

主观几何学初步探讨*

云天铨

(华南理工大学工程力学系, 1988年5月30日收到)

摘 要

此处的所谓“主观几何学”是指使用数学的语言和方法, 研究抽象了的客观形体和其观察记录之间的关系的学科。当观察记录的过程中考虑主观因素(如观察器的位置, 人体视觉系统的功能等)的影响时, 便带来了许多不同于通常几何学的特点。本文给出基本假设; 建议球面观察记录; 研究了抽象的客观形体及其观察记录之间的基本对应关系以及给出应用上述理论的例子。我们期望主观几何学的研究将影响或连系于视觉系统生理学, 应用光学等研究, 并在测量、导航和仿生学等中得到应用。

一、概 述

通常的几何学是人们熟知的研究抽象了的客观形体之间关系的科学。在几何学中, 这种研究是绝对客观的; 它完全排除了任何主观的因素。但是, 对许多实际情形, 对客观形体关系的了解, 不允许或不可能采用如几何学中的纯粹客观的方法。例如, 我们要知道两物体之间的距离, 在那里是不可能去丈量的或者得到三个正交投影图, 人们自然会想到应用照相的方法去确定这一距离。然而, 这种观察或拍照用来确定客观形体关系的观测记录的方法却与主观因素(观察器的位置和功能等)有关。当考虑及主观因素时, 便带来了许多与由普通几何学考虑得到的不同的特色。举一个简单的例子, 在几何学中一正立方体有着相等的边长和相等的角。然而, 由于观察点到各边的距离不等, 因此, 在视像中或在一照片中正立方体的各边长并不相等, 各角也不相等。人们早就注意到这些区别。绘画、摄影和透视学都反映了这些主观因素的影响, 但它们不算主观几何学。主观几何学不研究或表现实物的颜色、光泽、明暗, 而是使用数学的方法和语言研究抽象了的客观形体和其观察记录之间的关系。再者, 多数的绘画、油画、摄影和透视图都把观察所得的客体外形用图的方式记录在平面上, 没有使用数学语言描述, 也没有量的分析。

一般而言, 客观形体是三维的, 而通常它的观察记录是二维的。为建立客观形体和其观察记录之间的对应关系, 某些规则或假设是必需的。因此, 在第二节中我们首先给出两个基本假设作为分析的基础。根据这些假定, 我们选择球面作为客观形体观察记录的基准并建立客观形体及其观察记录之间的基本对应关系。这一基本对应关系的一些性质在第三节中用几何和分析的方法来讨论。最后, 在第四节中给出了基本对应关系应用的例子。在这个例子中

* 华南理工大学重点科研基金资助。

我们用拍六张球面屏幕上展示的照片就能确定 E^3 空间中任二点的距离，而这二点的距离以及这二点中的点到观察点的距离是不能去丈量得到的。

二、主观几何学的基本假设

如同在诸几何学中需要某些基本假设或假说作为它的基础（例如，欧几里得几何学有五个基本假设，称为公理，而非欧几里得几何学和欧几里得几何学不同在第五个（平行）假设^[1]）一样，我们在此也需要某些基本假设作为建立客观形体及其观察记录之间的基本对应关系的基础。这些最简单的，从人类实践中抽出的假设当然应该是显然符合人类的实践并对分析是至关重要的。在此的两个基本假设，一个是关于由客观形体发出的信息的传递的假设，另一个是关于观察器的接受和记录的假设。

假设 1 (射线传递假定) 从客观形体发出的所有信息沿着由观察点射出的射线的反方向向观察点汇集。

假设 2 (正交感应假定) 射线上的信息只有垂直于观察器的记录层的分量才会被记录。

这些假定很明显是符合人类的实践的。

应当指出的是上述假设并不是主观几何学的全部假设，而是仅足以对静态的主观几何学建立客观形体及其观察记录之间的基本对应关系。对于动态的主观几何学还将会有一些补充的规则或者原理^[2]。

三、球面视像图、基本对应关系

所谓“视像”是对客观形体所观察的一种记录。这种记录可以记录在平面上或者曲面上而得到的分别称之为平面视像或曲面视像。

根据假设 1 和 2，在此选择球面作为对客观形体发出的信息的记录面而得到球面视像图。图中一（可见）点对应着位于由观察点发出的同一的射线上的客体的和观察点距离最短的点。因为以观察点为心的球面是和所有信息射线正交的唯一的曲面，所以，由客体发出的信息在每一射线上以最强的亮度被记录在球面视像图的相应的点上。再者，球面视像图的一个性质，即表述为直线段在球面上的像是一大圆弧，还可以用来决定任意两点（两物体）的距离，如在第四节的例中所示的从不同的地点拍摄六张球面照片那样。但若是拍摄平面照片则办不到。上述这些都是球面记录优于平面记录之所在。

人们也早注意到球面视像图能逼真地记录客观形体。绘于球面天花板的油画，现代化的球面屏幕电影都给观众以临其境逼真的感觉。然而，对于为什么用球面却没有解释。下面，我们用数学的语言来描述球面视像图。

令观察点 O 为坐标原点， S_R 为以 O 为心， R （给出）为半径的球面。在欧几里得空间 E^3 中客体 B 的一点 $a(r, \varphi, \theta)$ 被记录为 $a_r(R, \varphi, \theta)$ 。其中 a_r 为射线和球面 S_R 的交点。 a_r 被称为 a 在 S_R 上的像，从 a 到 a_r 的变换 T 称为映射，即

$$T: a(r, \varphi, \theta) \longrightarrow a_r(R, \varphi, \theta) \quad (3.1)$$

或
$$a_r = T a \quad (3.2)$$

令 $X = \{a | a \in B\}$ 为客体 B 的点集，由 (3.1) 式，我们有

$$T: X = \{a(r, \varphi, \theta) \mid a(r, \varphi, \theta) \in B\} \longrightarrow$$

$$Y = \{a_r(R, \varphi, \theta) \mid a(r, \varphi, \theta) \in B\} \quad (3.3)$$

或 $Y = TX = \{a_r \mid a_r(R, \varphi, \theta) = Ta, a(r, \varphi, \theta) \in B\} \quad (3.4)$

式中 Y 称为 X 在 S_R 上的像或 X 的球面视像图, 或 T 的值域; X 称为 Y 的像原或 T 的定义域。式中 R 是给定的。

(3.3)式或(3.4)式就是客体 B 和球面视像图之间的基本对应关系。

基本对应关系的一些性质:

性质1 直线段 $ab \in X$ 在 S_R 上的像 $\widehat{a, b}$, 是一大圆弧。

$$\widehat{a, b}_r = R\psi \quad (3.5)$$

$$\cos\psi = (x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b) / (r_a r_b) \quad (3.6)$$

其中 $r_a = (x_a^2 + y_a^2 + z_a^2)^{1/2}$, $r_b = (x_b^2 + y_b^2 + z_b^2)^{1/2}$

式中 x_a, y_a, z_a 和 x_b, y_b, z_b 分别是 a 和 b 点的笛卡儿坐标分量。

证明 设射线 Oa 和 Ob 的夹角为 ψ 。由公式^[3, p.344]可得(3.6)式。记平面 Oab 为 P 。 P 和 S_R 的交是一大圆 $A = P \cap S_R$ 。根据像的定义(3.1), 线段 ab 中任一点 c 的像 c_r , 位于 A 上, 即 $c_r = Oc \cap S_R \subset P \cap S_R = A$ 。因此, ab 的像位于 A 。 Oa_r 和 Ob_r 的夹角也是 ψ 。故我们得到(3.5)式。 □

性质2 设 X 中二已知矢量 \vec{ab} 和 \vec{ac} 的夹角为 γ , 若 O, a, b, c 四点不共面, 则它们的像 $\widehat{a, b}$ 和 $\widehat{a, c}$ 的夹角 β 为

$$\cos\beta = \frac{(\vec{Oa} \times \vec{Ob}) \cdot (\vec{Oa} \times \vec{Oc})}{|\vec{Oa} \times \vec{Ob}| \cdot |\vec{Oa} \times \vec{Oc}|} \quad (3.7)$$

其中 $\cos\gamma = \vec{ab} \cdot \vec{ac} / (|\vec{ab}| \cdot |\vec{ac}|)$

$$|\vec{Oa} \times \vec{Ob}| = |\vec{Oa}| \cdot |\vec{Ob}| \sin\angle aOb, \quad 0 \leq \angle aOb \leq \pi$$

$$|\vec{Oa} \times \vec{Oc}| = |\vec{Oa}| \cdot |\vec{Oc}| \sin\angle aOc, \quad 0 \leq \angle aOc \leq \pi$$

证明 设过 Oab 的平面为 P 。过 Oac 的平面为 Q 。大圆弧 $\widehat{a, b}$ 和 $\widehat{a, c}$ 的夹角即为 P, Q 二平面角。由公式^[3, p.392]得(3.7)式。易见 $\beta \neq \gamma$ 。 □

利用上述性质, 我们可以从量上分析前面提到的, 区别几何学和主观几何学的正立方体的例子。下面, 我们只分析正立方体的一个表面就够了。

例1 设 h 为正立方体的边长, 立方体的一个表面的四点的笛卡儿坐标分别为 $a(0, 0, l), b(0, h, l), c(h, h, l)$ 和 $d(h, 0, l)$ 。观察点 $O(0, 0, 0)$, l 为从 O 到 $abcd$ 平面的距离。求从观察点 O 看去, 这四条边的像的距离以及 $\widehat{a, b}$ 和 $\widehat{a, d}$ 的夹角。

根据性质1的(3.5), (3.6)式, 得:

$$\widehat{a, b}_r = \widehat{a, d}_r = R\psi, \quad \cos\psi = l / (h^2 + l^2)^{1/2},$$

$$\widehat{b, c}_r = \widehat{c, d}_r = R\varphi, \quad \cos\varphi = [(h^2 + l^2) / (2h^2 + l^2)]^{1/2}$$

当从观察点看去(即根据(3.3)或(3.4)式作向 S_R 投影), 四段圆弧 $\widehat{a, b}_r, \widehat{b, c}_r, \widehat{c, d}_r$ 和 $\widehat{d, a}_r$ 变为四直线段且 $a_r b_r = a_r d_r = 2R \sin(\psi/2) > c_r d_r = c_r b_r = 2R \sin(\varphi/2)$ 。

根据性质2的(3.7)式, 得:

$$\cos\beta = l [(l^2 + h^2)^{1/2} - l] / h^2 \quad \beta \neq \pi/2$$

上述这些结果符合人类的实践。

几何的方法比较直观, 而分析的方法比较深刻。上面我们用几何的方法讨论性质。下面我们分析的方法讨论其它性质。

令 u 为 E^3 中的任一矢量, 则 u 可分解为(图1)

$$u = u_{L_1} + u_S + u_{L_2} = u_S + u_L, \quad u_L = u_{L_1} + u_{L_2} \quad (3.8)$$

$$\text{其中矢量} \quad u_{L_1}, u_{L_2} \in L, \quad u_S \in S, \quad S \perp L \quad (3.9)$$

L 为在 O 点射出的射线上的矢量的集合, S 为在半径为 R 的球面上的矢量的集合。因为(3.8), (3.9)式成立, 据定义, u_S 称为 u 在 S 上的(正交)投影。

现在, 令 $X = u \in E^3$, 则由(3.4)式, 得

$$Y = Tu = u_S \quad (3.10)$$

因为 u_S 是 u 在 S 上的投影, 据定义, T 称为投影算子。一投影算子是一线性有界算子。因此, 我们有

性质 3 由(3.3)式定义的算子 T , 即 $Tu = u_S, u \in E^3, u_S \in S$, 是一线性有界算子。

因 T 是线性的, 则

$$T \sum \alpha_i u_i = \sum \alpha_i T u_i = \sum \alpha_i u_{S_i}, \quad u_i \in E^3, \alpha_i \cdots \text{数} \quad (3.11)$$

(3.11)式可以用来近似地求一曲线的球面视像, 因为一曲线可以用它的许多段弦(矢量)去近似。□

性质 4 $T: X = \{u \in E^3\} \rightarrow Y = \{u_S \in S\}$ 是连续的。

因为有限维赋范空间的线性算子是连续的^[4, p. 123], 故 T 是连续的。□

性质 5 如 $X = \{u \in E^3\}$ 是凸的, 则 $Y = TX = \{u_S \in S\}$ 也是凸的。

证明 设 $u, v \in X$, 因 X 凸, 故有 $w = \lambda u + (1-\lambda)v \in X$, 对实数 $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ 。因而, $Tw = w_S \in Y$ 。现在, T 是线性的, 于是

$$Tw = \lambda Tu + (1-\lambda)Tv = \lambda u_S + (1-\lambda)v_S \in Y$$

因为 $Tu = u_S \in Y, Tv = v_S \in Y$ 以及 $\lambda u_S + (1-\lambda)v_S \in Y$, 据定义, Y 是凸的。□

注 这里, Y 是凸的指的是当从 O 观察凸的客体 X , 视像图 Y 是凸的。换句话说, Y 在 S 中凸, 而不是在 E^3 中凸。(因为球面在 E^3 中不是凸的)。

四、主观几何学的应用举例——利用球面视像图确定距离

在下面, 我们给出一个初步应用主观几何学的例子。

假定我们要知道 OB, OA_i 和 $A_i B$ 的距离。其中 O 和 B 是两物体(点), A_i 是一观察点, 且我们不能直接去丈量这些距离。现在, 我们在 $A_i (i=1$ 至 $6)$ 处拍六张(球面)照片, 其中 A_i 之间的相对坐标是已知的。而且我们可以在观察点 A_i 处随意地, 不加方位和俯仰角的限制地, 拍摄包括 O 和 B 在内的照片。把这些照片逐一地投射到半径为 R 的球面屏幕上, 由(3.5)式, 我们可得 $\psi_i = \angle OA_i B (i=1$ 至 $6)$ (其中 \widehat{OB} 可从屏幕上逐一量出)。一旦求得 ψ_i 后, 我们就可如下地计算出所需的距离。

令 O, B, A_i (观察点) 的笛卡儿坐标为 $O(0, 0, 0), B(x, y, z)$ 和 $A_i(x_i, y_i, z_i) (i=1$ 至 $6)$ 。其中 A_i 之间的相对坐标是可以预先知道的。例如, 令

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1, y_2 = y_1, z_2 = z_1 - a; & x_3 &= x_1, y_3 = y_1, z_3 = z_1 + a; & x_4 &= x_1, y_4 = y_1 - b \\ z_4 &= z_1; & x_5 &= x_1, y_5 = y_1 + b, z_5 = z_1; & x_6 &= x_1 - c, y_6 = y_1, z_6 = z_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

其中 a, b, c 是已知的, 未知数是 x, y, z, x_1, y_1 , 和 z_1 。利用余弦定理, 对 $\triangle OA_i B$ 我们

可以建立六个方程式用以解六个未知数, 即

$$d^2 = s_i^2 + t_i^2 - 2s_i t_i \cos \psi_i \quad (i=1 \sim 6) \quad (4.2)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} d &= OB = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad t_i = OA_i = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{1/2} \\ s_i &= BA_i = [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

假定我们解(4.2)式求得六个未知数, 则所需的距离 d , t_i 和 s_i 由(4.3)和(4.1)式即求出。

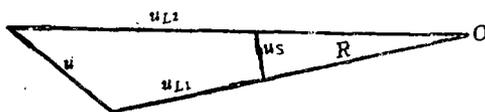


图 1

参 考 文 献

- [1] Greenberg, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries Development and History*, 2nd Ed., W. H. Freeman and Company, San Francisco (1980), 1, 12.
- [2] 云天铨, 动态主观几何的几个基本原理和动态基本对应关系, 应用数学和力学 (待发表).
- [3] 数学手册编写组, 《数学手册》, 高等教育出版社, 北京 (1979).
- [4] 夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌编著, 《实变函数论与泛函分析》, 下册, 人民教育出版社, 北京 (1979).

Primary Research on Subjectivity Geometry

Yun Tian-quan

(Department of Engineering Mechanics, South China
University of Technology, Guangzhou)

Abstract

The so-called "Subjectivity Geometry" herein is a course for studying the relationship between the abstracted object configuration and its observed record by means of mathematical methods and described by mathematical language. There are many features differing from the common geometry when the effects of the subjectivity (such as the position of the observer, the functions of the visual system of human) are taken into account during the observing-recording process. In this paper, some basic assumptions are made; spherical observing record is suggested; the fundamental relationship between the abstracted object configuration and its corresponding observed record is studied; and an example of application of the above theory is presented. We anticipate that the study of subjectivity geometry will influence, or will be associated with the study of physiology of the visual system, applied optics etc., and will be useful in surveying, pilotage and imitative biology, etc.