

密相两相流基本方程组的封闭性和 分散相在壁面处的剪应力

林多敏 蔡树棠

(上海市应用数学和力学研究所) (上海市应用数学和力学研究所)
(中国科学技术大学近代力学系)

(1988年5月27日收到)

摘 要

本文对将连续相和分散相分别作连续介质考虑的两相流基本方程组, 通过分析密相下两相流动的物理机制, 提出了分散相的应力满足宾汉流体的本构方程, 并用分散相在壁面处剪应力作为分散相的一个边界条件, 从而得到了一个封闭的处理密相系统的两相流数学模型。最后, 还讨论了分散相在壁面处剪切力的表达式。

一、引 言

近三十年来, 人们一直在努力用数学手段来处理两相流动问题。但是, 只有通过了解两相流的物理本质, 才能够建立合理的两相流动的数学模型。

大型计算机计算能力的迅速提高导致了两相流数值计算所用模型的发展^[1]。现有的两相流数学模型大都是用来处理稀相两相流动的。由于稀相下数学模型一般忽略了分散相的剪应力^[1], 而且对气固两相流相间作用力仅仅采用了阻力项, 所以, 稀相下两相流数学模型是较为简单的, 数值求解也是较为方便的。

密相两相流是有重要应用价值的两相流动体系。由于在实际的两相流动中, “分散相”具有极限摩擦力等复杂情况, 因此, “分散相”的本构关系难以用简单的解析表达式来写出。然而, 在密相体系中, “分散相”的本构关系原则上是必须要加以考虑的。故建立密相两相流数学模型需要在不同情况下引入不同的辅助关系式。

前文[2]中, 我们已经讨论了两相流基本方程以及稀相下的相间作用力的表达式。本文在此基础上: ①进一步讨论高浓度下的相间作用力; ②讨论密相状态时分散相在摩擦机制下应满足的非牛顿流的本构关系; ③给出分散相在壁面处的剪切力的值替代速度无滑移的条件作为一个边界条件。因为对透明的壁面, 我们可以清楚地看到颗粒的滑移运动, 所以, 这样处理和实际情况要接近一些。同时, 利用理论力学的摩擦碰撞原理给出了分散相在壁面处剪切力的表达式。最后, 得到了一个用欧拉形式表示的联立方程组来处理密相两相流动的封闭的数学模型。

二、密相两相流基本方程组的封闭性

2.1 本文的基本假设

本文假定分散相颗粒的粒径较小，单位体积粒子数的涨落起伏的百分数远小于容许误差 r ，即

$$\frac{(\overline{N}-\bar{N})^2}{\bar{N}^2} \sim \frac{1}{\bar{N}} \ll r \quad (2.1)$$

其中 \bar{N} 为单位体积中的粒子数； \overline{N} 为单位体积中的平均粒子数。此时，可把分散相（即颗粒）看成连续介质，把单位体积内颗粒的平均速度（即质量中心的速度）作为分散相的速度，分散相的密度就是颗粒本身的密度，至于颗粒的容重则等于颗粒在单位体积中所占的体积百分数再乘以颗粒材料本身的密度。颗粒周围的流体同样也认为是连续介质，用单位体积里流体的平均速度作为这一种连续介质的速度，即连续相的速度。

为简单起见，假定颗粒为一种大小均匀的微小球体，且略去辐射热交换。但是，只要我们加上不同频率辐射流所满足的方程式和组分方程式，我们就不难得到多种粒径多组元的多相流动和有热辐射的情形的方程式。

2.2 层流两相流基本方程组

根据质量守恒定律，两相各自的连续方程式可写为

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_c \alpha_c) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_c \alpha_c V_{cj}) = R_{dc} - R_{cd} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_d \alpha_d) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_d \alpha_d V_{dj}) = R_{cd} - R_{dc} \quad (2.3)$$

根据牛顿第二定律，两相各自的运动方程式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_c \alpha_c V_{ci}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_c \alpha_c V_{ci} V_{cj}) \\ = R_{dc} V_{di} - R_{cd} V_{ci} + \rho_c \alpha_c g_i - \frac{\partial p_c}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{cij}}{\partial x_j} + F_{dci} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_d \alpha_d V_{di}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_d \alpha_d V_{di} V_{dj}) \\ = R_{cd} V_{ci} - R_{dc} V_{di} + \rho_d \alpha_d g_i - \frac{\partial p_d}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{dij}}{\partial x_j} + F_{cdi} \end{aligned} \quad (2.5)$$

根据能量守恒定律，两相各自的能量方程式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(e_c + \frac{1}{2} V_{cj} V_{cj} \right) \rho_c \alpha_c \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(e_c + \frac{1}{2} V_{cj} V_{cj} \right) \rho_c \alpha_c V_{cj} \right] \\ = R_{dc} \left(e_d + \frac{1}{2} V_{dj} V_{dj} \right) - R_{cd} \left(e_c + \frac{1}{2} V_{cj} V_{cj} \right) + \rho_c \alpha_c g_j V_{cj} \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} (p_c V_{cj}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{cij} V_{ci}) + F_{dcj} V_{cj} - \frac{\partial}{\partial x_j} q_{cj} + q_{dc} + Q_c \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(e_d + \frac{1}{2} V_{dj} V_{dj} \right) \rho_d \alpha_d \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(e_d + \frac{1}{2} V_{dk} V_{dk} \right) \rho_d \alpha_d V_{dj} \right] \\ & = R_{cd} \left(e_c + \frac{1}{2} V_{cj} V_{cj} \right) - R_{dc} \left(e_d + \frac{1}{2} V_{dj} V_{dj} \right) + \rho_d \alpha_d g_j V_{dj} \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial x_j} (p_d V_{dj}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{dij} V_{dj}) + F_{cdi} V_{dj} - \frac{\partial}{\partial x_j} (q_{dj}) + q_{cd} + Q_d \quad (2.7) \end{aligned}$$

式中各符号说明如下:

下标: c 代表连续相; d 代表分散相; 量: ρ 为密度; α 为某相的体积分数; V_i 为速度; p 为压力; σ_{ij} 为压力之外的应力分量; g_i 为重力加速度; Q_i 为单位体积内生成热; e 为单位质量的内能; R_{dc} 为单体体积中由分散相转变为连续相的质量生成率; R_{cd} 为单位体积中由连续相转变为分散相的质量生成率; F_{cdi} 为连续相作用在分散相上的力; F_{dci} 为分散相对连续相的反作用力; q_{dc} 为分散相传递给连续相的热量; q_{cd} 为连续相传递给分散相的热量; q_i 为热流。

另外, α_i 满足

$$\alpha_c + \alpha_d = 1 \quad (2.8)$$

相间作用力服从牛顿第三定律, 即

$$F_{dci} + F_{cdi} = 0 \quad (2.9)$$

以及相间传递的结余热量满足能量守恒定律, 即

$$q_{cd} + q_{dc} = 0 \quad (2.10)$$

要使方程组(2.2)~(2.10)能够封闭, 需要引入一系列的辅助关系式。

2.3 密相下两相之间的相互作用力

首先考虑单个分散相颗粒所受连续相的作用力。单个分散相颗粒可用圆球近似地代表, 分散相颗粒受连续相作用的情形, 类似于圆球在由不可压缩流体所构成的相当大的流场中运动受力的情形。

设流体原流场的流速和压力分别为 V_{ci} 和 p_c , 半径为 a 的小球 (a 远小于流场流动的线性尺度) 在流场中产生的扰动速度和扰动压力分别为 $V_{ci}^{(1)}$ 和 $p_c^{(1)}$ 。此时, 在小球面上有 $V_{ci} + V_{ci}^{(1)} = V_{di}$ 。由此可以通过近似计算 (参见文献 [3]) 得到流体对小球的作用力在一定的近似条件下为

$$f_i = f_i^{(1)} + f_i^{(1)} \quad (2.11)$$

其中

$$\begin{aligned} f_i^{(1)} &= \iiint \left[\mu_c \left(\frac{\partial V_{ci}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{cj}}{\partial x_i} \right) - p_c \delta_{ij} \right] n_j dS \\ &\approx \frac{4}{3} \pi a^3 \left(\mu_c \nabla^2 V_{ci} - \frac{\partial p_c}{\partial x_i} \right) = \frac{4}{3} \pi a^3 \left(\rho_c \frac{dV_{ci}}{dt} - \rho_c g_i \right) \quad (2.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_i^{(1)} &= \iiint \left[\mu_c \left(\frac{\partial V_{ci}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{cj}^{(1)}}{\partial x_i} \right) - p_c^{(1)} \delta_{ij} \right] n_j dS \\ &\approx \frac{2}{3} \pi a^3 \rho_c \left(\frac{dV_{ci}}{dt} - \frac{dV_{di}}{dt} \right) + \pi a^3 \mu_c \nabla^2 V_{ci} + \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_c R_i \quad (2.13) \end{aligned}$$

其中在线性近似下的阻力项 R_i 为

$$\frac{4}{3} \pi a^3 \rho_c R_i = 6\pi \mu_c a \left[(V_{ci} - V_{di}) + \frac{a}{\sqrt{\pi} V_c} \int_0^t \frac{dV_{ci}/dt - dV_{di}/dt}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right] \quad (2.14)$$

在非线性情形下阻力项 R_i 可取

$$\frac{4}{3} \pi a^3 \rho_o R_i = C_D (Re) \rho_o |V_{oi} - V_{di}| (V_{oi} - V_{di}) (4\pi a^2) \quad (2.15)$$

其中 C_D 为阻力系数, Re 为雷诺数, $v_o = \mu_o / \rho_o$.

两相之间的相互作用力是连续相与分散相颗粒群之间的相互作用力。在颗粒群中单颗粒所受的连续相作用力将受到粒子间相互作用的影响, 这种影响是分散相浓度的高阶小量^[4]。在分散相浓度极稀时, 除了考虑颗粒形状因子和浓度的微小因素之外, 式(2.11)将近似地代表颗粒群所受流体的作用力。然而, 在分散相浓度较高时, 用式(2.11)近似代表相间作用力就必须加以某种修正。现在, 把上列表达式(2.11)中的各项分别乘以适当的修正因子来表示这种修正, 则连续相与分散相颗粒微团之间的相互作用力为

$$\begin{aligned} F_{oai} = -F_{doi} = & \alpha_a \left(\mu_o \nabla^2 V_{ci} - \frac{\partial p_o}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} k_1 \rho_o \alpha_a \left(\frac{dV_{ci}}{dt} - \frac{dV_{di}}{dt} \right) \\ & + \frac{3}{4} k_2 \alpha_a \mu_o \nabla^2 V_{ci} + \alpha_a \rho_o R_i \end{aligned} \quad (2.16)$$

在式(2.16)第二个等号的右边中, 第一项为假想流场中拿去这些颗粒时, 在空出的球表面所受连续相作用的粘性应力和压力, 相当于原场流体加速度项和浮力项对作用力的贡献, 这一项没有修正系数; 第二项为附加质量力的贡献, 修正系数为 k_1 ; 第三项为在颗粒被引入流场时, 流场速度不均匀所产生的作用力的贡献, 修正系数为 k_2 ; 第四项为连续相和分散相颗粒群之间的相对所产生的阻力的贡献, 在浓度较高时, 这一项可以写成 $(9/2)k\alpha_a(\mu_o/a^2)(V_{ci} - V_{di})$ 或者当相对速度较大时再加上有关的相对速度的平方项, 修正系数为 k 。总之, 修正系数 k_1 , k_2 和 k 是用来考虑形状因子和浓度的影响的; 式(2.16)中, V_{di} 代表空间某点上单位体积内颗粒的平均速度(即质心速度), 与单个球情形下代表圆球中心的运动速度在概念上是有一定差别的。

2.4 密相下的本构关系

我们假设牛顿流体的应力和应变关系仍然能够适用于连续相的流动情形。分散相颗粒的性质和连续相分子的性质有很大的不同。密相下, 颗粒层与层之间相互摩擦, 除了两层相压的正应力之外, 颗粒之间还有摩擦剪应力。这种摩擦剪应力在两层开始相对滑动之前其绝对值小于极限摩擦剪应力, 即小于摩擦系数乘上正应力, 此时, 颗粒只能作整体运动。管道密相流动的情形和在松散体力学和土力学中的相对静止情形都属于这一类。在颗粒层与层之间开始滑动之后, 按照摩擦力具有的特殊性质, 两层之间不仅有一个和正压力成正比的极限摩擦剪应力, 还有和颗粒相的速度梯度有关的摩擦剪应力, 这个与分散相速度梯度有关的部分最简单的就是和速度梯度成正比。这种情形, 就是通常的宾汉流体的应力表达式。摩擦剪应力的极限值相当于宾汉流体的极限应力 τ_B 。只有当分散相的剪应力超过这些由于颗粒之间摩擦力形成的整体结构所能承受的极限剪应力的时候, 分散相各层之间才会发生相对滑移。

我们现在假设分散相的本构关系满足宾汉流体的本构关系, 即

$$\sigma_{dij} = \mu_a \left(\frac{\partial V_{di}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{dj}}{\partial x_i} \right) + \left(K_a - \frac{2}{3} \mu_a \right) \frac{\partial V_{da}}{\partial x_a} \delta_{ij} + \eta p_a \frac{e_{ij}}{e} \quad (2.17)$$

其中

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\partial V_{a_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{a_j}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_{a\alpha}}{\partial x_\alpha} \delta_{ij} \right) + \beta \left(\frac{\partial V_{a\alpha}}{\partial x_\alpha} \delta_{ij} \right) \quad (2.18)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial V_{a_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{a_j}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_{a\alpha}}{\partial x_\alpha} \delta_{ij} \right)^2 + 3\beta^2 \left(\frac{\partial V_{a\alpha}}{\partial x_\alpha} \right)^2} \quad (2.19)$$

K_a 为分散相体积粘性系数, β 为参数, η 为两层之间的摩擦系数, p_a 为分散相的压力, 极限应力 $\tau_B = \eta p_a$.

分散相的压力 p_a 在密相下可以仿照液体分子运动论或密相气体分子运动论的方法^[5]表示出来, 即分散相的状态方程有

$$p_a = \alpha_a \rho_a \sigma^2 - \alpha_a^2 \frac{V}{\alpha_a^3} U \quad (2.20)$$

其中 σ 为颗粒的均方根速度, V 为颗粒的有效碰撞体积, U 为颗粒的平均势能.

分散相的粘性系数 μ_a 可以仿照气体的分子运动论^[6]引入为

$$\mu_a = \frac{1}{3} k' n m c l = \frac{\sqrt{2}}{18} k' \rho_a \alpha \sigma \quad (2.21)$$

其中 k' 为修正系数, n 为颗粒的数密度, m 为单颗粒的平均质量, l 为颗粒的平均自由程.

2.5 封闭性

方程组(2.2)~(2.10)有了引入的辅助关系式(2.16)和(2.17)~(2.21)之后, 若再加上相应的和稀相下类似的状态方程和传热关系式, 则方程组的个数和未知函数的数目可以相等, 这样就得到了可解的封闭方程组. 根据具体问题, 提出相应的初始条件和边界条件, 就可以求出确定的解.

在密相两相流动中, 连续相的速度在壁面处仍可采用无滑移的边界条件, 但是, 让分散相速度在壁面处的值为零显然是不够合理的. 我们认为在固壁处颗粒存在一定的滑移速度, 由于滑移速度的具体值是和壁面的粗糙程度等壁面状态有关系, 所以, 用分散相在壁面处的剪应力作为替代条件, 无疑是较为合适的. 假定壁面是硬的固体壁面, 那公分散相颗粒的垂直宏观平均速度等于零. 下一节我们将以理论力学的摩擦碰撞原理给出分散相在壁面处剪应力的表达式.

前面我们已经采用了宾汉体的本构关系. 若分散相应力没有达到极限应力 τ_B , 则宾汉体本构关系失效, 此时, 外加力所产生的应力和颗粒之间的摩擦力的作用互相平衡, 分散相形成所谓的本构关系不能明确表达成和形变有关量的塞流结构. 这样, 分散相中会出现宾汉流和塞流的衔接问题^[7]. 在两个区域的衔接处, 两相各自的速度和速度梯度是连续的, 因此, 方程组仍然能够封闭.

三、分散相在壁面处剪应力的表达式

由于颗粒在固壁表面明显有滑移, 所以切向速度为零(即无滑移条件)是不合理的. 因此改用给出两个切向应力来代替两个滑移速度为零的条件. 不失一般性, 我们只求某一个方向的剪应力.

仿照气体分子运动论, 假设颗粒速度和位置的分布函数 f 满足玻氏积分微分方程, 即

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (\vec{F} f) = \Delta f \quad (3.1)$$

其中 \vec{F} 为外力, \vec{r} 为颗粒的空间坐标, \vec{v} 为颗粒的运动速度, Δf 为颗粒碰撞引起的 f 的变化。采用逐步逼近法求解方程(3.1)可以得到 f 的零级近似 $f^{(0)}$, 一级近似 $f^{(1)}$, 二级近似 $f^{(2)}$, ...。密相下, 为简单起见, 除墙壁上平均滑移速度以外, f 用零级近似 $f^{(0)}$ 来替代。

假设壁面为静止的, 略去颗粒在碰撞瞬间由于滚动所产生的误差。同时假定颗粒与壁面的碰撞次数是足够大的, 且碰撞在壁面上的分布是均匀的。暂不考虑壁面平均滑移速度为零的特殊情形。取坐标系 z 轴垂直壁面向上为正。单位时间内作用在壁面上的颗粒数与 $|w|$ 成正比, w 为颗粒运动速度在 z 轴上的分量。以下分两种情形考虑颗粒与壁面的碰撞, 用 e' 表示碰撞时的恢复系数, η' 表示颗粒和壁面的摩擦系数, m' 为颗粒的有效质量。

(1) 具有 x 轴速度分量 $u > 0$ 的颗粒撞击壁面表面 dS 所产生的剪应力 $\tau^{(1)}$ 如图1所示。在这种情况下, 颗粒和壁面碰撞之后, 能够从整面反弹出来的颗粒对剪应力的贡献为

$$\tau_1 = \int_{-\infty}^0 dw \int_{(1+e')\eta'|w|}^{+\infty} [m'\eta'(1+e')|w|] \cdot f \cdot |w| du \quad (3.2)$$

由于滑动摩擦作用的结果而被完全吸收在壁面上的颗粒对剪应力的贡献为

$$\tau_2 = \int_{-\infty}^0 dw \int_0^{\eta'(1+e')|w|} m'u \cdot f \cdot |w| du \quad (3.3)$$

因此, 能够产生的剪应力为

$$\tau^{(1)} = \tau_1 + \tau_2 \quad (3.4)$$

(2) 具有 x 轴速度分量 $u < 0$ 的颗粒撞击壁面表面 dS 所产生的剪应力 $\tau^{(2)}$ 如图2所示。在这种情形下, 颗粒与壁面碰撞之后, 能够反弹出壁面的颗粒对产生剪应力的贡献为

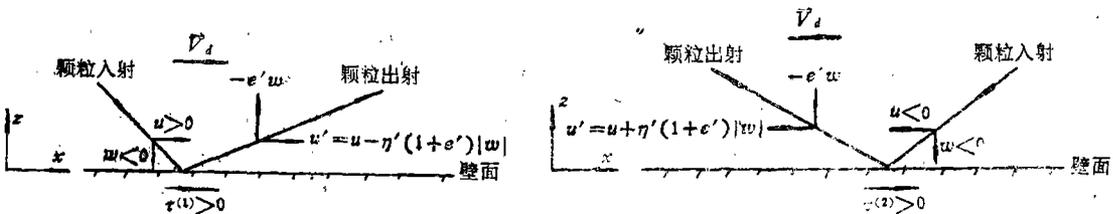


图 1

图 2

$$\tau_3 = \int_{-\infty}^0 dw \int_{-\eta'(1+e')|w|}^{-\infty} [-m'\eta'(1+e')|w|] \cdot f \cdot |w| du \quad (3.5)$$

由于滑动摩擦作用而被完全吸收在壁面上的颗粒对产生剪应力的贡献为

$$\tau_4 = \int_{-\infty}^0 dw \int_{-\eta'(1+e')|w|}^0 (-m'u) \cdot f \cdot |w| du \quad (3.6)$$

因此, 能够产生的剪应力为

$$\tau^{(2)} = \tau_3 + \tau_4 \quad (3.7)$$

最后可得分散相在壁面处产生的剪应力为

$$\tau(>0) = \tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - \tau_4 \quad (3.8)$$

其方向沿 x 轴负向。

在连续相阻尼的作用下, 颗粒碰撞壁面时的动量将会减小, 我们用有效质量 m' 来描述

这一效应, 且假定有效质量 $m' = (4/3)\pi\alpha^3(\rho_d - (1/2)k''\rho_c)$, 其中 k'' 为无量纲的修正系数. 我们假定 $f^{(0)}$ 满足高斯正态分布, 即

$$f^{(0)} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \frac{\alpha_d}{(4/3)\pi\alpha^3} \exp\left[-\frac{(u-V_d)^2}{2\sigma^2} - \frac{w^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.9)$$

并用 $f^{(0)}$ 近似替代式(3.8)中的 f .

$$\text{若令} \quad x'^2 = \left[\frac{u-V_d}{\sqrt{2}\sigma}\right]^2, \quad y'^2 = \left[\frac{w}{\sqrt{2}\sigma}\right]^2$$

则式(3.8)可以写成

$$\tau = C^* \alpha_d \left(\rho_d - \frac{1}{2} k'' \rho_c\right) \sigma^2 \quad (3.10)$$

其中

$$C^* = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 \exp(-y'^2) dy' \left[\int_{-\eta'(1+e')y'-(V_d/\sqrt{2}\sigma)}^{\infty} \eta'(1+e')y'^2 \exp(-x'^2) dx' \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{-\infty}^{\eta'(1+e')y'-(V_d/\sqrt{2}\sigma)} \eta'(1+e')y'^2 \exp(-x'^2) dx' \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{-\eta'(1+e')y'-(V_d/\sqrt{2}\sigma)}^{\infty} \left(x' + \frac{V_d}{\sqrt{2}\sigma}\right) y' \exp(-x'^2) dx' \right] \right\} \quad (3.11)$$

当 $V_d \gg \sigma$ 时, $C^* \approx \eta'(1+e')/2$, 式(3.10)有

$$\tau = \frac{1}{2} \eta'(1+e') \alpha_d \left(\rho_d - \frac{1}{2} k'' \rho_c\right) \sigma^2 \quad (3.12)$$

这时剪应力的方向和壁面滑移速度的方向相反.

由此, 原来三个速度分量为零的条件, 现在用一个法向速度为零和给出两个剪切应力所代替. 但必须注意, 当 V_d 接近于零时, 需要考虑 $f^{(1)}$, 否则, 式(3.10)将得到 $\tau=0$. 另外, 这时的边界条件又将恢复到用固壁上三个速度分量为零的条件了.

四、结 语

通过以上这样处理的密相多相流动的基本方程式, 在连续相为不可压缩的条件下, 就已经封闭. 进一步的工作就是求解特殊问题, 我们将另文发表^[8].

参 考 文 献

- [1] Crowe, C. T., Review—Numerical models for dilute gas-particle flows, *Journal of Fluids Engineering*, **104** (1982), 297—303.
- [2] 蔡树棠、范正翔、陈越南, 两相流基本方程, *应用数学和力学*, **7**, 6 (1985), 477—485.
- [3] 蔡树棠, 泥沙在动水中的沉淀运动 I, *物理学报*, **13**, 5 (1957), 388—398.
- [4] 蔡树棠, 泥沙在静水中的沉淀运动 I, *物理学报*, **12**, 5 (1956), 402—408.
- [5] Green, H. S., *The Molecular Theory of Fluids*, Amsterdam (1952).
- [6] 王竹溪, 《统计物理学导论》, 人民教育出版社 (1979).
- [7] 蔡树棠、蒋贻安, 宾汉流体与塞流的衔接问题, *应用数学和力学*, **8**, 3 (1987), 193—198.
- [8] 林多敏、蔡树棠, 密两相流的数学模型在管道流动中的应用 (待发表).
- [9] 林多敏, 密相流动的本构关系和边界条件及其在圆管流动中的应用, 中国科学技术大学硕士论文 (1987).

A Closed System of Equations for Dense Two-Phase Flow and Expressions of Shearing Stress of Dispersed Phase at a Wall

Lin Duo-min

(Shanghai Institute of Applied Math. and Mech., Shanghai)

Tsai Shu-tang

*(Dept. of Modern Mech., Univ. of Sci. and Tech. of China, Hefei;
Shanghai Institute of Applied Math. and Mech., Shanghai)*

Abstract

In this paper, each of the two phases in dense two-phase flow is considered as continuous medium and the fundamental equations for two-phase flow are described in Eulerian form. The generalized constitutive relation of the Bingham fluid is applied to the dispersed phase with the analysis of physical mechanism of dense two-phase flow. The shearing stress of dispersed phase at a wall is used to give a boundary condition. Then a mathematical model for dense two-phase flow is obtained. In addition, the expressions of shearing stress of dispersed phase at a wall is derived according to the fundamental model of the frictional collision between dispersed-phase particles and the wall.