应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 03_0228_05

动态裂纹积分变换法中的数学问题*

边文凤[1], 王 彪[2], 贾宝贤[1]

(1. 哈尔滨工业大学 汽车学院, 山东威海 264209;
2. 哈尔滨工业大学 复合材料研究所和光电信息中心, 哈尔滨 150001)

(我刊编委王彪来稿)

摘要: 引入势函数, 形成运动微分方程, 对运动微分方程和各种响应进行 Laplace 变换及 Fourier 正弦、余弦变换, 最后求解由边界条件形成的对偶方程——这种研究动态裂纹的方法已经被广泛使用并成为比较系统的方法• 以一种模型为例, 对其推演过程进行了研究, 最后发现: 此方法在数学推演时, 存在着不严密的问题, 推演结果带有偶然性, 不具可信性•

关 键 词: 势函数; 积分变换; 动态裂纹; 对偶方程
中图分类号: O346.11 文献标识码: A

引 言

近年来, 各种材料的动态损伤和断裂行为研究非常活跃• 积分变换方法已经是比较系统的方法, 各向同性材料的研究已经早有专著, Shindo 等[1] 用积分变换方法研究了均匀电场作用下压电介质中有限长裂纹对垂直入射的瞬态纵波的散射, Li[2,3] 研究了压电介质中半无限扩展裂纹的反平面瞬态响应, Chen[4,5] 用积分变换方法研究了压电材料中的反平面运动裂纹和有限长裂纹的反平面冲击问题• 作者也想借此方法来研究压电介质的动态断裂问题, 在使用中发现:“积分方程的核函数的积分发散”• 于是, 对此方法重新进行了推演, 发现, 原数学推演中, 有不严密问题, 现在提出, 望使用此方法者注意•

下面仅以一种模型为例, 指出其问题所在•

1 冲击载荷下无限平面上的有限尺寸 I 型裂纹问题

取无限平面为 xoy 平面, 忽略体积力影响, 只考虑惯性力作用• 引入Lame 势函数 $\varphi(x, y, t)$、$\psi(x, y, t)$, 设位移函数为:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{1}$$

由 Hooke 定律得应力分量:

* 收稿日期: 2002_10_29; 修订日期: 2003_10_20
作者简介: 边文凤(1963—), 女, 黑龙江肇东人, 副教授, 博士(联系人. Tel: 86_631_5687026(o), 86_631_5687556(h); E_mail: bianwf@yahoo.com.cn)•

$$
\begin{cases}
\sigma_{xx} = \lambda\nabla^2\varphi + 2\mu\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right), \\
\sigma_{yy} = \lambda\nabla^2\varphi + 2\mu\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right), \\
\sigma_{xy} = \mu\left(2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right),
\end{cases}
\tag{2}
$$

其中 $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, 于是得由势函数 $\varphi(x, y, t)$ 和 $\psi(x, y, t)$ 表示的波动方程:

$$
\nabla^2\varphi = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\psi = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},
\tag{3}
$$

式中 c_1、c_2 分别为纵波与横波速度•

对于 I 型裂纹问题: 设裂纹位于 x 轴上, 长 $L = 2a$, 中心在坐标原点• 假设介质在无限远处不受载荷作用, 而在裂纹上下表面同时受冲击载荷作用• 由于对称, 只需研究 1/4 平面即可• 其边界条件可写为

$$
\begin{cases}
\sigma_{yy}(x, 0, t) = -\sigma_0\mathrm{H}(t) \quad (0 \leqslant x < a,\ t > 0), \\
u_y(x, 0, t) = 0 \quad (a < x < \infty,\ t > 0), \\
\sigma_{xy}(x, 0, t) = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty,\ t > 0), \\
\sigma_{ij}(x, y, t) \to 0,\ \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty,\ t > 0,
\end{cases}
\tag{4}
$$

式中, $\mathrm{H}(t)$ 为 Heaviside 单位阶跃函数• 假定物体初始时静止, 则初始条件为

$$
u_j(x, y, 0) = \dot{u}_j(x, y, 0) = 0 •
\tag{5}
$$

对微分方程组(3) 作 Laplace 变换, 并考虑初始条件, 得

$$
\nabla^2\varphi^* = \frac{1}{c_1^2}p^2\varphi^*, \quad \nabla^2\psi^* = \frac{1}{c_2^2}p^2\psi^* •
\tag{6}
$$

则势函数具有如下性质:

$$
\varphi(x, y, t) = \varphi(-x, y, t), \quad \psi(x, y, t) = -\psi(-x, y, t),
$$

考虑到这一特点, 分别对方程组(6) 中的方程作关于“ x ”的 Fourier 余弦变换和 Fourier 正弦变换有:

$$
\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2} - s^2\varphi^* = \frac{1}{c_1^2}p^2\varphi^*, \quad \frac{\partial^2\psi^*}{\partial y^2} - s^2\psi^* = \frac{1}{c_1^2}p^2\psi^* •
\tag{7}
$$

由式(7) 得满足无限远处边界条件的 φ^* 和 ψ^*:

$$
\varphi^*(s, y, p) = A_1(s, p)\exp(-\gamma_1 y),
$$

$$
\psi^*(s, y, p) = A_2(s, p)\exp(-\gamma_2 y),
$$

式中 $\gamma_j = \sqrt{s^2 + (p/c_j)^2}$, 待定函数 $A_j(s, p)$ 由其余的边界条件确定•

求式(7) 中的 Fourier 象函数的原函数有

$$
\begin{cases}
\varphi^*(x, y, p) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty A_1(s, p)\exp(-\gamma_1 y)\cos(sx)\,\mathrm{d}s, \\
\psi^*(x, y, p) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty A_2(s, p)\exp(-\gamma_2 y)\sin(sx)\,\mathrm{d}s •
\end{cases}
\tag{8}
$$

对边界条件作 Laplace 变换有

$$\sigma_{yy}^*(x,0,p)=-\sigma_0/p,\quad \sigma_{xy}^*(x,0,p)=0\qquad(0<x<a),$$
$$u_y^*(x,0,p)=0,\quad \sigma_{xy}^*(x,0,p)=0\qquad(x>a)\cdot$$

对式(1)、(2)作 Laplace 变换,并将式(8)代入,得 Laplace 变换域下的位移及应力分量• 由边界条件 $\sigma_{xy}^*(x,0,p)=0,0\leqslant x<\infty$ 得: $2\gamma_1 sA_1(s,p)=-(s^2+\gamma_2^2)A_2(s,p)$, 设

$$\begin{cases}A_1(s,p)=-\dfrac{(s^2+\gamma_2^2)}{2\gamma_1}A(s,p),\\ A_2(s,p)=sA(s,p)\cdot\end{cases}\tag{9}$$

由边界条件 $u_y^*(x,0,p)=0\ (x>a)$ 和 $\sigma_{yy}^*(x,0,p)=-\sigma_0/p\ (0<x<a)$ 有

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty A(s,p)\cos(sx)\,\mathrm{d}s=0\qquad(x>0),\\ \displaystyle\int_0^\infty sf(s,p)A(s,p)\cos(sx)\,\mathrm{d}s=\frac{\pi\sigma_0c_2^2}{2\mu p^3(1-k^2)}\qquad(0<x<a),\end{cases}\tag{10}$$

其中, $f(s,p)=(2\gamma_1 s(1-k^2))^{-1}\left\{[s^2+\gamma_2^2]^2-4s^2\gamma_1\gamma_2\right\}(c_2/p)^2$, $k=\sqrt{c_2/c_1}$• 至此, 问题的求解归结为确定满足对偶积分方程组(10)的 $A(s,p)$ 问题• 设:

$$A(s,p)=\frac{\pi\sigma_0a^2c_2^2}{2\mu p^3(1-k^2)}\int_0^1\sqrt{\xi}\,\Phi_1^*(\xi,p)J_0(sa\xi)\,\mathrm{d}\xi,\tag{11}$$

则,将式(11)代入方程组(10),第一式自然满足,第二式变为 Fredholm 积分方程:

$$\Phi_1^*(\xi,p)+\int_0^1[K_1(\xi,\eta,p)\Phi_1^*(\eta,p)]\,\mathrm{d}\eta=\sigma_0\sqrt{\xi},\tag{12}$$

式中,积分方程的核为: $K_1(\xi,\eta,p)=\sqrt{\xi\eta}\int_0^\infty s[f(s/a,p)-1]J_0(sa\xi)J_0(sa\eta)\,\mathrm{d}s$, 求解积分方程(12)后,即可进一步计算应力强度因子•

2 上述方法存在的两个数学问题

作者研究发现,上述研究方法中,存在着如下两个问题:

1) 积分方程的核: $K_1(\xi,\eta,p)=\sqrt{\xi\eta}\int_0^\infty s[f(s/a,p)-1]J_0(sa\xi)J_0(sa\eta)\,\mathrm{d}s$ 不存在• 因为当"s"很大时,有下列诸式成立•

$$J_n(s)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\cos\left(s-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right),\tag{13}$$

而 γ_j 可近似地表示为:

$$\gamma_j=s+\frac{1}{2s}\left(\frac{p}{c_j}\right)+o(s^{-3}),\tag{14}$$

$$\lim_{s\to\infty}f(s,p)=1+k^2,\tag{15}$$

$$\lim_{s\to\infty}\left\{s\left[f\left(\frac{s}{a},p\right)-1\right]J_0(sa\xi)J_0(sa\eta)\right\}=$$
$$\lim_{s\to\infty}\left\{sk^2\sqrt{\frac{2}{\pi sa\xi}}\cos\left(sa\xi-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi sa\eta}}\cos\left(sa\eta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=$$
$$\lim_{s\to\infty}\left\{\frac{2k^2}{a\pi}\sqrt{\frac{1}{\xi\eta}}\cos\left(sa\xi-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(sa\eta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\cdot$$

由此可见,核函数的被积函数不收敛,即: $\lim_{s\to\infty}K_1(\xi,\eta,p)\to\infty$, 核函数不存在,积分方程(12)

也就无从求解了•

2) 从式(10)到式(12)的推演中, 用到了 Bessel 函数的一些性质•

将 $\cos(sx) = \sqrt{\pi x s/2}\,J_{-1/2}(sx)$ 和式(11)代入到对偶积分方程组(10)有如下对偶积分方程组

$$\begin{cases} \int_0^\infty \left[\int_0^1 \sqrt{\xi}\,\Phi_1^*(\xi,p)\,J_0(sa\xi)\,\mathrm{d}\xi\right](\sqrt{s}J_{-1/2}(sx))\,\mathrm{d}s = 0 & (x > 0), \\ \int_0^\infty s^{3/2} f(s,p)\left[a^2\int_0^1 \sqrt{\xi}\,\Phi_1^*(\xi,p)\,J_0(sa\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]J_{-1/2}(sx)\,\mathrm{d}s = 1 & \\ & (0 < x < a). \end{cases} \tag{16}$$

根据 Bessel 函数的微分公式 $\mathrm{d}[z^{-\nu}J_\nu(z)]/\mathrm{d}z = -z^{-\nu}J_{\nu+1}(z)$ 对(13)中的 $\left[\int_0^1 \sqrt{\xi}\,\Phi_1^*(\xi,p)\,J_0(sa\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]$ 进行分部积分, 有:

$$\int_0^1 \sqrt{\xi}\,\Phi_1^*(\xi,p)\,J_0(sa\xi)\,\mathrm{d}\xi = \Phi_1^*(1,p)\,J_{-1}sa + \int_0^1 \xi J_{-1}(sa\xi)\,\mathrm{d}\left(\frac{\Phi_1^*(\xi,p)}{\sqrt{\xi}}\right). \tag{17}$$

将式(17)式代入式(16), 并应用 Bessel 函数的间断积分公式:

$$\begin{cases} \int_0^\infty J_\lambda(r\xi)J_\mu(b\xi)\,\xi^{1+\mu-\lambda}\mathrm{d}\xi = 0 & (0 < r < b), \\ \int_0^\infty J_\lambda(r\xi)J_\mu(b\xi)\,\xi^{1+\mu-\lambda}\mathrm{d}\xi = \dfrac{b^\mu(r^2-b^2)^{\lambda-\mu-1}}{2^{\lambda-\mu-1}r^\lambda\Gamma(\lambda-\mu)} & (0 < b < r), \end{cases} \tag{18}$$

式中, $\Gamma(z)$ 为 Γ 函数, 并要求 $\lambda > \mu > -1$; 且 $r = b$ 时, $\lambda > \mu > 0$• 而在式(17)代入式(16)的运算中, 与式(18)相应的 $\lambda = 1/2$, $\mu = -1$, 而不是 $\mu > -1$, 在 $r = b$ 时, 更不满足 $\lambda > \mu > 0$•

同时, 运算时, 还应用到 Abel 型积分方程及其反演公式:

$$\begin{cases} f(r) = \dfrac{2^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}r^{-\nu}\int_0^r \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[r^{\nu+\alpha+1}\phi(t)]\,\dfrac{\mathrm{d}t}{(r^2-t^2)^{1-\alpha}} & (0 < x < 1), \\ \phi(t) = \dfrac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}r^{1-\nu-\alpha}\int_0^t \dfrac{r^{1+\nu}f(r)\,\mathrm{d}r}{(t^2-r^2)^{1-\alpha}} & (0 < \xi < 1), \end{cases} \tag{19}$$

式(19)要求 $\lambda > \alpha$, 并且 $0 < \alpha < 1$• 而在式(17)代入式(16)的运算中, 与式(19)相应的 $\lambda = -1/2$, $\alpha = 1/2$, 恰好是 $\lambda = \alpha$, 而不是 $\lambda > \alpha$•

经过如上凑合的推演后, 勉强得到积分方程(12)式• 这样得到的结果是不可能是有可信与正确性的• 积分方程(12)式无法求解也就是理所当然的了•

3 结　语

以上可见, "动态裂纹积分变换法分析"是存在问题的• 在数学推演中, 是不严密的• "真理超出它的适用范围, 就是谬论"• 应注意数学推演的严密性•

致谢　本课题得到哈尔滨工业大学交叉学科发展基金资助(HIT. MD. 2000. 35), 在此表示衷心感谢•

[参 考 文 献]

[1] Shindo Y, Katsure H, Yan W. Dynamic stress intensity factor of a cracked dielectric medium in a uniform electric field[J]. Acta Mech, 1996: **117**(1_4): 1—10.

[2] Li S, Mataga P A. Dynamic crack propagation in piezoelectric materials—Part Ⅰ: Electrode solution [J]. J Mech Phys Solids, 1996, **44**(11): 1799—1830.

[3] Li S, Mataga P A. Dynamic crack propagation in piezoelectric materials—Part Ⅱ: Vacuum solution [J]. J Mech Phys Solids, 1996, **44**(11): 1831—1866.

[4] Chen Z T, Yu S W. Anti_plane Yoffe crack problem in piezoelectric materials[J]. Int J Fractrue, 1997, **84**(3): L41—L45.

[5] Chen Z T, Karihaloo B L. Dynamic response of a cracked piezoelectric ceramic under arbitrary eleetro_mechanical impact[J]. Int J Solids Struct, 1999, **36**(3): 5125—5133.

[6] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 科学出版社, 1979.

[7] 范天佑. 断裂动力学引论[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1990.

[8] Busbridge I W. Proc London Math Soc, 1838, **44**: 115—124.

[9] HOU Mi_shan, MEI Fu_liang. Problems of antiplane strain of electrically permeable cracks between bonded dissimilar piezoelectric materials[J]. Chinese Science Bulletin, 1998, **43**(4): 341.

[10] Freund L B. Dynamic Fracture Mechanics[M]. Cambridge: Cambrideg Press, 1990.

Mathematical Problems in the Integral_Transformation Method of Dynamic Crack

BIAN Wen_feng[1], WANG Biao[2], JIA Bao_xian[1]

(1. Automobile Institute, Harbin Institute of Technology, Weihai, Shandong 264209, P.R.China;

2. Center for Composite Materials and Electro_Optics Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P.R.China)

Abstract: In the investigation on fracture mechanics, the potential function was introduced, and the moving differential equation was constructed. By making Laplace and Fourier transformation as well as sine and cosine transformation to moving differential equations and various responses, the dual equation which is constructed from boundary conditions lastly was solved. This method of investigating dynamic crack has become a more systematic one that is used widely. Some problems are encountered when the dynamic crack is studied. After the large investigation on the problems, it is discovered that during the process of mathematic derivation, the method is short of precision, and the derived results in this method are accidental and have no credibility. A model for example is taken to explain the problems existing in initial deriving process of the integral_transformation method of dynamic crack.

Key words: potential function; integral transform; dynamic crack; dual equation