

# 浅球薄壳轴对称极凹陷的非轴 对称的动力不稳定性\*

云天铨

(华南理工大学工程力学系, 1988年6月10日收到)

## 摘 要

当壳厚-升高比 $\epsilon^2 \ll 1$ 时, 由二次型载荷产生的轴对称极凹陷的浅球薄壳是动力不稳定的, 微小的扰动足以使它变成非轴对称凹陷。在两种情形下, 问题都可归结为特征值问题 $T w_n = c_n w_n$ , 其中 $T$ 当 $\epsilon^2 \ll 1$ 时近似为一 Sturm-Liouville 算子。本文用谱理论和 Hilbert 定理均可证明 $T$ 至少存在一实的特征值; 它意味着轴对称极凹陷是动力不稳定的。再进一步, 本文还找出代表不稳定凹陷壳体的非轴对称变形的、属于一特征值的 $T$ 的特征函数。

## 一、概 述

浅球薄壳在轴对称的集中力和均布载荷作用下的非轴对称屈曲已有数值分析<sup>[1~4]</sup>和实验<sup>[5~6]</sup>来研究过。这些结果表明了如壳的厚度小于某一临界值, 在低于折断屈曲 (Snap-buckling) 所需的载荷作用下将出现非轴对称屈曲。但是, 浅球薄壳在承受如图 1 所示的二次型轴对称压力分布 (这种情形在宇航燃料容器, 充液薄壳, 生物细胞等会遇到) 下引起的轴对称极凹陷出现非轴对称屈曲的可能性的, 用比基于数值法更深刻的方法去分析研究工作似乎还未见有出版。本文对于二次压力分布下具有小的壳厚-升高比 $\epsilon^2$ 的浅球薄壳引起的轴对称极凹陷上出现非轴对称的动力不稳定性存在性用 Hilbert 定理或者紧自共轭线性算子的谱定理提供理论上的证明。进一步, 本文还找出非轴对称屈曲型式的解析解。

在二次型轴对称压力分布下浅帽的轴对称有限极凹陷的性态已由 Wan 等<sup>[7~8]</sup>很好地研究过。为了检查这些轴对称凹陷型式的动力稳定性, 在这些凹陷型式上加上带小参数的扰动。扰动系统的稳定性是由在第 2 节中用 Margurre 非线性浅壳理论建立的动态非轴对称的扰动方程的解来判断。在第 3 节中, 用 Hilbert 定理, 也用紧自共轭线性算子的谱定理证明了至少有一实的特征值, 它意味着轴对称的极凹陷型式是动力不稳定的。最后, 在第 4 节中, 还找出一特征值和对应的特征函数。它表明了当壳厚-升高比参数 $\epsilon^2 \ll 1$ 时, 轴对称的极凹陷是不稳定的。它可转变为对整数 $n \geq 2$ 都可能的型如 $a_n x^n \cos(n\theta)$ 的非轴对称型式。

\* 国家自然科学基金资助项目。本文被第17届国际理论和应用力学大会 ICTAM88 接受报告。

## 二、特征值方程的建立

当应用 Margurre 型浅壳弹性动力理论时,在那里假定中面内的惯性力项,转动惯性力项在我们的问题中是可以忽略不计的,浅球薄壳的性态可以用无量纲方程(除了惯性力项外,其余和[4]中的(2.1), (2.2)式是一样的)描述如下:

$$\nabla^4 w - L[z+w, f] = q(x) - bw_{,tt} \quad (2.1)$$

$$\nabla^4 f + L[z+w/2, w] = 0 \quad (2.2)$$

式中  $x$  和  $\theta$  是壳的圆底平面的极坐标,

$$(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial x, (\cdot)^{\circ} = \partial(\cdot)/\partial \theta, (\cdot)_{,tt} = \partial^2(\cdot)/\partial t^2$$

$$L[g, s] = g''(s'/x + \ddot{s}/x^2) + s''(g'/x + \ddot{g}/x^2) - 2(\dot{g}/x)'(\dot{s}/x)'$$

$$\nabla^4(\cdot) = \nabla^2 \nabla^2(\cdot), \nabla^2(\cdot) = (\cdot)'' + (\cdot)'/x + (\cdot)^{\circ\circ}/x^2.$$

无量纲的径向坐标  $x$ , 铅垂挠度  $w$ , 应力函数  $f$ , 载荷  $q$ , 以及惯性项  $b$  和它们的相应的物理变量之间的连系为

$$x = r/r_0, w = (1/2He^2)W, f = (1/4EH^2\varepsilon^4h)F = F/D,$$

$$q(x) = (r_0^3/D\xi_0 e^2)p(x), b = \rho r_0^3 h/D.$$

其中  $r_0$ ,  $H$ , 和  $h$  是壳的底半径, 升高, 和厚度,  $E$  是杨氏模量,  $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ ,  $\varepsilon^2 = hR/\{[12(1-\nu^2)]^{1/2}r_0^2\}$ ,  $\nu$  是 Poisson 比,  $R$  是壳的半径,  $\xi_0 = r_0/R$ , 和  $r_0^2 = 2RH$  为浅球壳近似式,  $z = x^2/2\varepsilon^2$ ,  $p(x) = p_0(1-c^2x^2)$ ,  $p_0$  是二次分布压力的峰值,  $c^2$  (常数)  $> 1$ ,  $\rho$  是质量密度.

对完全固定的壳体, 其边界条件在顶点为正规性条件和在外边缘为固定的条件, 即:

$$x=0, w=w'=f=f'=0 \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} x=1, w=w'=0, \quad f''-\nu(f'+\dot{f})=0 \\ f'''-f'(1-\nu)+(2+\nu)\dot{f}'-3\dot{f}=0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

由二次压力分布引起的轴对称挠度情形, 上述(2.1)~(2.4)式归结为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^2 x(\Phi'' + \Phi'/x - \Phi/x^2) - \Phi\Psi = 4k \int_0^x t p(t) dt \\ \varepsilon^2 x(\Psi'' + \Psi'/x - \Psi/x^2) + (\Phi^2 - x^2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (0 < x < 1) \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

$$x=0, \Phi=0, \Psi=0 \quad (2.7)$$

$$x=1, \Phi=1, \Psi'-\nu\Psi=0 \quad (2.8)$$

式中  $\Phi = \varepsilon^2 w'_d + x$ ,  $\Psi = \varepsilon^2 f'_d$ ,  $k = p_0/p_c$ ,  $p_c$  为古典屈曲载荷,  $p_c = 2Ek^2/[R^2(3(1-\nu^2))^{1/2}]$ . 如[7]所示, 当  $ke = O(1)$  时, (2.5) 式和 (2.6) 式的外部解的首项有如下型式

$$\left. \begin{aligned} w'_d \sim -2x/\varepsilon^2, f'_d \sim kx(2-c^2x^2)/\varepsilon^2 \quad \text{对 } 0 < x < x_T \\ w'_d \sim 0, f'_d \sim -kx(2-c^2x^2)/\varepsilon^2 \quad \text{对 } x_T < x < 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

式中  $x_T$  是无量纲的凹陷底(平面)的半径, 是由下面的条件定出的(见[7, p.305]或[8, p.596])

$$\Psi(x_{T-}) = \Psi(x_{T+}) \quad (2.10)^*$$

\* [7, p.305]的  $\Phi(x_T) = 0$  有误, 对照[8, p.596]应为  $\Psi(x_T) = 0$ .

即由(2.9)式知(见[7, p. 307(3.15)])

$$\Psi(x_T) = 0, \text{ 即 } x_T = \sqrt{2/c} \quad (2.10)'$$

对于 $\varepsilon^2 \rightarrow 0$ 情形, (2.5)式和(2.6)式的解(2.9)式表明在 $(0, x_T)$ 内极凹陷的壳体的子午线的斜率为未变形时的子午线斜率的反号, 而在 $(x_T, 1)$ 内保持原子午线斜率不变.

为了检查这一轴对称极凹陷状态 $(w_d, f_d)$ 的稳定性, 加上带小参数 $\delta$ 的扰动状态 $(w_p, f_p)$ , 使得

$$(w, f) = (w_d, f_d) + \delta(w_p, f_p) \quad (2.11)$$

不失一般性, 我们假设

$$(w_p, f_p) = (w_n(x), f_n(x)) \cos(n\theta) \exp(i\omega_n t) \quad (2.12)$$

将(2.11)式和(2.12)式代入(2.1)式和(2.2)式, 略去 $\delta$ 的高阶项, 我们得

$$A^2 w_n - B f_n - C w_n = k_n w_n \quad (2.13)$$

$$A^2 f_n + B w_n = 0 \quad (2.14)$$

式中算子 $A, B,$ 和 $C$ 是:

$$\left. \begin{aligned} A &= d^2/dx^2 + x^{-1}d/dx - n^2x^{-2} \\ B &= g \cdot x^{-1}d^2/dx^2 + g'(x^{-1}d/dx - n^2x^{-2}) \\ C &= j \cdot x^{-1}d^2/dx^2 + j'(x^{-1}d/dx - n^2x^{-2}) \\ g &= (z + w_d)', \quad j = f_d', \quad k_n = b\omega_n^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

将(2.9)式代入(2.15)式, 得

$$B = \mp(1/\varepsilon^2)A, \quad \varepsilon^2 j = \pm kx(2 - c^2x^2) \quad (\text{对 } x \leq x_T) \quad (2.16)$$

对于两种情况, 我们都可将(2.13)式和(2.14)式合并成一个方程, 也就是: 1, 零不是 $A$ 的特征值情形; 2, 零是 $A$ 的特征值且 $w_n$ 属于 $A$ 的零空间, 也就是 $w_n \in N(A) = \{u | Au = 0\} \neq \phi$ .

如果零不是 $A$ 的特征值, 即,  $Au = 0$ 蕴含 $u = 0$ 对所有 $u$ , 或者 $N(A) = \phi$ , 那末将(2.16)式代入(2.14)式, 得

$$A f_n \mp (1/\varepsilon^2) w_n = 0 \quad (\text{对 } x \leq x_T) \quad (2.17)$$

将(2.16)式, (2.17)式代入(2.13)式, 对 $\varepsilon^2 \ll M = k\varepsilon \ll \varepsilon^{-1}$ , (对 $k$ 相当广的范围, (2.9)式都成立, 见[7, p. 305]), 我们有

$$T w_n = c_n w_n \quad (2.18)$$

式中算子

$$T = \varepsilon^4 A^2 + \varepsilon Q \quad (2.19)$$

$$c_n = \varepsilon^4 k_n = \rho R^2 \omega_n^2 / (E r_0) \quad (2.20)$$

$$Q = j_1 x^{-1} d^2/dx^2 + j_1' (x^{-1} d/dx - n^2 x^{-2}) + 1/\varepsilon \quad (2.21)$$

$$j_1 = \begin{cases} -Mx(2 - c^2x^2) & (0 < x < x_T) \\ Mx(2 - c^2x^2) & (x_T < x < 1) \end{cases} \quad (2.22)$$

如果零是 $A$ 的特征值且 $w_n \in N(A) \neq \phi$ , 将(2.16)式代入(2.14)式, 得

$$A f_n \mp (1/\varepsilon^2) w_n = w_n \quad (x \leq x_T) \quad (2.23)$$

将(2.16)式, (2.23)式代入(2.13)式, 对 $k\varepsilon = M$ , 我们有

$$T_1 w_n = c_n w_n \quad (2.24)$$

式中算子

$$T_1 = \varepsilon^4 A^2 + \varepsilon Q_1 \quad (2.25)$$

$$Q_1 = j_1 x^{-1} d^2/dx^2 + j_1' (x^{-1} d/dx - n^2 x^{-2}) + (1 + \varepsilon^2)/\varepsilon \quad (2.26)$$

现在, 我们的问题(2.13)式和(2.14)式已对上述两种情形分别归结为一个特征值方程(2.18)式或(2.24)式。当 $\varepsilon^2 \ll 1$ 时, (2.18)式或(2.24)式近似地变为:

$$\varepsilon Q w_n = c_n w_n \quad (2.27)$$

其相应的边界条件变为

$$w_n(0) = w_n'(0) = w_n(1) = w_n'(1) = 0 \quad (2.28)$$

如 $c_n$ 是实的, 则由(2.20)式,  $\omega_n^2$ 是实的。且若 $c_n$  (实)  $< 0$ , 由(2.20)式,  $\omega_n = g_n i$  ( $g_n$ 为常数)。若 $g_n < 0$ , 则由(2.12)式, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,  $(w_r, f_r) \rightarrow \infty$ 。这是一不稳定情形。若 $g_n > 0$ , 则当 $t \rightarrow \infty$ 时,  $(w_r, f_r) \rightarrow 0$ 。这是一稳定情形。然而,  $g_n$ 的符号是由扰动方程(2.12)式的初始条件决定的。例如

$$w_r(x, \theta, 0) = \delta w_n(x) \cos(n\theta)$$

$$w_{r,t}(x, \theta, 0) = -\delta g_n w_n(x) \cos(n\theta)$$

等, 因为扰动是可以任意选择的, 所以, 不能排除选取 $w_r(x, \theta, 0)$ 和 $w_{r,t}(x, \theta, 0)$ 使得 $g_n$ 是负号, 也就是得到不稳定情形是可能的。因此,  $c_n$  (实)  $< 0$ 表示是不稳定的。若 $c_n$  (实)  $> 0$ , 则由(2.20)式,  $\omega_n = h_n$  ( $h_n$ 为实常数), 且 $(w_r, f_r)$ 由(2.12)式知都是复值函数。这意味着 $w_r$ 和 $f_r$ 有虚部, 其物理意义为 $w_r$ 和 $f_r$ 是虚的, 亦即没有实非零解。因此,  $c_n$  (实)  $> 0$ 意味着是稳定的情形。

若令

$$Q_0 = Q - 1/\varepsilon, \quad \alpha_n = c_n - 1 \quad (2.29)$$

则(2.27)式写成:

$$\varepsilon Q_0 w_n = \alpha_n w_n \quad (2.30)$$

根据(2.22)式 $j_1$ 在 $(0, x_T)$ 和 $(x_T, 1)$ 区间内是反号的。那末, (2.30)式如若存在有特征值 $\alpha_n$  (实), 则它必在 $(0, x_T)$ 和 $(x_T, 1)$ 反号。若 $\alpha_n$  (实)  $< -1$  (即 $c_n$  (实)  $< 0$ ) 发生在 $(0, x_T)$  (或者 $(x_T, 1)$ ), 那末 $\alpha_n$ 在 $(x_T, 1)$  (或者 $(0, x_T)$ ) 大于1。说明了若在 $(0, x_T)$  (或者 $(x_T, 1)$ ) 内壳是不稳定的, 则在 $(x_T, 1)$  (或者 $(0, x_T)$ ) 是稳定的。

### 三、(2.30) 式存在有实的特征值的证明

若有一矢量 $u (\neq 0) \in D(T)$ , 使得 $Tu = cu$ , 则称数 $c$ 为算子 $T$ 的特征值,  $u$ 称为属于特征值 $c$ 的算子 $T$ 的特征矢量。有许多定理是关于各种空间中的种种算子的特征值问题的。但是, 对于我们的情形, 一高阶的微分算子(2.19)式的 $T$ 或(2.25)式的 $T_1$ , 是很难直接用这些定理去证明(2.18)式或(2.24)式存在有实的特征值的。处理特征值问题的另一个有效的途径是将问题转变为积分方程, 因为在许多方面, 积分算子有着比微分算子更好的性质。但是, 直接将(2.18)式或(2.24)式转变为积分方程也是很困难的。因此, 我们研究算子 $T$ 和 $T_1$ 的结构, 发现当 $\varepsilon^2 \ll 1$ 时, 可以忽略 $\varepsilon^4$ 项, 从而使 $T$ 和 $T_1$ 均变成(2.30)式的算子 $\varepsilon Q_0$ , 它是一个 Sturm-Liouville (S-L) 算子。而一个 S-L 特征值问题可以转换成一个等价的, 具有紧的自共轭线性积分算子的积分方程。利用紧的自共轭线性算子的谱定理, 或者用 Hilbert 定理, 我们都可以证明它存在有一个实的特征值。下面, 我们首先列出 S-L 特征值问题的一些已知的结果的综述; 其次, 我们表明 $\varepsilon Q_0$ 是一个 S-L 算子; 然后, 用谱定理证明它至少存在一个实的特征值。最后, 我们再较详细地将(2.30)式化为积分方程, 并用 Hilbert 定理证明它至少

存在一个实的特征值。

令  $Su = \alpha u$  为  $-S-L$  特征值方程, 其中  $\alpha$  是一参数,  $S$  是在区间  $[a, b]$  上定义的空间  $\mathcal{D}$  的  $S-L$  算子<sup>[9]</sup>

$$S = [1/r(x)] \{d[p(x)d/dx]/dx + q(x)\} \quad (3.1)$$

式中假定  $p(x) > 0$ ,  $r(x) > 0$ , 且  $p, p', q$  和  $r$  均连续。  $\mathcal{D} = B \cap C^2[a, b, r]$ ,  $B$  是满足  $S-L$  系统的边界条件 (对我们情形为 (2.28) 式) 的函数的集合,  $C^2[a, b, r]$  是矢量空间  $C^2[a, b]$  带内积为

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)r(x)dx$$

假定零不是  $S$  的特征值 (如若不是这样, 我们在  $S-L$  方程的两边加上  $k_1 r(x)u$ , 选择合适的  $k_1$  总可使假设成立)。定义算子  $\Gamma$  为

$$(\Gamma u)(x) = \int_a^b g(x; y)u(y)r(y)dy$$

式中  $g$  是对于算子  $S_1$  ( $S_1$  定义与 (3.1) 式中的  $S$  一样, 但其中  $r(x) \equiv 1$ ) 的 Green 函数。由 [9, p. 46, 229, 245~250], 我们有:

- 1, 存在有一对称的  $g(x, y)$  且  $S-L$  方程等价于积分方程  $u = \alpha \Gamma u$ ;
- 2, 令  $\Gamma^*$  为  $\Gamma$  到  $L_2$  的延拓, 则  $\Gamma^*$  是紧且自共轭的;
- 3,  $\Gamma^* u = \alpha^{-1} u$  及  $u \neq 0$ ,  $\alpha \neq 0$  蕴含  $Su = \alpha u$ 。

现在, 我们来表明 (2.30) 式中的算子  $\varepsilon Q_0$  是一  $S-L$  算子, 因为

$$\varepsilon Q_0 = \varepsilon \{d[j_2 d/dx]/dx - j_2' n^2 x^{-1}\} / x \quad (3.2)$$

式中  $j_2 = -Mx(2 - c^2 x^2)$ , ( $0 < x < 1$ ,  $x \neq x_T$ ) 和 (3.1) 式比较, 可得  $r(x) = \varepsilon/x > 0$ ,  $p(x) = j_2 > 0$  (对  $0 < x < x_T$  及  $x_T < x < 1$ ),  $p' = j_2'$ , 和  $q(x) = -j_2' n^2 x^{-1}$  皆是连续的。

根据一谱定理 ([9, p. 241] 定理 9.2: 若  $A$  是一紧的自共轭线性算子, 则它有一特征值等于  $\|A\|$  和  $-\|A\|$ ), 我们有:  $\Gamma^*$  有一特征值等于  $\|\Gamma^*\|$  或  $-\|\Gamma^*\|$ 。因此,  $\varepsilon Q_0$  有一特征值等于  $1/\|\Gamma^*\|$  或  $-1/\|\Gamma^*\|$ 。因为算子的范数定义为实的, 所以  $\varepsilon Q_0$  (至少) 有一实的特征值  $\alpha_n = \pm 1/\|\Gamma^*\|$ 。

这个结果, 也可以用 Hilbert 定理来证明。

首先, 较详细地看 (2.30) 式是怎样化为积分方程的。 (2.30) 式写成:

$$\left( \frac{d}{dx} j_2(x) \frac{d}{dx} \right) w_n(x) = \pm \alpha_n y(x, \alpha_n) w_n(x) \quad (x \leq x_T) \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{式中} \quad j_2(x) &= -Mx(2 - c^2 x^2) \\ y(x, \alpha_n) &= j_2'(x) n^2 (\alpha_n x)^{-1} + x(\varepsilon)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

将 (3.3) 式积分两次, 应用边界条件 (2.28) 以及 Dirichlet 变换 [10, p. 8], 得:

$$\begin{aligned} w_n(x) &= \alpha_n \int_a^x \frac{1}{j_2(t)} \int_a^t y(u, \alpha_n) w_n(u) du dt \\ &= \alpha_n \int_a^x \left[ \int_u^x \frac{dt}{j_2(t)} \right] y(u, \alpha_n) w_n(u) du \quad (0 < a < x < x_T) \end{aligned} \quad (3.5a)$$

式中  $a$  是 0 附近的一点, 在此采用  $w_n(a) = w_n'(a) = 0$  来代替  $w_n(0) = w_n'(0) = 0$ , 以避免  $j_2^{-1}(0)$

和 $y(0, \alpha_n)$ 的奇异性。

同样地在 $x_T < x < 1$ 。将(3.3)式积分两次得:

$$\begin{aligned} w_n(x) &= -\alpha_n \int_x^1 \frac{1}{j_2(t)} \int_t^1 y(u, \alpha_n) w_n(u) du dt \\ &= -\alpha_n \int_x^1 \left[ \int_x^u \frac{dt}{j_2(t)} \right] y(u, \alpha_n) w_n(u) du \\ &= \alpha_n \int_x^1 \left[ \int_u^x \frac{dt}{j_2(t)} \right] y(u, \alpha_n) w_n(u) du \quad (x_T < x < 1) \end{aligned} \quad (3.5b)$$

将(3.5a)式和(3.5b)式合并写成:

$$w_n(x) = \alpha_n \int_a^1 N(x, u) y(u, \alpha_n) w_n(u) du \quad (x \neq x_T) \quad (3.5)$$

式中的核

$$\begin{aligned} N(x, u) &= H(x-u) \int_u^x \frac{dt}{j_2(t)} + H(u-x) \int_x^u \frac{dt}{j_2(t)} \\ &= N(u, x) \end{aligned} \quad (3.6)$$

是一对称核,  $H(\ )$  是 Heaviside 函数。

利用 E. Schmidt 方法[10, p.152], 即令  $v(x) = \sqrt{|y(x, \alpha_n)|} w_n(x)$ , 可将积分方程(3.5)化为具对称核的积分方程

$$v(x) = \alpha_n \int_a^1 K(x, u) v(u) du \quad (x \neq x_T) \quad (3.7)$$

式中核  $K(x, u) = N(x, u) \sqrt{|y(u, \alpha_n) y(x, \alpha_n)|} = K(u, x)$ 。

根据 Hilbert 定理([10, p.122]; 每一个非零范数的对称核至少有一特征值) 以及一定理(对称核的特征值是实的), 我们有:  $\varepsilon Q_0$  至少有一实的特征值。

又因  $K(x, u)$  不是退化核, 据[10, p.132]的系, 它有无穷个特征值, 且若按其绝对值大小排列, 即  $|\alpha_i| \leq |\alpha_{i+1}|$ , 有  $|\alpha_i| \rightarrow \infty$ , 当  $i \rightarrow \infty$  (见[10, p.128])。因此, 在  $(0, x_T)$  内或者在  $(x_T, 1)$  内总会有特征值  $\alpha_n < -1$ 。也就是由(2.29)式知有  $c_n < 0$ 。即存在有不稳定情形。

#### 四、(2.30) 式的一个特征值和相应的特征函数

现在, 基于分析数值计算结果, 我们给出(2.30)式的一个精确的解析解。

##### 定理 1

$$\left. \begin{aligned} w_n(x) &= a_n x^n, \quad f_n(x) = b_n x^{n+2} \quad (0 < x < x_T) \\ w_n(x) &= 0, \quad f_n(x) = 0 \quad (x_T < x < 1) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

满足(2.30)式和边界条件(2.28)式。 $f_n$ 也满足(2.23)式。式中  $a_n$  是任意常数,  $n$  是一正整数,

$$\left. \begin{aligned} a_n &= -2sc^2 n(n-1)M, \quad \text{或 } c_n = 1 - 2ec^2 n(n-1)M \\ b_n &= a_n(1+c^2)/[4(n+1)c^2] \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

证明 将(4.1), (4.2)式直接代入(2.30)式, (2.23)式即可获得结论。边界条件(2.28)式, 显然是满足的。□

根据定理1, 当  $c_n = 1 - 2ec^2n(n-1)M < 0$ , 轴对称的极凹陷壳体将是不稳定的, 它将变为  $a_n x^n \cos(n\theta)$  ( $n \geq 2$ ) 的非轴对称的凹陷型式如图2所示。当然, 定理1并非概括所有的可能凹陷的型式, 它只是其中的一种。亦足以说明轴对称的极凹陷是动力不稳定的。

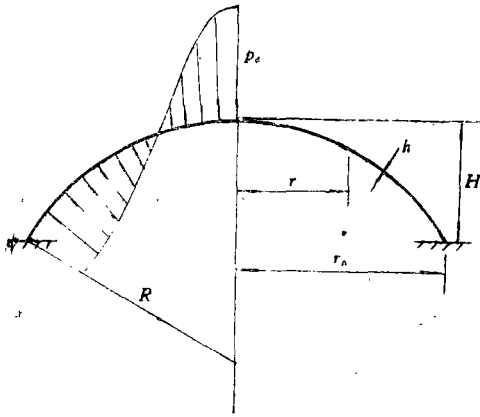


图 1

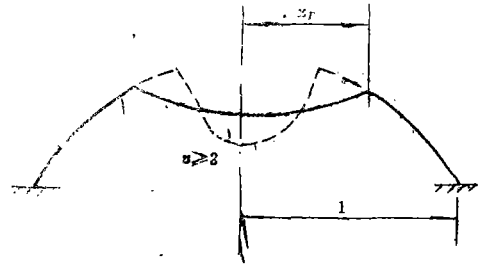


图2 不稳定状态(虚线)示意图  $n=3$  情形

### 参 考 文 献

- [1] Huang, N. C., Unsymmetrical buckling of thin shallow shells, *J. of Appl. Mech.*, 31 (1964), 447.
- [2] Bushnell, D., Bifurcation phenomena in spherical shells under concentrated and ring loads, *AIAA J.*, 5 (1967), 2034—2040.
- [3] Fitch, J., The buckling and postbuckling behavior of spherical caps under concentrated load, *Int. J. of Solids and Structures*, 4 (1968), 421—466.
- [4] Fitch, J. and B. Budiansky, Buckling and postbuckling behavior of spherical caps under axisymmetric load, *AIAA J.*, 8 (1970), 686—693.
- [5] Evan-Iwanowski, R. M., H. S. Cheng and T. C. Loo, Experimental investigation on deformations and stability of spherical shell subjected to concentrated loads at the apex, *Proc. of 4th U. S. National Congress of Appl. Mech.*, (1962), 563.
- [6] Penning, F. A., Nonaxisymmetric behavior of shallow shells loaded at the apex, *J. of Appl. Mech.*, 33 (1966), 699.
- [7] Parker, D. F. and F. Y. M., Wan, Finite polar dimpling of shallow caps under sub-buckling axisymmetric pressure distributions, *SIAM J. of Appl. Math.*, 44 (1984), 301—326.
- [8] Wan, F. Y. M., Polar dimpling of complete spherical shells, *Theory of Shells*, W. T. Koiter and G. K. Mikhailov, eds. (1980), 589—605.
- [9] Griffel, D. H., *Applied Functional Analysis*, John Wiley and Sons, New York (1981), 229—230, 245—250.
- [10] Pogorzelski, W., *Integral Equations and Their Applications*, Vol.1, Pergamon Press, PNN-Polish Scientific Publishers (1966), 122, 152.

## Asymmetric Dynamic Instability of Axisymmetric Polar Dimpling of Thin Shallow Spherical Shells

Yun Tian-quan

(Department of Mechanics, South China University of Technology, Guangzhou)

### Abstract

If the parameter  $e^2$ , which measures the thickness-to-rise of the shell, is small, the axisymmetric polar dimpling of shallow spherical shell due to quadratic distribution is dynamic instability, i. e., a small perturbation can change it to an asymmetric polar dimple mode. In two cases, the problem can be reduced to an eigenvalue problem  $Tw_n = c_n w_n$ , where  $T$  can approximately be reduced to a Sturm-Liouville operator if  $e^2 \ll 1$ . The existence of at least one real eigenvalue of  $T$ , which means that the axisymmetric polar dimpling is dynamically unstable, is proved by spectral theorem or Hilbert theorem. Furthermore, an eigenfunction, which represents one of the asymmetric modes of the unstable dimple shell, belonging to an eigenvalue of  $T$ , is found.