 = (1-\eta^2)(1-\xi) / [2a_4(2-a_4)].
 \end{aligned} \tag{2.1}$$



(a) 八结点曲边单元



(b) 母单元

图 1

式(2.1)中的参数 $a_1, a_2, a_3, a_4$ 叫做边中结点的配置系数，即在母单元中为了确定边中结点的位置，而对每一边中结点给出的一个相对距离。在实际计算时，配置系数要预先算出。参照图1(b)所示，用边中结点 $i$ 的距离来确定 $a_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ )值。确定配置系数是改进等参变换的一个重要步骤。

### (2) 奇异积分的处理

弹性力学的边界积分方程是<sup>[8]</sup>

$$\begin{aligned}
 C_{ij}u_j(p) + \int_{\Gamma} T_{ij}^*(p, q)u_j(q)d\Gamma(q) \\
 = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(p, q)t_j(q)d\Gamma(q) + \int_{\Omega} U_{ij}^*(p, q)b_j(q)d\Omega(q)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

因而，当奇异点出现在积分单元上时，会出现奇异积分，它们有 $1/r, 1/r^2$ 的两种奇异性。实际上，只要解决 $1/r$ 的奇异性问题，对于 $1/r^2$ 奇异性处理，只需将一组刚体位移作为特解代

入边界积分方程, 便可解决. 对于  $1/r$  的奇异性的处理, 一般是在局部坐标中, 对单元作一坐标变换, 通过变换使得奇异性降低而得到解决的. 将改进等参变换引入边界元法后, 为了处理相应的奇异积分问题, 这里提出一个新的坐标变换式, 它的特殊情形就是常规等参变换时处理奇异积分的坐标变换式.

如图 2 可以分两种情况讨论:

a. 当奇异点在单元内的“1”号角结点上时, 坐标变换关系同常规等参变换时一样(图 2(a)), 可作如下变换:

对三角形 1—3—4 有

$$\xi = (1 + \eta_1)(1 + \eta_2)/2 - 1, \quad \eta = \eta_2 \quad (2.3a, b)$$

$$J_1 = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\eta_1, \eta_2)} = (1 + \eta_2)/2 = O(r) \quad (2.4)$$

对三角形 1—2—3 有

$$\xi = \eta_2, \quad \eta = (1 - \eta_1)(1 + \eta_2)/2 - 1 \quad (2.5a, b)$$

$$J_1 = (1 + \eta_2)/2 = O(r) \quad (2.6)$$

b. 当奇异点在单元内“5”号边中结点上时, 可以将单元划分成三个三角形(图 2(b)), 对每一个三角形分别作坐标变换.

对三角形 5—4—1 有

$$\xi - a_1 + 1 = -a_1(1 + \eta_2)/2, \quad \eta = (1 + \eta_1)(1 + \eta_2)/2 - 1 \quad (2.7a, b)$$

$$J_1 = a_1(1 + \eta_2)/4 \quad (2.8)$$

对三角形 5—2—3 有

$$\xi - a_1 + 1 = (2 - a_1)(1 + \eta_2)/2, \quad \eta = (1 - \eta_1)(1 + \eta_2)/2 - 1 \quad (2.9a, b)$$

$$J_1 = (2 - a_1)(1 + \eta_2)/4 \quad (2.10)$$

对三角形 5—3—4 有

$$\xi - a_1 + 1 = (\eta_1 - a_1 + 1)(1 + \eta_2)/2, \quad \eta = \eta_2 \quad (2.11a, b)$$

$$J_1 = (1 + \eta_2)/2 \quad (2.12)$$

同理, 对于奇异点出现在其它结点的情形, 可以类似写出它们的坐标变换式. 当配置系数  $a_i = 1$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 时, 式 (2.7)~(2.12) 便与常规等参变换时处理  $1/r$  奇异性积分的坐标变换式<sup>[10]</sup>一致了.

另外, 在计算边中结点应力时, 要用到边中结点的局部坐标, 它们也要作相应的改变.

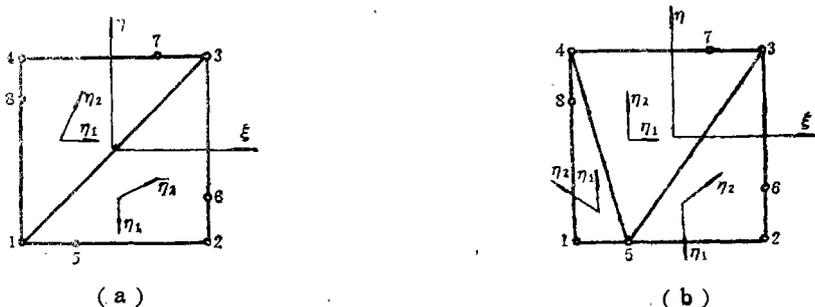


图2  $1/r$ 奇异性积分的处理

## 三、数值结果和讨论

本节对立方体受单向拉伸和纯弯曲作用两种情况，作了数值计算。受单向拉伸立方体的网格布置如图3(a)所示，分别将边中结点配置在不同的地方，用 $r_d l$ 来表示边中结点位置。纯弯曲立方体网格布置如图3(b)， $yz$ 平面是对称面，为方便计算时的约束处理，其中的2、7、16、17号结点配置于边的中点不变，变化其余边中结点的位置，分别考察对计算的影响。计算结果列于表1和表2。 $E=2.1 \times 10^9 \text{N/m}^2$ ， $\nu=0.3$ ，几何尺寸如图3、图4所示。所有计算均在UV-32机上进行。

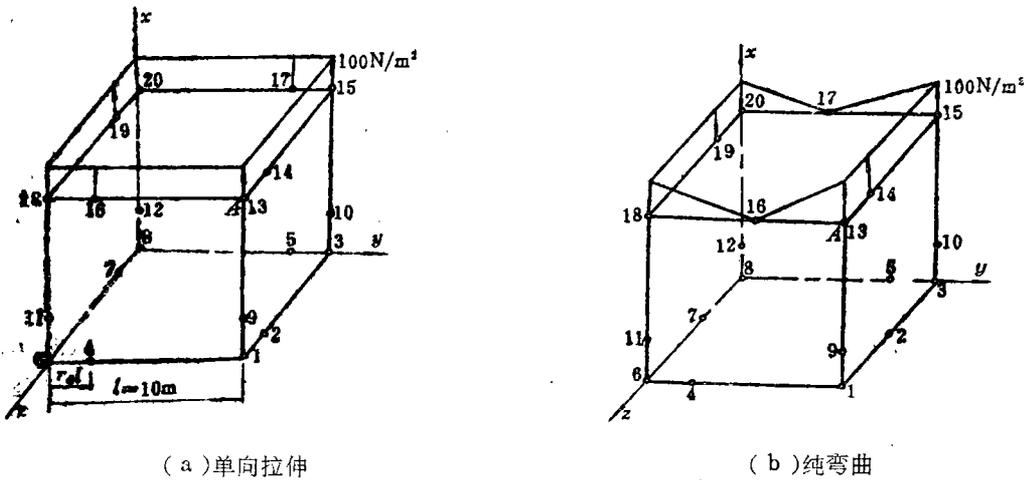


图3 立方体网格

表1

立方体受单向拉伸

	$r_d$	$M$	$N$	$C$	理论解
$u_x$ (mm)	0.15	0.477113	0.530846		
	0.20	0.475668	0.416440	0.476190	0.476190
	0.30	0.476130	0.477979		
	0.35	0.476161	0.478688		
$\sigma_{xx}$ (N/m <sup>2</sup> )	0.15	98.1255	50.9240		
	0.20	99.3269	287.8008	99.9979	100.0000
	0.30	99.9727	100.0658		
	0.35	100.0485	101.0007		
单元数		6	6	6	
高斯积分点数		6×6	6×6	6×6	

表1、表2中的 $r_d$ 表示边中结点相对角结点的位置，其值愈大，边中结点离中点越近( $0 < r_d \leq 0.5$ )。字母 $C$ 表示各边边中结点均位于各边中点，且用常规等参变换计算，这能获得最理想的结果。字母 $M$ 表示用改进等参变换计算， $N$ 表示用常规等参变换计算。表2中记号“×”表示因坐标变换的雅可比行列式为零或负值而中止计算。

表2

立方体受纯弯曲

	$r_d$	$M$	$N$	$C$	理论解
$v_d$ (mm)	0.15	-0.509872	-0.767184		
	0.20	-0.511858	-0.123880		
	0.25	-0.512283	-0.673466	-0.511899	-0.511905
	0.30	-0.512151	-0.625834		
	0.35	-0.512002	-0.588302		
$\sigma_{xx}$ (N/m <sup>2</sup> )	0.15	100.4717	43.1442		
	0.20	100.6705	484.1119		
	0.25	100.1994	×	99.9947	100.0000
	0.30	100.0175	101.3986		
	0.35	99.9813	105.0825		
单元数		6	6	6	
高斯积分点数		6×6	6×6	6×6	

从给出的结果可见, 常规等参变换在边中结点偏离中点愈大 ( $r_d$ 愈小) 时, 结果愈不精确, 而在边中结点偏离中点较小 ( $r_d > 0.35$ ) 时, 常规等参变换的计算还是较为可靠的。因此, 如果采用常规等参变换来计算 ( $N$ ), Zienkiwicz 关于边中结点必须位于相邻角结点间距离的中间三分之一内的建议或限制, 在边界元中, 仍然应该遵循, 从表 2 看到这种限制似还应更严格些。但是, 如果采用改进等参变换计算 ( $M$ ), 这个条件几乎可以不顾。当边中结点不同配置时,  $M$ 的结果与 $C$ 的十分接近, 而 $N$ 则大不相同。因而改进等参变换, 确实能消除因边中结点配置不当, 而产生的计算误差。此外, 处理奇异积分时, 曾试验过仍用旧的坐标变换式, 而形函数采用改进的, 此时计算的结果与精确解相差甚大。

#### 四、结 论

理论推导和数值计算都已表明, 在边界元法中, 利用常规等参变换计算, 要对边中结点的配置加以注意, 且须更加严格地遵守边中结点位于相邻结点距离的三分之一内的建议或限制, 不然会产生相当大的计算误差, 严重的甚至中断计算。而改进等参变换的引入, 使得在边界元计算中边中结点几乎无须再受此限制, 且同样能获得满意的结果, 因而具有更强的适应性。

边界元法中的改进等参变换, 只需修改原先的形函数的公式, 加入配置系数计算公式和新的奇异积分处理的坐标变换式, 而并不破坏原来常规等参变换程序的结构, 改动不大, 便于推广。

#### 参 考 文 献

- [1] Zienkiwicz, O. C., 《有限元法》, 尹泽勇、江伯南译, 科学出版社 (1985)。
- [2] Mullen, R. L. and G. Dickerson, An isoparametric finite element with decreased sensitivity to midside node location, *Computers and Structures*, 17, 4 (1983), 611—615.

- [3] Celia, M. A. and W. G. Gray, An improved isoparametric transformation for finite element analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **20** (1984), 1443—1459.
- [4] Soll, W. E. and W. G. Gray, Proportional isoparametric transformations for quadratic Lagrangian finite elements, *Engineering Analysis*, **2**, 2 (1985), 61—66.
- [5] Celia, M. A., Improved co-ordinate transformations for finite elements: the Lagrange cubic case, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **23** (1986), 1529—1545.
- [6] Henshell, R. D., D. Walters and G. B. Warburton, On the possible loss of accuracy in curved finite elements, *J. Sound Vibration*, **23** (1972), 510—513.
- [7] Lachat, J. C. and J. O. Watson, Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **10** (1976), 991—1005.
- [8] Brebbia, C. A., J. C. F. Tells and L. C. Wrobel, *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag (1984).
- [9] 张迪, 三维修改等参元, 数值计算与计算机应用, **7**, 4 (1986), 232—246.
- [10] 杜庆华, 《边界元——边界积分方程讲义》, 浙江大学 (1986).

## The Improved Isoparametric Transformation in BEM

Ding Hao-jiang He Wen-jun

(Department of Engineering Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou)

### Abstract

The midside node sensitivity of eight-node isoparametric element in 3-D BEM is investigated. The paper points out that the suggestion, based upon which the midside nodes should be located in the "middle third" of distance between the adjacent corners, should be followed even more strictly for the conventional isoparametric transformation (CIT) in BEM as that in FEM. A new coordinate transformation relation has been put forward to solve the singular integral problem. The computation is carried to two cases: a cubic body subjected to tensile stress and to pure bending. The numerical results show that the improved isoparametric transformation (IIT) is easier and more flexible to practice.