

一般空间7R机构的运动分析*

陈惟荣 卢醒庸

(上海第二工业大学, 1988年11月23日收到)

摘 要

本文对一般空间7R机构进行位移、速度和加速度分析。在文[2]所述方法的基础上, 导出输入输出16次代数方程, 推导和计算比较简便。文中利用人工智能语言确定位移方程的系数, 大大减轻人工劳动量。此外, 在位移分析的基础上进行速度和加速度分析。文末以数字实例验证了计算结果。本文和文[5]的结果, 为进一步应用人工智能语言, 建立空间机构运动分析专家系统打下了基础。

一、前 言

一般空间7R机构的运动分析, 包括位移、速度和加速度分析, 是单环单自由度空间连杆机构分析最复杂、最困难的问题。关于一般空间7R机构的位移分析, 文[1]导出了输入输出32次代数方程, 文[2]提出一种简化方法, 文[3, 4]导出输入输出16次代数方程。但文[3]中推导相当繁复, 其中应用酉交矩阵, 不为一般科技工作者所熟悉; 文[4]中方程的推导仍较繁, 其中应用对偶数和对偶矢量, 消元需进行16阶矩阵的求逆运算。本文在[2]所述方法的基础上, 应用熟知的数学工具——矩阵和矢量, 导出输入输出16次代数方程。利用文中的引理, 位移方程组中最复杂的三个方程(2.6)和(2.10a, b)的系数可直接根据其它方程求出。无须重新进行推导, 从而使推导简化。文中利用分块矩阵运算进行消元, 只需进行8阶矩阵的求逆运算, 使计算工作量减轻。此外, 文中利用人工智能语言(LISP语言)用计算机推导位移方程各系数的计算式, 和人工推导结果一致, 但劳动量大大减轻。关于一般空间7R机构的速度、加速度分析, 目前尚未见文献报导。本文简捷地导出各方向余弦的一阶、二阶导数的计算式, 据此在位移分析的基础上, 进行速度和加速度分析。本文的方法可用于其它空间机构的运动分析; 本文和文[5]的结果为进一步应用人工智能语言, 建立空间机构运动分析专家系统打下了基础。

图1所示为一般空间7R机构的平面示意图, 其中杆3为机架, θ_2 为输入角, θ_3 为输出角。本文的符号除特别说明者外, 均沿用文[2]所用符号, 所取坐标系亦和[2]相同。

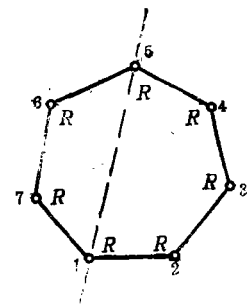


图 1

* 郭仲衡推荐。

为简化位移方程的推导, 首先给出以下引理.

引理 设 a_1, a_2, \dots, a_6 是常数, i 为任意整数, 则

$$E = a_1 s_i^2 + a_2 c_i^2 + a_3 s_i c_i + a_4 s_i + a_5 c_i + a_6 \quad (1.1)$$

是 s_i 和 c_i 的线性函数的必要与充分条件是:

$$a_3 = 0, \quad a_1 = a_2$$

充分性是显然的. 下面证明必要性.

设 E 是 s_i 和 c_i 的线性函数, 则显然有:

$$a_1 s_i^2 + a_2 c_i^2 + a_3 s_i c_i = (b_1 x_i^2 + b_2 x_i + b_3) / (1 + x_i^2)$$

式中, b_1, b_2, b_3 为常数, $x_i = \operatorname{tg} \theta_i / 2$. 用

$$s_i = 2x_i / (1 + x_i^2), \quad c_i = (1 - x_i^2) / (1 + x_i^2)$$

代入上式左边, 经整理后再比较方程两边的系数, 得

$$a_2 = b_1 \quad (1.2)$$

$$-2a_3 = b_2 \quad (1.3)$$

$$4a_1 - 2a_2 = b_1 + b_3 \quad (1.4)$$

$$2a_3 = b_2 \quad (1.5)$$

$$a_2 = b_3 \quad (1.6)$$

由(1.3)和(1.5)得: $a_3 = 0$, 再由(1.2)、(1.4)和(1.6)得: $a_1 = a_2$. 证毕.

二、7R机构的位移分析

1. 基本位移方程组

基本位移方程组包括避开两个中间转角的位移方程. 拆离 RRRR 杆组 (如图 1 虚线所示), 由文[2, 5]知, 其约束方程为 (杆 8 即杆 1):

$$Z_{2,4} = Z_{67} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=3}^5 l_j W_{2,j-1} + \sum_{j=3}^4 h_j Z_{2,j-1} + h_7 c_{71} + h_1 + h_2 c_{12} \\ & = -(l_6 X_{67} + l_7 X_7 + h_5 Z_{67} + h_6 Z_7) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^4 l_j X_{j,4} + \sum_{j=2}^3 h_j Z_{j+1,4} + h_4 c_{46} + h_5 + h_6 c_{66} \\ & = -\sum_{j=7}^8 (l_j W_{6,j-1} + h_j Z_{6,j-1}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^4 [l_j (G_{2,j-1} Z_{j+1,4} - Z_{2,j-1} Y_{j,4}) + h_j (W_{2,j-1} Y_{j,4} - G_{2,j-1} X_{j,4})] + l_6 G_{2,4} \\ & = \sum_{j=6}^7 [l_j (G_{6,j-1} Z_{j+1,7} - Z_{6,j-1} Y_{j,7}) + h_j (W_{6,j-1} Y_{j,7} - G_{6,j-1} X_{j,7})] + l_1 G_{67} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=2}^4 \sum_{n=m+1}^5 l_m l_n U_{m,n-1} + \sum_{m=2}^3 \sum_{n=m+1}^4 (l_m h_n X_{m,n-1} \\ & \quad + h_m l_{n+1} W_{m+1,n}) + h_2 h_4 Z_3 + K_1 \\ & = \sum_{m=0}^7 \sum_{n=m+1}^8 [l_m (l_n U_{m,n-1} + h_n X_{m,n-1}) \\ & \quad + h_{m-1} (l_n W_{m,n-1} + h_n Z_{m,n-1})] \end{aligned} \tag{2.5}$$

式中,

$$\begin{aligned} K_1 = 0.5 \left(\sum_{j=2}^5 l_j^2 + \sum_{j=2}^4 h_j^2 - \sum_{j=0}^8 l_j^2 - \sum_{j=0}^8 h_j^2 \right) \\ + \sum_{j=2}^3 h_j h_{j+1} c_{j,j+1} - \sum_{j=0}^7 h_j h_{j+1} c_{j,j+1} \end{aligned}$$

文[2]中第六个位移方程可写为:

$$r^1 \cdot k_6 = k_6 \cdot r^1 \tag{2.6}$$

式中 $r^1 = 0.5(R^1)^2 k_1 - (k_1 \cdot R^1) R^1$, $r^1 = 0.5(R^1)^2 k_8 - (R^1 \cdot k_8) R^1$

$$R^1 = \sum_{j=2}^5 l_j i_j + \sum_{j=2}^4 h_j k_j, \quad R^1 = -\sum_{j=0}^8 l_j i_j - \sum_{j=0}^8 h_j k_j$$

文[2]中用利 Lagrange 恒等式证明: 式(2.6)是 $s_i, c_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 的线性函数。该式可由(2.1)和(2.5)、(2.2)和(2.3)相乘然后相减得出, 利用上述引理, 即可求出该方程的系数, 不必重新推导。

2. 补充位移方程组

补充位移方程组包括避开一个中间转角, 并只含另一转角的半角正切的一次式的位移方程。设R为任意矢量, m为整数。按文[2]中所取坐标系及[6]中的坐标系变换式知:

$$R^{(m)} = K_{\theta_m} R^{(m+1)*}$$

故

$$R \cdot i_m = i_{m+1} \cdot R c_m - j_{m+1*} \cdot R s_m, \quad R \cdot j_m = i_{m+1} \cdot R s_m + j_{m+1*} \cdot R c_m$$

利用文[2]中式(1-6), 可将以上两式化为:

$$R \cdot i_m + x_m R \cdot j_m = i_{m+1} \cdot R - x_m j_{m+1*} \cdot R, \quad R \cdot j_m - x_m R \cdot i_m = j_{m+1*} \cdot R + x_m i_{m+1} \cdot R$$

以上两式即[4]中的半角方程。令其中 $m=5$, 并分别以 $k_1(k_8), R^1(R^1), R^1 \times k_1(R^1 \times k_8)$ 和 $r^1(r^1)$ 代替左(右)边的R, 再利用文[2]中的标积和混合积公式, 即得以下8个补充位移方程:

$$\left. \begin{aligned} W_{2,4} + x_5 G_{2,4} &= X_{67} - x_5 Y_{67}^* \\ G_{2,4} - x_5 W_{2,4} &= Y_{67}^* + x_5 X_{67} \end{aligned} \right\} \tag{2.7a, b}$$

$$\left. \begin{aligned} R^1 \cdot i_6 + x_5 R^1 \cdot j_5 &= i_6 \cdot R^1 - x_5 j_{6*} \cdot R^1 \\ R^1 \cdot j_5 - x_5 R^1 \cdot i_6 &= j_{6*} \cdot R^1 + x_5 i_6 \cdot R^1 \end{aligned} \right\} \tag{2.8a, b}$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{R}^I, \mathbf{k}_1, \mathbf{i}_5) + \alpha_5(\mathbf{R}^I, \mathbf{k}_1, \mathbf{j}_5) &= (\mathbf{i}_5, \mathbf{R}^I, \mathbf{k}_5) - \alpha_5(\mathbf{j}_{5*}, \mathbf{R}^I, \mathbf{k}_5) \\ (\mathbf{R}^I, \mathbf{k}_1, \mathbf{j}_5) - \alpha_5(\mathbf{R}^I, \mathbf{k}_1, \mathbf{i}_5) &= (\mathbf{j}_{5*}, \mathbf{R}^I, \mathbf{k}_5) + \alpha_5(\mathbf{i}_5, \mathbf{R}^I, \mathbf{k}_5) \end{aligned} \right\} \quad (2.9a, b)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}^I \cdot \mathbf{i}_5 + \alpha_5 \mathbf{r}^I \cdot \mathbf{j}_5 &= \mathbf{i}_5 \cdot \mathbf{r}^I - \alpha_5 \mathbf{j}_{5*} \cdot \mathbf{r}^I \\ \mathbf{r}^I \cdot \mathbf{j}_5 - \alpha_5 \mathbf{r}^I \cdot \mathbf{i}_5 &= \mathbf{j}_{5*} \cdot \mathbf{r}^I + \alpha_5 \mathbf{i}_5 \cdot \mathbf{r}^I \end{aligned} \right\} \quad (2.10a, b)$$

式中

$$\mathbf{R}^I \cdot \mathbf{i}_5 = \sum_{j=2}^4 l_j U_{j,4} + \sum_{j=2}^3 h_j W_{j+1,4} + l_5$$

$$\mathbf{R}^I \cdot \mathbf{j}_5 = \sum_{j=2}^4 l_j E_{j,4} + \sum_{j=2}^3 h_j G_{j+1,4} + h_4 s_{45}$$

$$\mathbf{i}_5 \cdot \mathbf{R}^I = -(l_7 c_5 + l_1 U_{57} + h_7 X_5 + h_1 X_{57} + l_5)$$

$$\mathbf{j}_{5*} \cdot \mathbf{R}^I = -(l_7 V_5^* + l_1 V_{57}^* + h_7 Y_5^* + h_1 Y_{57}^* - h_5 s_{55})$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}^I, \mathbf{k}_1, \mathbf{i}_5) &= \sum_{j=2}^4 [l_j (G_{2,j-1} W_{j+1,4} - Z_{2,j-1} V_{j,4}) \\ &\quad + h_j (W_{2,j-1} V_{j,4} - G_{2,j-1} U_{j,4})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}^I, \mathbf{k}_1, \mathbf{j}_5) &= \sum_{j=2}^4 [l_j (G_{2,j-1} G_{j+1,4} - Z_{2,j-1} F_{j,4}) \\ &\quad + h_j (W_{2,j-1} F_{j,4} - G_{2,j-1} E_{j,4})] - l_5 Z_{2,4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{i}_5, \mathbf{R}^I, \mathbf{k}_5) &= E_5 (l_7 c_{71} - h_7 X_7) + (h_7 c_5 - l_7 X_5) Y_7 \\ &\quad + l_1 E_{57} + (h_5 c_{55} + h_5) Y_{57} - h_5 s_{55} Z_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{j}_{5*}, \mathbf{R}^I, \mathbf{k}_5) &= l_5 (c_{55} Z_7 + s_{55} Y_{57}) + F_5^* (l_7 c_{71} - h_7 X_7) \\ &\quad + (h_7 V_5^* - l_7 Y_5^*) Y_7 + l_1 F_{57}^* - (h_5 + h_5 c_{55}) X_{57} \end{aligned}$$

类似于(2.6), 利用 Lagrange 恒等式可以证明, 式(2.10a, b)是 s_i, c_i 的线性函数。该两组方程可由前面相应两组方程相乘, 然后相减, 再应用引理作交换后得出, 不必重新推导。

(2.1)~(2.10)即所需的全部位移方程式。

3. 输入输出方程的推导

在(2.1)~(2.5)、(2.7)~(2.9)中, 利用方向余弦的递推公式^[2]将 θ_5, θ_7 和 θ_4 分离出来, 连同(2.6)和(2.10a, b), 得一组方程, 写为矩阵形式得:

$$\mathbf{A}\alpha_1 + \mathbf{B}\alpha_2 = \mathbf{D}\beta_1 \quad (2.11)$$

$$(\mathbf{H}'_c + \alpha_5 \mathbf{H}'_s)\alpha_1 + (\mathbf{L}'_c + \alpha_5 \mathbf{L}'_s)\alpha_2 = (\mathbf{M}'_c + \alpha_5 \mathbf{M}'_s)\beta_1 \quad (2.12)$$

$$(\mathbf{H}''_c + \alpha_5 \mathbf{H}''_s)\alpha_1 + (\mathbf{L}''_c + \alpha_5 \mathbf{L}''_s)\alpha_2 = (\mathbf{M}''_c + \alpha_5 \mathbf{M}''_s)\beta_2 \quad (2.13)$$

式中 $\alpha_1 = (s_5 \ c_5 \ s_5 s_7 \ s_5 c_7 \ c_5 s_7 \ c_5 c_7)^T$, $\alpha_2 = (s_7 \ c_7)^T$, $\beta_1 = (s_4 \ c_4 \ 1)^T$

$$D_{ij} = D_{ij}^s s_3 + D_{ij}^c c_3 + D_{ij}^k, \quad M_{ij} = M_{ij}^s s_3 + M_{ij}^c c_3 + M_{ij}^k$$

$D_{ij}^{s,c,k}$ 和 $M_{ij}^{s,c,k}$ 为 s_2, c_2 的线性函数, 其余矩阵元素为常数。A, B, D, H, L, M 分别是 $6 \times 6, 6 \times 2, 6 \times 3, 4 \times 6, 4 \times 2, 4 \times 3$ 矩阵。

从方程组(2.11)~(2.13)中,先消去 θ_6 和 θ_7 ,由(2.11)解出 α_1 ,得:

$$\alpha_1 = A^{-1}(D\beta_1 - B\alpha_2) \quad (2.14)$$

代入(2.12)和(2.13),得:

$$N'\alpha = P'\beta \quad (2.15)$$

$$N''\alpha = P''\beta \quad (2.16)$$

式中 $N' = (H_2^T A^{-1} B - L_2^T \quad H_2^T A^{-1} B - L_2^T)$, $N'' = (H_2^T A^{-1} B - L_2^T \quad H_2^T A^{-1} B - L_2^T)$
 $P' = (H_2^T A^{-1} D - M_2^T \quad H_2^T A^{-1} D - M_2^T)$, $P'' = (H_2^T A^{-1} D - M_2^T \quad H_2^T A^{-1} D - M_2^T)$
 $\alpha = (\alpha_1^T \quad \alpha_2^T)^T$, $\beta = (\beta_1^T \quad \beta_2^T)^T$.

N , P 分别是 4×4 , 4×6 矩阵,其元素分别是常数和 s_3 , c_3 的线性函数.

再由(2.15)解出 α ,得:

$$\alpha = (N')^{-1} P' \beta \quad (2.17)$$

代入(2.16),得:

$$[N''(N')^{-1} P' - P''] \beta = 0 \quad (2.18)$$

将 $s_4 = 2x_4/(1+x_4^2)$, $c_4 = (1-x_4^2)/(1+x_4^2)$ 代入上式,经整理后得以下方程组:

$$(a_j \ddot{x}_4^2 + b_j \dot{x}_4 + c_j) x_6 + d_j x_4^2 + e_j x_4 + f_j = 0 \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (2.19)$$

然后用[7]中的消元法,消去 x_4 , x_6 ,得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c_j & f_j & a_j & b_j & d_j & e_j \\ a_j & d_j & 0 & 0 & b_j & c_j & e_j & f_j \end{vmatrix} = 0 \quad (2.20)$$

上式左边是8阶行列式,其元素是 x_3 的二次函数.将该行列式按 Laplace 定理展开,即得输入输出16次代数方程:

$$\sum_{j=0}^{16} g_j x_3^j = 0 \quad (2.21)$$

4. 中间转角的计算

设给定输入角 θ_2 ,解方程(2.21)可求出输出位移 x_3 .于是, x_4 和 x_6 可按[7]中的方法求出:

$$x_4 = -(C_* E_* - B_* F_*) / (A_* E_* - B_* D_*), \quad x_6 = (C_* D_* - A_* F_*) / (A_* E_* - B_* D_*) \quad (2.22)$$

式中, A_* , B_* , C_* , D_* , E_* , F_* 为四阶行列式(见文[8]).

由(2.17)可求出 s_7 , c_7 ,而

$$x_7 = (1 - c_7) / s_7 = s_7 / (1 + c_7) \quad (2.23)$$

最后, x_6 和 x_1 可按下式计算:

$$x_6 = \frac{X_7 - W_{2,6}}{G_{2,6} + Y_7^*} = \frac{G_{2,6} - Y_7^*}{X_7 + W_{2,6}} \quad (2.24)$$

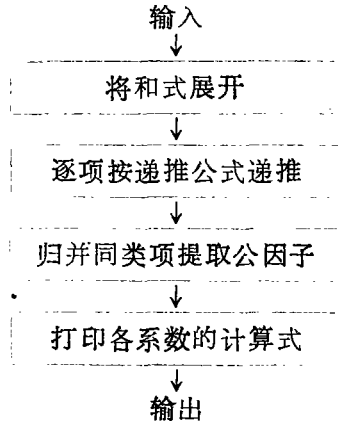
$$x_1 = \frac{X_{2,6} - W_7}{G_7 + Y_{2,6}^*} = \frac{G_7 - Y_{2,6}^*}{X_{2,6} + W_7} \quad (2.25)$$

三、求位移方程系数的智能化程序

如前所述,为把方程(2.1)~(2.9)写为(2.11)~(2.13)的形式,需将和式展开,然后利

用方向余弦的递推公式分离角位移变量,再合并同类项,才能得出各系数矩阵元素的计算式。这些工作如果靠人去做,则不仅耗时较多,而且稍一不慎便容易出错。由于展开、递推和提取公因子等均是符号运算,使用一般计算机语言难以实现。而 LISP 语言具有很强的符号处理能力,用它来编制程序可以方便地实现这些符号运算,而且还能为今后采用人工智能技术建立专家系统进行有益的探索。因而,本文应用宏 LISP 语言编制了一个求位移方程系数的智能化程序。该程序能实现多重和式展开,按要求自动选择左或右递推公式对方向余弦作分离递推,并且提取公因子,导出位移方程各系数的计算式。当需要计算各系数数值时,用户只需输入原始数据,就可计算出各系数的数值。

整个程序的流程如下图所示。



下面以方程(2.4)为例,说明程序的调用过程和格式。方程中的每一项要用表的形式表达,如上式中的 $I_6 G_{2,4}$ 表达为 $((L5)(G24))$,而和式为 $(EXPAND \times \times L2/JL1)$,其中 $\times \times$ 为 \sum 后的式子的表达式,J为求和指标,L1和L2为求和指标的下限和上限,J前的“'”为 LISP 中的禁止求值符。如为双重和式,则可在L1之后再填入第二重求和指标的上限和该指标。方程(2.4)若用 Y_3 表示,则 Y_1 及 Y_2 中出现的变量分别表达如下:

Y_1

$((L J) (G 2 (J \setminus - 1)) (Z (J \setminus + 1) 4)) \setminus - ((L J) (Z 2 (J \setminus - 1)) (Y J 4)) \setminus + ((H J) (W 2 (J \setminus - 1)) (Y J 4)) \setminus - ((H J) (G 2 (J \setminus - 1)) (X J 4))$

Y_2

$((L J) (G 6 (J \setminus - 1)) (Z (J \setminus + 1) 7)) \setminus - ((L J) (Z 6 (J \setminus - 1)) (Y J 7)) \setminus + ((H J) (W 6 (J \setminus - 1)) (Y J 7)) \setminus - ((H J) (G 6 (J \setminus - 1)) (X J 7))$

Y_3

$((EXPAND Y_1 4 (QUOTE J) 2) \setminus + (((L 5) (G 2 4))) = (EXPAND Y_2 7 (QUOTE J) 6) \setminus + (((L 1) (G 6 7))))$

其中“\+”和“\−”分别为 LISP 中的“+”和“−”。为求该方程的系数,用户只需键入)RESULT Y3 2 4 7 2),计算机就会自动输出各系数的计算式。其中,2是所要求的递推深度,4和7分别为方程左边和右边求和指标的上限,最后一个数字表示方程中含最多方向余弦因子的项的因子数。

按上述方法,方程(2.5)的表达和求系数的计算式的过程为:

TT1

$((L M) (L N) (U M (N \setminus - 1)))$

TT2

$((L M) (H N) (X M (N \setminus - 1))) \setminus + ((H M) (L (N \setminus + 1)) (W (M \setminus + 1) N))$

TT3

((L M) (L N) (U M (N \ - 1))) \ + ((L M) (H N) (X M (N \ - 1))) \ + ((H (M \ - 1)) (L N) (W M (N \ - 1))) \ + ((H (M \ - 1)) (H N) (Z M (N \ - 1)))

TT4

((K 1)) \ + ((H 2) (H 4) (Z 3 3)) \ + (EXPAND TT1 5 (QUOTE N) 2 4 (QUOTEM)) \ + (EXPAND TT2 4 (QUOTE N) 2 3 (QUOTE M)) = (EXPAND TT3 8 (QUOTE N) 6 7 (QUOTE M))

在附录中摘录部分用智能化程序求得的系数的计算公式。

通过这一有益的尝试，我们认为，应用人工智能技术进一步深入研究和开发空间机构分析的智能化程序，以至建立空间机构分析和综合的专家系统，是可行而又有意义的工作。

四、7R机构的速度和加速度分析

1. 方向余弦的导数

令 t 表示时间。记 $\dot{U}_{i,k} = dU_{i,k}/dt$ ，等等。则

$$\begin{aligned} \dot{U}_{i,k} &= \frac{d}{dt} (i \cdot i_{k+1}^{(i)}) = i \cdot (\omega_{k+1,i}^{(i)} \times i_{k+1}^{(i)}) \\ &= i \cdot \left(\sum_{j=i}^k \dot{\theta}_j k_j^{(i)} \times i_{k+1}^{(i)} \right) = \sum_{j=i}^k (i_i, k_j, i_{k+1}) \dot{\theta}_j \end{aligned}$$

式中， $\omega_{k+1,i}^{(i)}$ 为坐标系 S_{k+1} 相对于 S_i 的角速度。于是

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{i,k} &= \sum_{j=i}^k (E_{i,j-1} U_{j,k} - U_{i,j-1} V_{j,k}) \dot{\theta}_j \\ \dot{V}_{i,k} &= \sum_{j=i}^k (F_{i,j-1} U_{j,k} - V_{i,j-1} V_{j,k}) \dot{\theta}_j \\ \dot{W}_{i,k} &= \sum_{j=i}^k (G_{i,j-1} U_{j,k} - W_{i,j-1} V_{j,k}) \dot{\theta}_j \\ \dot{V}_{i,k}^* &= \sum_{j=i}^k (F_{i,j-1}^* U_{j,k} - V_{i,j-1}^* V_{j,k}) \dot{\theta}_j \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

同理

上式对 t 求导数，得：

$$\left. \begin{aligned} \ddot{U}_{i,k} &= \sum_{j=i}^k [(E_{i,j-1} U_{j,k} - U_{i,j-1} V_{j,k}) \ddot{\theta}_j + (\dot{E}_{i,j-1} U_{j,k} + E_{i,j-1} \dot{U}_{j,k} - \dot{U}_{i,j-1} V_{j,k} - U_{i,j-1} \dot{V}_{j,k}) \dot{\theta}_j] \\ \ddot{V}_{i,k} &= \sum_{j=i}^k [(F_{i,j-1} U_{j,k} - V_{i,j-1} V_{j,k}) \ddot{\theta}_j + (\dot{F}_{i,j-1} U_{j,k} + F_{i,j-1} \dot{U}_{j,k} - \dot{V}_{i,j-1} V_{j,k} - V_{i,j-1} \dot{V}_{j,k}) \dot{\theta}_j] \\ \ddot{W}_{i,k} &= \sum_{j=i}^k [(G_{i,j-1} U_{j,k} - W_{i,j-1} V_{j,k}) \ddot{\theta}_j + (\dot{G}_{i,j-1} U_{j,k} + G_{i,j-1} \dot{U}_{j,k} - \dot{W}_{i,j-1} V_{j,k} - W_{i,j-1} \dot{V}_{j,k}) \dot{\theta}_j] \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$\dot{V}_{i,k}^* = \sum_{j=1}^k [(F_{i,j-1}^* U_{j,k} - V_{i,j-1}^* V_{j,k}) \ddot{\theta}_j + (\dot{F}_{i,j-1}^* U_{j,k} + F_{i,j-1}^* \dot{U}_{j,k} - \dot{V}_{i,j-1}^* V_{j,k} - V_{i,j-1}^* \dot{V}_{j,k}) \dot{\theta}_j] + [G_{i,j-1} \dot{U}_{j,k} - W_{i,j-1} V_{j,k} - W_{i,j-1} \dot{V}_{j,k}] \dot{\theta}_j$$

将(4.1)和(4.2)中下标含有 k 的方向余弦, 按顺序

$$\begin{array}{ccc} \curvearrowright U \curvearrowright & \curvearrowright V \curvearrowright & \curvearrowright W \curvearrowright \\ X \leftarrow E & Y \leftarrow F & Z \leftarrow G \end{array}$$

轮换, 即得其余两组方向余弦导数的计算式。

2. 速度和加速度分析

为简化推导和计算, 速度和加速度分析应在上述位移分析的基础上进行。在基本位移方程组中, 选取较简单的独立方程, 其数目等于未知量数; 然后将它们对 t 求一阶、二阶导数, 即得速度和加速度方程组。今取四个独立方程(2.1)~(2.3)和(2.5), 对 t 求得:

$$\begin{aligned} s_{12} X_{2,4} \dot{\theta}_2 + \sum_{j=3}^4 (G_{2,j-1} X_{j,4} - W_{2,j-1} Y_{j,4}) \dot{\theta}_j \\ - s_{56} X_{6,7} \dot{\theta}_6 - (G_6 X_7 - W_6 Y_7) \dot{\theta}_7 = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^4 \sum_{n=j+1}^5 l_n (G_{2,j-1} U_{j,n-1} - W_{2,j-1} V_{j,n-1}) \dot{\theta}_j \\ + \sum_{j=2}^3 \sum_{n=j+1}^4 h_n (G_{2,j-1} X_{j,n-1} - W_{2,j-1} Y_{j,n-1}) \dot{\theta}_j \\ + \sum_{j=6}^7 \sum_{n=6}^j [l_n (E_{n,j-1} X_{j,7} - U_{n,j-1} Y_{j,7}) \\ + h_{n-1} (G_{n,j-1} X_{j,7} - W_{n,j-1} Y_{j,7})] \dot{\theta}_j = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} -l_2 Y_{2,4} \dot{\theta}_{42} + \sum_{j=3}^4 \left[\sum_{n=2}^j l_n (E_{n,j-1} X_{j,4} - U_{n,j-1} Y_{j,4}) \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{j-1} h_n (G_{n+1,j-1} X_{j,4} - W_{n+1,j-1} Y_{j,4}) \right] \dot{\theta}_j \\ + \sum_{j=6}^7 \sum_{n=j}^7 [l_{n+1} (G_{6,j-1} U_{j,n} - W_{6,j-1} V_{j,n}) \\ + h_{n+1} (G_{6,j-1} X_{j,n} - W_{6,j-1} Y_{j,n})] \dot{\theta}_j = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\sum_{j=2}^4 \sum_{m=2}^j \sum_{n=j+1}^5 l_m l_n (E_{m,j-1} U_{j,n-1} - U_{m,j-1} V_{j,n-1}) \dot{\theta}_j$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=2}^3 \sum_{m=2}^j \sum_{n=j+1}^4 l_m h_n (E_{m,j-1} X_{j,n-1} - U_{m,j-1} Y_{j,n-1}) \dot{\theta}_j \\
 & + \sum_{j=3}^4 \sum_{m=3}^j \sum_{n=j}^4 h_{m-1} l_{n+1} (G_{m,j-1} U_{j,n} - W_{m,j-1} V_{j,n}) \dot{\theta}_j \\
 & + h_2 h_4 s_{23} s_{34} s_3 \dot{\theta}_3 - \sum_{j=6}^7 \sum_{m=6}^j \sum_{n=j+1}^8 [l_m l_n (E_{m,j-1} U_{j,n-1} \\
 & - U_{m,j-1} V_{j,n-1}) + l_m h_n (E_{m,j-1} X_{j,n-1} - U_{m,j-1} Y_{j,n-1}) \\
 & + h_{m-1} l_n (G_{m,j-1} U_{j,n-1} - W_{m,j-1} V_{j,n-1}) + h_{m-1} h_n \\
 & \cdot (G_{m,j-1} X_{j,n-1} - W_{m,j-1} Y_{j,n-1})] \dot{\theta}_j = 0 \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

将(4.3)~(4.6)写为矩阵形式, 得:

$$T v = \dot{\theta}_2 \delta \tag{4.7}$$

式中,

$$v = (\dot{\theta}_3 \ \dot{\theta}_4 \ \dot{\theta}_6 \ \dot{\theta}_7)^T$$

T , δ 分别是 4×4 , 4×1 矩阵.

解线性方程组(4.7), 得:

$$v = \dot{\theta}_2 T^{-1} \delta \tag{4.8}$$

将(4.7)对 t 求导数, 并利用上式经变换后得:

$$\dot{v} = T^{-1} (\dot{\theta}_2 \delta - \dot{T} v) + \ddot{\theta}_2 v \tag{4.9}$$

式中

$$\dot{v} = (\ddot{\theta}_3 \ \ddot{\theta}_4 \ \ddot{\theta}_6 \ \ddot{\theta}_7)^T$$

又

$$\omega_{1,1} = \sum_{m=1}^7 \dot{\theta}_m k_m = 0$$

为求 $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_5$ 和 $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_5$, 可分别以 k_1 , k_5 和上式作标积, 得:

$$\dot{\theta}_1 + Z_{2,4} \dot{\theta}_5 = Q_1, \quad Z_{2,4} \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_5 = Q_2$$

式中

$$Q_1 = -c_{12} \dot{\theta}_2 - Z_{2,3} \dot{\theta}_3 - Z_{2,4} \dot{\theta}_4 - Z_7 \dot{\theta}_6 - c_{71} \dot{\theta}_7$$

$$Q_2 = -Z_{3,4} \dot{\theta}_2 - Z_4 \dot{\theta}_3 - c_{45} \dot{\theta}_4 - c_{56} \dot{\theta}_6 - Z_6 \dot{\theta}_7$$

$$\text{于是 } \dot{\theta}_1 = (Q_1 - Q_2 Z_{2,4}) / (1 - Z_{2,4}^2), \quad \dot{\theta}_5 = (Q_2 - Q_1 Z_{2,4}) / (1 - Z_{2,4}^2) \tag{4.10}$$

将以上两式对 t 求导数, 即得 $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_5$ 的计算式(从略).

设给定输入角速度和角加速度 $\dot{\theta}_2$, $\ddot{\theta}_2$, 由(4.8)~(4.10)可求出各广义速度 $\dot{\theta}_j$ 和广义加速度 $\ddot{\theta}_j$ ($j=3, 4, \dots, 8$). 于是, 任一构件 q 相对于机架3的角速度 $\omega_{q,3}$ 和角加速度 $\epsilon_{q,3}$ 可如下求出:

$$\omega_{q,3}^{(3)} = \begin{cases} \sum_{m=3}^{q-1} \dot{\theta}_m k_m^{(3)}, & 4 \leq q \leq 6 \\ -\sum_{m=q}^2 \dot{\theta}_m k_m^{(3)}, & 0 \leq q \leq 2 \end{cases} \tag{4.11}$$

将上式用方向余弦表示, 得

$$\omega_{q,3}^{(3)} = \begin{cases} \dot{\theta}_3 \mathbf{k} + \sum_{m=4}^{q-1} \dot{\theta}_m (X_{3,m-1} \mathbf{i} + Y_{3,m-1} \mathbf{j} + Z_{4,m-1} \mathbf{k}) & 4 \leq q \leq 6 \\ - \sum_{m=q}^1 \dot{\theta}_m (W_{m+1,2} \mathbf{i} + G_{m+1,2} \mathbf{j} + Z_{m+1,2} \mathbf{k}) \\ \quad - \dot{\theta}_2 (s_{23} \mathbf{j} + c_{23} \mathbf{k}) & 0 \leq q \leq 2 \end{cases} \quad (4.11)'$$

上式对 t 求导数, 即得 $\epsilon_{q,3}^{(3)}$ 的计算式(从略)。

杆 q 上任一点 P (它在坐标系 S_q 中的坐标为 x_q, y_q, z_q), 在机架坐标系 S_3 中的径矢为:

$$\mathbf{R}_{O_3 P}^{(3)} = \begin{cases} h_3 \mathbf{k} + \sum_{m=4}^{q-1} (l_m \mathbf{i}_m^{(3)} + h_m \mathbf{k}_m^{(3)}) + (l_q + x_q) \mathbf{i}_q^{(3)} \\ \quad + y_q \mathbf{j}_q^{(3)} + z_q \mathbf{k}_q^{(3)} & 4 \leq q \leq 6 \\ -l_3 \mathbf{i} - \sum_{m=q+1}^2 (l_m \mathbf{i}_m^{(3)} + h_m \mathbf{k}_m^{(3)}) + x_q \mathbf{i}_q^{(3)} \\ \quad + y_q \mathbf{j}_q^{(3)} + (z_q - h_q) \mathbf{k}_q^{(3)} & 0 \leq q \leq 2 \end{cases}$$

上式也可用方向余弦表示(从略)。后者对 t 求一阶、二阶导数, 即得点 P 的速度 $\mathbf{v}_P^{(3)}$ 和加速度 $\mathbf{a}_P^{(3)}$ 的计算式(从略), 其中各方向余弦的一阶、二阶导数可按前面公式求出。

五、计算实例

取与文[1]具有相同结构参数的7R机构, 在VAX-11/750机上进行计算。图2示出部分运动线图($\dot{\theta}_2 = 1(1/\text{秒})$), 所得位移曲线与文[1]求解32次输入输出代数方程所得结果完全相同。

附录 部分系数的计算式

(Q 1)	((C 7 8) (H 8)) \+ ((H 7))
((L 3) \+ ((U 2) (L 2)))	(D 5 1 8)
(Q 2)	(\ - ((C 3 4) (L 5)) ((Q 1)))
((E 2) (L 2)) \+ ((S 2 3) (H 2))	(D 5 1 C)
(Q 3)	((C 3 4) (L 5)) ((Q 2))
((X 2) (L 2)) \+ ((H 3)) \+ ((C 2 3) (H 2))	(D 5 1 K)
(Q 4)	((S 3 4) (L 5)) ((Q 3))
((H 6) \+ ((C 5 6) (H 5)))	(D 5 2 S)
(Q 5)	((L 5)) ((Q 2))
((C 2 3) (H 2)) \+ ((X 2) (L 2))	(D 5 2 C)
(Q 6)	((L 5)) ((Q 1))
((U 2) (L 3)) \+ ((X 2) (H 3))	(D 5 2 K)
(Q 7)	((L 5) (L 4))

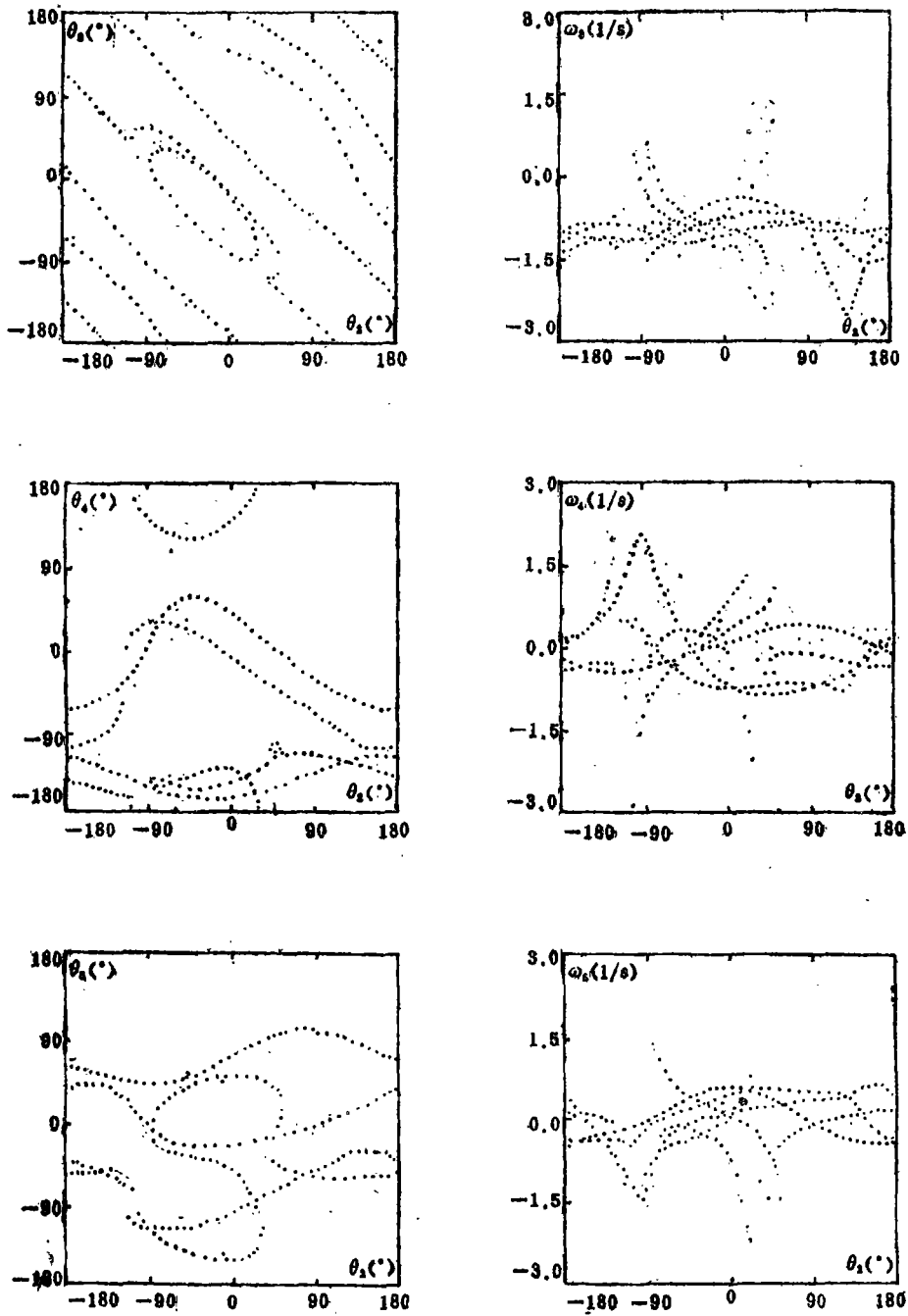


图 2

(D 5 3 S)

((S 3 4) (H 4)) ((Q 1)) \+ ((L 4)) ((Q 2))

(D 5 3 C)

(\ - ((S 3 4) (H 4)) ((Q 2)) \+ ((L 4)) ((Q 1)))

(D 5 3 K)

(\ - ((C 7 8) (C 6 7) (H 8)) ((Q 4)) \+ ((C 3 4) (H 4)) ((Q 5)) \+ ((L 2))
((Q 6)) \+ ((K 1)) \ - ((C 6 7) (C 5 6) (H 7) (H 5)))

- (A 5 1)
 (((S 6 7) (L 6)) ((Q 7)) \+ ((S 5 6) (L 7) (H 5)))
 (A 5 2)
 (\- ((S 6 7) (S 5 6) (H 5)) ((Q 7)) \+ ((L 7) (L 6)))
 (A 5 3)
 (\- ((C 6 7) (L 8) (L 6)) \+ ((S 7 8) (S 5 6) (H 8) (H 5)))
 (A 5 4)
 (((S 7 8) (C 6 7) (H 8) (L 6)) \+ ((S 5 6) (L 8) (H 5)))
 (A 5 5)
 (((S 7 8) (H 8) (L 6)) \+ ((C 6 7) (S 5 6) (L 8) (H 5)))
 (A 5 6)
 (((L 8) (L 6)) \- ((S 7 8) (C 6 7) (S 5 6) (H 8) (H 5)))
 (B 5 1)
 (((S 6 7) (L 8)) ((Q 4)) \+ ((S 7 8) (H 8) (L 7)))
 (B 5 2)
 (\- ((S 7 8) (S 6 7) (H 8)) ((Q 4)) \+ ((L 8) (L 7)))

参 考 文 献

- [1] Duffy, J. and C. Crane, A displacement analysis of the general spatial 7-link, 7R mechanism, *Mechanism and Machine Theory*, 15, 3 (1980).
 [2] 陈惟荣, 一般空间7R机构位移分析的矩阵法, 应用数学和力学, 8, 10 (1987), 901—910.
 [3] 廖启征、梁崇高、张启先, 空间7R机构位移分析的新研究, 机械工程学报, 22, 3 (1986, 9).
 [4] 李宏友、梁崇高, 空间一般七杆7R机构的位移分析, 第四届全国机构学学术讨论会 (1986, 8).
 [5] 陈惟荣, 应用图论的优化方法进行空间机构的位移分析和自由度计算, 机械设计, 2 (1986).
 [6] 陈惟荣, 《齿轮啮合理论》, 煤炭工业出版社 (1986).
 [7] Duffy, J., *Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators*, Edward Arnold, London (1980).
 [8] 陈惟荣, 空间七杆 RRRRRPP 机构的位移分析, 上海第二工业大学学报, 2 (1987).

Kinematic Analysis of the General Spatial 7R Mechanism

Chen Wei-rong Lu Xing-yong

(Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai)

Abstract

The displacement, velocity and acceleration analysis of the general spatial 7R mechanism is discussed in this paper. Based on the method proposed in Ref. [2], an input-output algebra equation of the 16th degree in the tan-half-angle of the output angular displacement is derived. The derivation process and computation are considerably simple. A program written in AI language is used to derive the coefficients of displacement equations; therefore the amount of manual work is greatly decreased. The results are verified by a numerical example. The researches of this paper and Ref. [5] found a base for establishing an expert system of spatial mechanism analysis in the future.