应用数学和力学，第10卷第10期（1989年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性振动中两变量型尺度法存在的问题与改进*

程水利　　谭志民

（中山大学力学系，1986年2月4日收到）

摘　要

本文指出了非线性振动中两变量型尺度法存在的问题并进行了改进．最后证明了改进的两变量型尺度法与 KБM 法等价．

为了获得非线性振动中的近似解，各种各样的方法相继出现．1937～1958年之间，苏联克雷诺夫（Н. М. Крылов），包戈留包夫（Н. Н. Боголюбов），米特罗波尔斯基（Ю. А. Митропольский）在范德波（Van der Pol）常数变易法和按周期求平均值方法的基础上，建立了求高级近似的 KБM 法（也称为慢变系数法）[1]．1957年，自施端洛克(Sturrock)提出多尺度法以来，这一方法发展很快，到1961年，克伏金（Kevorkian）提出了两变量型尺度法．本文指出：两变量型还不太完整，只能求解定常振幅问题．对于非定常振幅问题，只能在特殊情况下求解一级近似．本文改进了两变量型尺度法，并证明了经过改进的两变量型尺度法与 KБM 法等价．

一、两变量型存在的问题

我们仅以单自由度拟线性自治系统为例进行研究，其运动方程为

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\varepsilon f(x,\dot{x})\qquad (0<\varepsilon\ll 1)\tag{1.1}$$

设(1.1)的解为

$$x=x_0(\xi,\eta)+\varepsilon x_1(\xi,\eta)+\varepsilon^2 x_2(\xi,\eta)+\cdots\tag{1.2}$$

其中

$$\xi=\varepsilon t,\quad \eta=(1+\varepsilon^2\eta_2+\varepsilon^3\eta_3+\cdots)t\tag{1.3}$$

$\eta_k(k=2,3,\cdots)$ 是待定常数[2,5,7]．

把(1.2)代入(1.1)，得

* 钱伟长推荐．
第二届全国振动会议论文．

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2}+\omega^2 x_0=0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2}+\omega^2 x_1=-2\frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta \partial \xi}+f\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial \eta}\right) \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2}+\omega^2 x_2=-2\eta_2\frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2}-\frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi \partial \eta}+x_1 f'_x\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial \eta}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}+\frac{\partial x_0}{\partial \xi}\right)f'_{\dot{x}}\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial \eta}\right) \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial \eta^2}+\omega^2 x_3=-\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi \partial \eta}-2\eta_2\left(\frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2}\right)-2\eta_3\frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2}$$
$$+x_2 f'_x\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial \eta}\right)+\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}+\frac{\partial x_2}{\partial \eta}+\eta_2\frac{\partial x_0}{\partial \eta}\right)f'_{\dot{x}}\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial \eta}\right)$$
$$+\frac{1}{2}x_1^2 f''_{xx}\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial \eta}\right)+x_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}+\frac{\partial x_0}{\partial \xi}\right)f''_{x\dot{x}}\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial \eta}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}+\frac{\partial x_0}{\partial \xi}\right)^2 f''_{\dot{x}\dot{x}}\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial \eta}\right) \tag{1.7}$$

……

方程(1.4)的解为

$$x_0=a(\xi)\cos(\omega\eta+\varphi_1(\xi)) \tag{1.8}$$

其中$a(\xi)$，$\varphi_1(\xi)$是ξ的待定函数．把(1.8)代入(1.5)得

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2}+\omega^2 x_1=2\omega\frac{da}{d\xi}\sin\psi+2\omega a\frac{d\varphi_1}{d\xi}\cos\psi+f_0(a,\psi) \tag{1.9}$$

其中

$$f_0(a,\psi)=f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi) \tag{1.10}$$

$$\psi=\omega\eta+\varphi_1(\xi) \tag{1.11}$$

把$x_1(a,\psi)$，$f_0(a,\psi)$分别展为 Fourier 级数

$$\left.\begin{aligned} x_1(a,\psi)&=v_0(a)+\sum_{n=2}^{\infty}[v_n(a)\cos n\psi+w_n(a)\sin n\psi] \\ f_0(a,\psi)&=g_0(a)+\sum_{n=1}^{\infty}[g_n(a)\cos n\psi+h_n(a)\sin n\psi] \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

并假设$x_k(a,\psi)$（$k=1,2,3,\cdots$）都不含基谐波项，所以在x_1的求和式中n由2开始到∞。

上述式中的 Fourier 系数为

$$\left.\begin{aligned} g_0(a)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)d\psi \\ g_n(a)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\cos n\psi d\psi \\ h_n(a)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\sin n\psi d\psi \end{aligned}\right\} \quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{1.13}$$

而 $v_0(a)$，$v_n(a)$，$w_n(a)$ $(n=2,3,\cdots)$待定。

把(1.12)式代入方程(1.9)，并令相同谐波的系数相等，可得

$$\left.\begin{aligned}&g_1(a)+2a\omega\frac{d\varphi_1}{d\xi}=0,\ h_1(a)+2\omega\frac{da}{d\xi}=0,\ v_0(a)=\frac{g_0(a)}{\omega^2}\\&v_n(a)=\frac{g_n(a)}{\omega^2(1-n^2)},\quad w_n(a)=\frac{h_n(a)}{\omega^2(1-n^2)}\qquad(n=2,3,\cdots)\end{aligned}\right\}\tag{1.14}$$

于是

$$x_1=\frac{g_0(a)}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_n(a)\cos n\psi+h_n(a)\sin n\psi}{1-n^2}\tag{1.15}$$

与KБM法相比，这里的$da/d\xi$，$d\varphi_1/d\xi$分别等于KБM法中的A_1，B_1。用KБM法可得到

$$A_1=-\frac{h_1(a)}{2\omega},\qquad B_1=-\frac{g_1(a)}{2a\omega}\tag{1.16}$$

故

$$\frac{da}{d\xi}=A_1,\qquad\qquad \frac{d\varphi_1}{d\xi}=B_1\tag{1.17}$$

显然A_1，B_1都是振幅a的函数．又因$\xi=\varepsilon t$，$\psi=\omega\eta+\varphi_1$，故由(1.17)式可得

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1,\quad \frac{d\psi}{dt}=\omega+\varepsilon B_1+\varepsilon^2\omega\eta_2+\varepsilon^3\omega\eta_3+\cdots\tag{1.18}$$

再研究二级近似．由(1.16)式可得

$$\frac{\partial^2x_2}{\partial\eta^2}+\omega^2x_2=2\omega^2a\eta_2\cos\psi+f_1(a,\psi)\tag{1.19}$$

其中

$$\begin{aligned}f_1(a,\psi)=&-\frac{d^2a}{d\xi^2}\cos\psi+a\left(\frac{d\varphi_1}{d\xi}\right)^2\cos\psi+\left(2\frac{da}{d\xi}\frac{d\varphi_1}{d\xi}+a\frac{d^2\varphi_1}{d\xi^2}\right)\sin\psi\\&-2\frac{\partial^2x_1}{\partial\xi\partial\eta}+x_1f'_x(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\\&+\left[\frac{\partial x_1}{\partial\eta}+\frac{da}{d\xi}\cos\psi-a\frac{d\varphi_1}{d\xi}\sin\psi\right]f'_{\dot{x}}(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\end{aligned}\tag{1.20}$$

由于

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial x_1}{\partial\xi}=A_1\frac{\partial x_1}{\partial a}+B_1\frac{\partial x_1}{\partial\psi},\quad \frac{\partial x_1}{\partial\eta}=\omega\frac{\partial x_1}{\partial\psi}\\&\frac{\partial^2x_1}{\partial\xi\partial\eta}=\omega A_1\frac{\partial^2x_1}{\partial a\partial\psi}+\omega B_1\frac{\partial^2x_1}{\partial\psi^2}\\&\frac{d^2a}{d\xi^2}=\frac{dA_1}{da}A_1,\qquad \frac{d^2\varphi_1}{d\xi^2}=\frac{dB_1}{da}A_1\end{aligned}\right\}\tag{1.21}$$

把(1.21)式代入(1.20)可知它与KБM法所定义的$f_1(a,\psi)$完全相同（见文[1]的1.15式）．

把$f_1(a,\psi)$，$x_2(a,\psi)$展为Fourier级数：

$$
\left.\begin{aligned}
f_1(a,\psi)&=g_0^{(1)}(a)+\sum_{n=1}^{\infty}[g_n^{(1)}(a)\cos n\psi+h_n^{(1)}(a)\sin n\psi]\\
x_2(a,\psi)&=v_0^{(1)}(a)+\sum_{n=2}^{\infty}[v_n^{(1)}(a)\cos n\psi+w_n^{(1)}(a)\sin n\psi]
\end{aligned}\right\} \tag{1.22}
$$

与前面完全类似地可得

$$
h_1^{(1)}(a)=0,\quad g_1^{(1)}(a)+2\omega^2 a\eta_2=0 \tag{1.23}
$$

$$
x_2=\frac{g_0^{(1)}(a)}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_n^{(1)}(a)\cos n\psi+h_n^{(1)}(a)\sin n\psi}{1-n^2} \tag{1.24}
$$

由(1.23)的第二式可得

$$
\omega\eta_2=-\frac{g_1^{(1)}(a)}{2\omega a} \tag{1.25}
$$

与KБM法相比，有

$$
\omega\eta_2=B_2(a)
$$

现在研究第三级近似。由(1.7)式得

$$
\frac{\partial^2 x_3}{\partial\eta^2}+\omega^2 x_3=2\omega^2 a\eta_3\cos\psi+f_2(a,\psi) \tag{1.26}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
f_2(a,\psi)=&-\frac{\partial^2 x_1}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 x_2}{\partial\xi\partial\eta}-2\eta_2\left(-\omega\frac{da}{d\xi}\sin\psi-a\omega\frac{d\varphi_1}{d\xi}\cos\psi\right.\\
&\left.+\frac{\partial^2 x_1}{\partial\eta^2}\right)+x_2 f_x'(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\\
&+\left(\frac{\partial x_1}{\partial\xi}+\frac{\partial x_2}{\partial\eta}-\eta_2\omega a\sin\psi\right)f_{\dot x}'(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\\
&+\frac{1}{2}x_1^2 f_{xx}''(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)+x_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial\eta}+\frac{da}{d\xi}\cos\psi\right.\\
&\left.-a\frac{d\varphi_1}{d\xi}\sin\psi\right)f_{x\dot x}''(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial\eta}\right.\\
&\left.+\frac{da}{d\xi}\cos\psi-a\frac{d\varphi_1}{d\xi}\sin\psi\right)^2 f_{\dot x\dot x}''(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)
\end{aligned} \tag{1.27}
$$

同样，把$f_2(a,\psi)$，$x_3(a,\psi)$展为 Fourier 级数：

$$
\left.\begin{aligned}
f_2(a,\ \psi)&=g_0^{(2)}(a)+\sum_{n=1}^{\infty}[g_n^{(2)}(a)\cos n\psi+h_n^{(2)}(a)\sin n\psi]\\
x_3(a,\ \psi)&=v_0^{(2)}(a)+\sum_{n=2}^{\infty}[v_n^{(2)}(a)\cos n\psi+w_n^{(2)}(a)\sin n\psi]
\end{aligned}\right\} \tag{1.28}
$$

完全类似地有

$$
h_1^{(2)}(a)=0,\qquad g_1^{(2)}(a)+2\omega^2 a\eta_3=0 \tag{1.29}
$$

$$x_3=\frac{g_0^{(2)}(a)}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_n^{(2)}(a)\cos n\psi+h_n^{(2)}(a)\sin n\psi}{1-n^2} \tag{1.30}$$

与 KБM 法比较有

$$\omega\eta_3=B_3(a)$$

现在，我们指出两变量型尺度法存在的问题：

1. 在引入两变量ξ，η时，已假定η_k全都是待定常数，但由（1.25）式确定的η_2一般是$a(\xi)$的函数，这显然与原假设矛盾；

2. 前面曾指出由(1.20)式定义的$f_1(a,\psi)$与文[1]中的(1.15)式完全相同。在文[1]中，$h_1^{(1)}(a)=-2\omega A_2(a)$，而$A_2(a)$一般不等于零；但在(1.23)式的第一式中得到$h_1^{(1)}(a)=0$，因而使得两变量型尺度法对某些方程不能使用，否则将导致矛盾。

由于以上两个问题的存在，使得两变量型尺度法的使用范围受到限制。首先它只限于求解定常振幅问题，这时由于$da/dt=0$，$\eta_k=\text{const}$ $(k=2,3,\cdots)$，所以上述的两个问题都不存在。其次对于非定常振幅问题，可求得满足$\eta_k=\text{const}$ $(k=2,3,\cdots)$的一级近似解。对于个别特殊情况，若满足$g_1^{(k)}(a)/a=\text{cosnt}$，且$h_1^{(k)}(a)=0$ $(k=1,2,\cdots)$时，两变量型尺度法仍然生效。

例 1 范德波方程

$$\ddot{x}+x=\varepsilon(1-x^2)\dot{x} \tag{1.31}$$

这里$f(x,\dot{x})=(1-x^2)\dot{x}$。

代入(1.4)、(1.5)、(1.6)即得

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial\eta^2}+x_0=0 \tag{1.32}$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial\eta^2}+x_1=-2\frac{\partial^2 x_0}{\partial\xi\partial\eta}+(1-x_0^2)\frac{\partial x_0}{\partial\eta} \tag{1.33}$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial\eta^2}+x_2=-2\eta_2\frac{\partial^2 x_0}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2 x_0}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 x_1}{\partial\xi\partial\eta}-2x_0x_1\frac{\partial x_0}{\partial\eta}$$
$$+(1-x_0^2)\left(\frac{\partial x_1}{\partial\eta}+\frac{\partial x_0}{\partial\xi}\right) \tag{1.34}$$

因$f_0(a,\psi)=(-a+a^3/4)\sin\psi+(a^3/4)\sin 3\psi$，故有

$$g_n(a)=0\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

$$h_1(a)=-a+\frac{a^3}{4},\quad h_2(a)=0,\quad h_3(a)=\frac{a^3}{4}$$

$$h_n(a)=0\qquad(n=4,5,\cdots)$$

代入(1.14)可得

$$\frac{d\varphi_1}{d\xi}=0,\quad\frac{da}{d\xi}=\frac{1}{2}a\left(1-\frac{a^2}{4}\right) \tag{1.35}$$

积分上式可得

$$\varphi_1=\varphi_0,\quad a=\frac{a_0\exp[\xi/2]}{\sqrt{1+a_0(\exp[\xi]-1)/4}} \tag{1.36}$$

其中 $\varphi_0=\text{const}$，$a_0=\text{const}$。由(1.15)式得一级近似解为

$$x_1=-\frac{a^3}{32}\sin 3\psi \tag{1.37}$$

把以上结果代入(1.20)式即得

$$f_1(a,\psi)=\frac{a}{4}\left(1-a^2+\frac{7}{32}a^4\right)\cos\psi+\frac{a^3}{128}(8+a^2)\cos 3\psi$$

$$+\frac{5}{128}a^5\cos 5\psi$$

于是得 Fourier 系数为

$$g_0^{(1)}(a)=0,\quad g_1^{(1)}(a)=\frac{a}{4}\left(1-a^2+\frac{7}{32}a^4\right),\quad g_2^{(1)}(a)=0$$

$$g_3^{(1)}(a)=\frac{a^3}{128}(8+a^2),\quad g_4^{(1)}(a)=0,\quad g_5^{(1)}(a)=\frac{5a^5}{128}$$

$$g_n^{(1)}(a)=0 \qquad (n=6,7,8,\cdots)$$

$$h_n^{(1)}(a)=0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

代入(1.23)，可知

$$h_1^{(1)}(a)=0$$

是满足的。用 KБM 法做，恰巧$A_2(a)=0$。由(1.23b)可知

$$\eta_2=-\frac{1}{8}\left(1-a^2+\frac{7}{32}a^4\right) \tag{1.38}$$

从上式可看到，这时η_2已是a的函数了，而$a(\xi)\neq\text{const}$。由(1.24)得二级近似为

$$x_2=-\frac{(8+a^2)}{1024}a^3\cos 3\psi-\frac{5a^5}{3\times 1024}\cos 5\psi \tag{1.39}$$

其中$\psi=\eta+\varphi_0$

例 2

$$\ddot{x}+\omega^2x+\varepsilon c_0\dot{x}+\varepsilon x^3=0 \tag{1.40}$$

$$f(x,\dot{x})=-c_0\dot{x}-x^3$$

$$f_0(a,\psi)=-\frac{3}{4}a^3\cos\psi+a\omega c_0\sin\psi-\frac{1}{4}a^3\cos 3\psi$$

$$g_0(a)=0,\quad g_1(a)=-\frac{3}{4}a^3,\quad g_2(a)=0,\quad g_3(a)=-\frac{1}{4}a^3$$

$$g_n(a)=0 \qquad (n=4,5,6,\cdots)$$

$$h_1(a)=a\omega c_0,\quad h_n(a)=0 \qquad (n=2,3,\cdots)$$

代入(1.14)得

$$\frac{da}{d\xi}=-\frac{c_0}{2}a,\quad \frac{d\varphi_1}{d\xi}=\frac{3}{8\omega}a^2 \tag{1.41}$$

因此可得

$$a=a_0\exp[-c_0\xi/2],\quad \varphi_1=-\frac{3a_0^2}{8\omega c_0}\exp[-c_0\xi]+\varphi_0 \tag{1.42}$$

其中 $a_0=\text{const}$，$\varphi_0=\text{const}$。由(1.15)得一级近似解表达式

$$x_1=\frac{a^3}{32\omega^2}\cos 3\psi \tag{1.43}$$

把以上结果代入(1.20)式可得

$$f_1(a,\psi)=\left(\frac{c_0^2a}{4}+\frac{15a^5}{128\omega^2}\right)\cos\psi-\frac{3c_0a^3}{8\omega}\sin\psi$$

$$-\frac{3a^5}{64\omega^2}\cos 3\psi-\frac{3c_0a^3}{16\omega}\sin 3\psi-\frac{3a^5}{128\omega^2}\cos 5\psi$$

因此有

$$g_0^{(1)}(a)=0,\quad g_1^{(1)}(a)=\frac{c_0^2a}{4}+\frac{15a^5}{128\omega^2},\quad g_2^{(1)}=0$$

$$g_3^{(1)}(a)=-\frac{3a^5}{64\omega^2},\quad g_4^{(1)}(a)=0,\quad g_5^{(1)}(a)=-\frac{3a^5}{128\omega^2}$$

$$g_n^{(1)}(a)=0\qquad(n=6,7,8,\cdots)$$

$$h_1^{(1)}(a)=-\frac{3c_0a^3}{8\omega},\quad h_2^{(1)}(a)=0,\quad h_3^{(1)}(a)=-\frac{3c_0a^3}{16\omega}$$

$$h_n^{(1)}(a)=0\qquad(n=4,5,6,\cdots)$$

从此例就可看到，一般$h_1^{(1)}(a)\neq 0$。因此与(1.23)式的第一个方程产生矛盾。由KБM法，我们求得

$$A_2=\frac{3c_0a^3}{16\omega^2}\neq 0$$

再由(1.23)的第二式得到

$$\eta_2=-\frac{c_0^2}{8\omega^2}-\frac{15a^4}{2\times 128\omega^4} \tag{1.44}$$

这时η_2也不再是常数，而是$a(\xi)$的函数，与原假设矛盾。用 KБM 法可知

$$B_2=-\frac{c_0^2}{8\omega}-\frac{15a^4}{2\times 128\omega^3}$$

由(1.24)可得二级近似解

$$x_2=\frac{3a^5}{4\times 128\omega^4}\cos 3\psi+\frac{3c_0a^3}{128\omega^3}\sin 3\psi+\frac{3a^5}{24\times 128\omega^4}\cos 5\psi \tag{1.45}$$

二、改进的两变量型尺度法

由前节的分析可知，两变量型相当于 KБM 法的特例，现在对两变量型进行改进。设两变量满足

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon+\varepsilon^2\xi_2(\xi)+\varepsilon^3\xi_3(\xi)+\cdots,\quad \frac{d\eta}{dt}=1+\varepsilon^2\eta_2(\xi)+\varepsilon^3\eta_3(\xi)+\cdots \tag{2.1}$$

其中$\xi_2(\xi)$，$\xi_3(\xi)$，…，$\eta_2(\xi)$，$\eta_3(\xi)$，…，是ξ的待定函数。

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}&=\frac{\partial}{\partial\eta}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}+\varepsilon^2\left(\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi}+\eta_2\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\cdots\\ \frac{d^2}{dt^2}&=\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2\xi_2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+2\eta_2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

由(1.1)、(1.2)、(2.1)得：

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial\eta^2}+\omega^2 x_0=0\tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial\eta^2}+\omega^2 x_1=-2\frac{\partial^2 x_0}{\partial\xi\partial\eta}+f\left(x_0,\ \frac{\partial x_0}{\partial\eta}\right)\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_2}{\partial\eta^2}+\omega^2 x_2=&-2\frac{\partial^2 x_1}{\partial\xi\partial\eta}-2\xi_2\frac{\partial^2 x_0}{\partial\xi\partial\eta}-2\eta_2\frac{\partial^2 x_0}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2 x_0}{\partial\xi^2}\\&+x_1 f'_x\left(x_0,\ \frac{\partial x_0}{\partial\eta}\right)+\left(\frac{\partial x_0}{\partial\xi}+\frac{\partial x_1}{\partial\eta}\right)f'_{\dot{x}}\left(x_0,\ \frac{\partial x_0}{\partial\eta}\right)\end{aligned}\tag{2.5}$$

………

由(2.3)得

$$x_0=a(\xi)\cos(\omega\eta+\varphi_1(\xi))\tag{2.6}$$

其中$a(\xi)$，$\varphi_1(\xi)$是待定函数．把(2.6)代入(2.4)

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial\eta^2}+\omega^2 x_1=2a\omega\frac{d\varphi_1}{d\xi}\cos\psi+2\omega\frac{da}{d\xi}\sin\psi+f\left(x_0,\ \frac{\partial x_0}{\partial\eta}\right)\tag{2.7}$$

其中

$$\psi=\omega\eta+\varphi_1(\xi)\tag{2.8}$$

类似地x_1，$f_0(a,\psi)$展成 Fourier 级数

$$\left.\begin{aligned}x_1&=v_0(a)+\sum_{n=2}^{\infty}[v_n(a)\cos n\psi+w_n(a)\sin n\psi]\\ f_0&=g_0(a)+\sum_{n=1}^{\infty}[g_n(a)\cos n\psi+h_n(a)\sin n\psi]\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

代入(2.7)式，并比较相同谐波的系数，可得

$$\frac{da}{d\xi}=-\frac{h_1(a)}{2\omega},\quad \frac{d\varphi_1}{d\xi}=-\frac{g_1(a)}{2\omega a}\tag{2.10}$$

$$x_1=\frac{g_0(a)}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_n(a)\cos n\psi+h_n(a)\sin n\psi}{1-n^2}\tag{2.11}$$

与 KБM 法比较有

$$\frac{da}{d\xi}=A_1(a),\qquad \frac{d\varphi_1}{d\xi}=B_1(a)\tag{2.12}$$

因

$$\frac{da}{dt}=\frac{da}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt},\quad \frac{d\psi}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dt}$$

所以可得

$$\left.\begin{aligned} &da/dt=\varepsilon A_1(a)+\varepsilon^2 A_1(a)\xi_2(\xi)+\varepsilon^3 A_1(a)\xi_3(\xi)+\cdots \\ &d\psi/dt=\omega+\varepsilon B_1(a)+\varepsilon^2(\xi_2 d\varphi_1/d\xi+\omega\eta_2)+\cdots \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

由级数展开的唯一性知

$$A_1(a)\xi_k(\xi)=A_k(a),\quad \frac{d\varphi_1}{d\xi}\xi_k(\xi)+\omega\eta_k(\xi)=B_k(a) \qquad (k=2,3,\cdots) \tag{2.14}$$

其中$A_k(a)$，$B_k(a)(k=1,2,\cdots)$是文[1] КБМ 法的符号。可见改进后的两变量型尺度法与 КБМ 法等价。

续例 2

$$\ddot{x}+\omega^2 x+\varepsilon c_0\dot{x}+\varepsilon x^3=0 \tag{2.15}$$

$$f(x,\dot{x})=-c_0\dot{x}-x^3 \tag{2.16}$$

由(2.16)及(2.6)知

$$f_0(a,\psi)=-\frac{3}{4}a^3\cos\psi+a\omega c_0\sin\psi-\frac{1}{4}a^3\cos 3\psi \tag{2.17}$$

因此得 Fourier 系数为：

$$g_0(a)=0,\quad g_1(a)=-3a^3/4,\quad g_2(a)=0,\quad g_2(a)=-a^3/4$$

$$g_n(a)=0 \qquad (n=4,5,6,\cdots)$$

$$h_1(a)=a\omega c_0,\quad h_n(a)=0 \qquad (n=2,3,4,\cdots)$$

代入(2.10)、(2.11)得

$$\frac{da}{d\xi}=-\frac{1}{2}c_0 a,\qquad \frac{d\varphi_1}{d\xi}=\frac{3a^2}{8\omega} \tag{2.18}$$

$$x_1=\frac{a^3}{32\omega^2}\cos 3\psi \tag{2.19}$$

由(2.18)积分得

$$a=a_0\exp[-c_0\xi/2];\quad \varphi_1=-\frac{3a^2}{8\omega c_0}+\varphi_0 \tag{2.20}$$

其中a_0，φ_0是待定常数。由初始条件决定。把以上结果代入(2.5)式

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_2}{\partial\eta^2}+\omega^2 x_2=&\left(-c_0 a\omega\,\xi_2-\frac{3a^3}{8\omega}c_0\right)\sin\psi+\left(2a\omega\xi_2\cdot\frac{3a^2}{8\omega}+2\eta_2\omega^2 a\right.\\ &\left.+\frac{1}{4}c_0^2 a-\frac{21a^5}{128\omega^2}\right)\cos\psi+\frac{21a^5}{128\omega^2}\cos 3\psi-\frac{3a^3c_0}{16\omega}\sin 3\psi-\frac{3a^5}{128\omega^2}\cos 5\psi\end{aligned} \tag{2.21}$$

令 $\sin\psi$，$\cos\psi$的系数等于零可得

$$\xi_2(\xi)=-\frac{3a^2}{8\omega^2},\qquad \eta_2(\xi)=-\frac{c_0^2}{8\omega^2}+\frac{21a^4}{2\times128\omega^4} \tag{2.22}$$

因此可得

$$\xi_2(\xi)\frac{d\varphi_1}{d\xi}+\omega\eta_2(\xi)=-\frac{15a^4}{2\times128\omega^3}-\frac{c_0^2}{8\omega},\quad A_1(a)\xi_2(\xi)=\frac{3c_0a^3}{16\omega^2} \tag{2.23}$$

用 КБМ 法我们求得

$$A_2(a)=\frac{3a^3c_0}{16\omega^2},\qquad B_2(a)=-\frac{15a^4}{2\times128\omega^3}-\frac{c_0^2}{8\omega} \tag{2.24}$$

即得：

$$A_1(a)\xi_2(\xi)=A_2(a);\quad \xi_2(\xi)\frac{d\varphi_1}{d\xi}+\omega\eta_2(\xi)=B_2(a) \tag{2.25}$$

由(2.21)式

$$x_2=-\frac{21a^5}{1024\omega^2}\cos 3\psi+\frac{3c_0a^3}{128\omega}\sin 3\psi+\frac{a^5}{1024\omega^2}\cos 5\psi \tag{2.26}$$

最后得

$$x=a\cos\psi+\varepsilon\frac{a^3}{32\omega^2}\cos 3\psi+\varepsilon^2\Big(-\frac{21a^5}{1024\omega^2}\cos 3\psi+\frac{3c_0a^3}{128\omega}\sin 3\psi+\frac{a^5}{1024\omega^2}\cos 5\psi\Big)+O(\varepsilon^3) \tag{2.27}$$

其中a，ψ满足

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=-\frac{\varepsilon}{2}c_0a+\varepsilon^2\frac{3c_0a^3}{16\omega^2}+O(\varepsilon^3)\\ \frac{d\psi}{dt}&=\omega+\varepsilon\frac{3a^2}{8\omega}+\varepsilon^2\Big(-\frac{c_0^2}{8\omega}+\frac{15a^4}{2\times128\omega^3}\Big)+O(\varepsilon^3)\end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

其结果与 KБM 法一致。

本文得到徐兆老师的指导，特此表示感谢。

参 考 文 献

[1] 包戈留包夫，H. H.，Ю. A. 米特罗波尔斯基，《非线性振动理论中的渐近方法》，金福监等译，上海科学出版社（1963）.

[2] Mickens, Ronald Elbert, *An Introduction to Nonlinear Oscillation*, Cambridge University Press, Cambridge (1981).

[3] Nayfeh, A.H. and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York (1979).

[4] 吴福光，蔡承武、徐兆，《振动理论》，下册，中山大学（1983）.

[5] 郑兆昌主编，《机械振动》，机械工业出版社（1986）.

[6] 江福汝，奇异摄动理论概述，《奇异摄动理论及其在力学中的应用》（钱伟长主编），科学出版社（1981）.

[7] Cole, J. D. and J. Kevorkian, Uniformly valid asymptotic approximations for certain nonlinear differential equations, *Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, Academic Press Inc., New York (1963), 113—120.

Defect and Improvement of Two-Time Expansion Method in Nonlinear Oscillations

Cheng Shui-li Tan Zhi-min

(*Zhongshan University, Guangzhou*)

Abstract

In this paper, the defect of the two-time expansion method is indicated and an improvement of this method is suggested. Certain examples, in which the present method is used, are given. Moreover, the paper shows the equivalence of the improved two-time expansion method and the method of KБM (Крылов-Боголюбов-Митропольский).