应用数学和力学，第10卷第11期（1989年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

正弦锁相环路方程周期扰动下的浑沌与分枝*

郭瑞海　袁晓凤

（西南民族学院）（中国科学院成都分院）

（钱伟长推荐，1988年9月7日收到）

摘　要

本文讨论方程 $\ddot{x}+\varepsilon\cos x\dot{x}+a\sin x=\varepsilon b\sin t$ 的浑沌与分枝．利用 Melnikov 方法确定出了产生浑沌与次谐波分枝的条件．

一、引　言

正弦锁相环路方程为

$$\ddot{x}+\cos x\dot{x}+a\sin x=b \quad (a>0,\ b\geqslant 0) \tag{1.1}$$

对此方程，文[1]、[2]作过定性理论等研究．文[3]采用积分估值的方法，对一类周期函数 $f(x)$ 讨论了 $\ddot{x}+\varepsilon f'(x)\dot{x}+f(x)=\varepsilon b\sin t$ 的浑沌现象．本文则通过具体地实际计算，确定出系统

$$\ddot{x}+\varepsilon\cos x\dot{x}+a\sin x=\varepsilon b\sin t \tag{1.2$_\varepsilon$}$$

出现浑沌的条件，然后讨论了该系统的次谐波分枝问题．

方程(1.2)$_\varepsilon$的等价方程组为

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-a\sin x+\varepsilon(b\sin t-y\cos x)\end{cases} \tag{1.3$_\varepsilon$}$$

由于 $a\neq 1$ 与 $a=1$ 的情况在讨论时无本质差别，故以下仅就 $a=1$ 进行讨论．

当 $\varepsilon=0$（且 $a=1$）　(1.3)$_\varepsilon$ 则成为

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-\sin x\end{cases} \tag{1.4$_0$}$$

易知（$\pm\pi,0$）是鞍点，（0,0）为中心，过（$\pm\pi,0$）的同宿轨 Γ^0：$(x(t),y(t))\longrightarrow(\pm\pi,0)$　$t\to\pm\infty$．

我们的主要结果是：

---

* 国家自然科学基金资助项目．

定理 1 存在 b_1，当 $b\geqslant b_1$ 和 $\varepsilon>0$ 时系统 $(1.3)_\varepsilon$ 有浑沌性，即 Poincaré 映射存在双曲不变集，从而有 Smale 马蹄。

定理 2 存在 b_2，当 $b\geqslant b_2$ 和 $\varepsilon>0$ 时，对非负整数 p，系统 $(1.3)_\varepsilon$ 有 $2p+1$ 阶次谐波分枝。

定理 3 系统$(1.3)_\varepsilon$ 没有超次谐波分枝。

二、定理1的证明

由 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sin x}{y}$ 有通积分

$$y^2=2(\cos x+h) \tag{2.1}$$

则过 $(\pm\pi,0)$ 的同宿轨为

$$\Gamma^0_\pm:\ y=\pm\sqrt{2(\cos x+1)}=\pm 2\cos\frac{x}{2} \tag{2.2}$$

由对称性，仅取 $y=2\cos(x/2)$ 代入$(1.4)_0$，并由条件 $x(0)=0$ 易得参数方程

$$\Gamma^0_+:\ \begin{cases} x=2\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sh}t) \\ y=2\operatorname{sech}t \end{cases} \tag{2.3}$$

由此确定 Melnikov 函数

$$\begin{aligned} M(t_0)&=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)[b\sin(t+t_0)-y(t)\cos x(t)]dt \\ &=2b\sin t_0\int_{-\infty}^{+\infty}\cos t\operatorname{sech}t dt-\int_{-\infty}^{+\infty}y^2(t)\cos x(t)dt \\ &=2b\sin t_0 I_1-I_2 \end{aligned}$$

这里 $I_1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\cos t\operatorname{sech}t dt=2\int_0^{+\infty}\cos t\operatorname{sech}t dt$

$$=\pi\operatorname{sech}\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} I_2&=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2(t)\cos x(t)dt \\ &\xlongequal{x=x(t)}\int_{-\pi}^{\pi}y(x)\cos x dx \\ &=\int_{-\pi}^{\pi}2\cos\frac{x}{2}\cos x dx=\frac{8}{3} \end{aligned}$$

于是
$$M(t_0)=2b\pi\sin t_0\operatorname{sech}\frac{\pi}{2}-\frac{8}{3}$$

令 $b_1=\dfrac{4}{3\pi}\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{2}$，则当 $b\geqslant b_1$ 时 $M(t_0)$ 有简单零点，从而系统$(1.3)_\varepsilon$ 存在横截同宿点，其 Poincaré 映射有 Smale 马蹄[4]，即系统$(1.3)_\varepsilon$ 具有浑沌性。定理 1 证毕。

三、定理2的证明

在方程(2.1)中，$h=1$ 对应于过鞍点 $(\pm\pi,0)$ 的同宿轨$\Gamma^0_\pm$，$h=-1$ 对应于中心 $(0,0)$ 当 $-1<h<1$ 时为一族闭轨 Γ^h。

$$\Gamma^h:\quad y^2=2(\cos x+h)$$

$$\text{或}\quad y=\pm\sqrt{2(\cos x+h)}$$

$$=\pm 2\sqrt{k^2-\sin^2\frac{x}{2}} \tag{3.1}$$

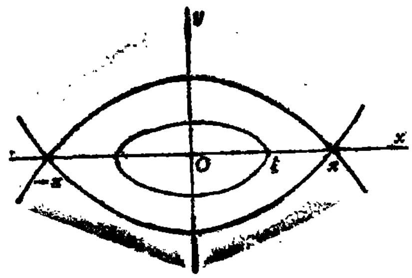

图 1

其中 $k^2=\dfrac{1+h}{2}$。

先计算 Γ^h 的周期。由对称性，只计算第一象限部份即可。

$$T^h=4\int_0^\xi\frac{dx}{2\sqrt{k^2-\sin^2\frac{x}{2}}}\qquad(\xi=\arccos(-h))$$

$$=4\int_0^k\frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}\sqrt{1-u^2}}\qquad\left(u=\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$=4\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}=4K\qquad(u=ks)$$

其中 $\quad K=\displaystyle\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$。

为了求 Γ^h 的参数方程，将(3.1)代入 $(1.4)_0$ 得到 Γ^h 的参数方程

$$\Gamma^h:\ \begin{cases}x=2\arcsin(k\,\mathrm{sn}t)\\ y=2k\,\mathrm{cn}t\end{cases}\qquad(0\leqslant t\leqslant 4K)$$

其中 $\mathrm{sn}t$、$\mathrm{cn}t$ 为 Jacobi椭圆函数，K 及后面要出现的 K' 分别是模为k与$k'=\sqrt{1-k^2}$ 的第一型全椭圆积分。

由共振条件 $T^h=mT$ 即 $4K=m2\pi$ 确定出次谐波 Melnikov 函数：

$$M^m(t_0)=\int_0^{mT}[y(t)b\sin(t+t_0)-y^2(t)\cos x(t)]dt$$

$$=\int_0^{mT}2kb\cos t_0\,\mathrm{cn}t\sin t\,dt+\int_0^{mT}2kb\sin t_0\,\mathrm{cn}t\cos t\,dt$$

$$-\int_0^{mT}4k^2\mathrm{cn}^2t\cos(2\arcsin k\,\mathrm{sn}t)dt$$

$$\overset{\triangle}{=}2kb(\cos t_0I_1+\sin t_0I_2)-4k^2I_3$$

$$I_1=\int_0^{mT}\mathrm{cn}t\sin t\,dt\xlongequal{t=2K+\tau}\int_{-2K}^{2K}\mathrm{cn}(2K+\tau)\sin(m\pi+\tau)d\tau$$

$$=(-1)^{m+1}\int_{-2K}^{2K}\mathrm{cn}\tau\sin\tau d\tau=0$$

$$I_2=\int_0^{mT}\mathrm{cn}t\cos t dt$$

$$=\int_0^{2K}\mathrm{cn}t\cos t dt+\int_{2K}^{4K}\mathrm{cn}t\cos t dt$$

(在第二项积分中令 $t=2K+\tau$)

$$=\int_0^{2K}\mathrm{cn}t\cos t dt+(-1)^{m+1}\int_0^{2K}\mathrm{cn}\tau\cos\tau d\tau$$

$$=\begin{cases}0 & (m\text{ 为偶数})\\ 2\int_0^{2K}\mathrm{cn}t\cos t dt & (m\text{ 为奇数})\end{cases}$$

当 m 为奇数时记

$$I_2=\int_0^{2K}\mathrm{cn}t\cos t dt$$

$$=\int_0^{K}\mathrm{cn}t\cos t dt+\int_K^{2K}\mathrm{cn}t\cos t dt$$

(第二项积分中令 $t=2K+\tau$)

$$=\int_0^{K}\mathrm{cn}t\cos t dt+\int_{-K}^{0}\mathrm{cn}\tau\cos\tau d\tau$$

$$=\int_{-K}^{K}\mathrm{cn}t\cos t dt$$

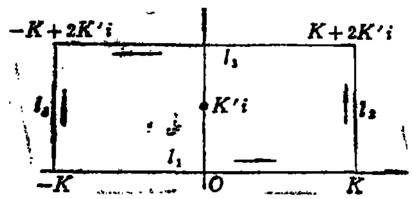

图 2

为计算 I_2，考虑复函数 $f(z)=\mathrm{cn}z\exp[iz]$ 在如图2的围道积分

$$I^*=\oint_l f(z)dz$$

在围线 $l=l_1+l_2+l_3+l_4$ 内，$f(z)$ 仅以 $K'i$ 为一级极点。由留数定理，

$$I^*=2\pi i\,\mathrm{res}(f(z),K'i)$$

$$=2\pi i\lim_{z\to K'i}(z-K'i)\mathrm{cn}z\exp[iz]$$

$$=\frac{2\pi}{K}\exp[-K'i]$$

另一方面

$$I^*=\int_{l_1}f(z)dz+\int_{l_2}f(z)dz+\int_{l_3}f(z)dz+\int_{l_4}f(z)dz$$

而

$$\int_{l_1}f(z)dz=\int_{-K}^{K}\mathrm{cn}z\exp[iz]dz$$

$$\int_{l_3}f(z)dz=\int_{K}^{-K}\mathrm{cn}z\exp[iz]dz$$

$$=\exp[-2K']\int_{-K}^{K}\mathrm{cn}u\exp[iu]du\qquad(u=z-2K'i)$$

$$=\exp[-2K']\int_{l_1}f(z)dz$$

令代换 $z=W-2K$ 易得 $\int_{l_4} f(z)dz=-\int_{l_2} f(z)dz$

于是 $I^*=(1+\exp[-2K'])\int_{-K}^{K}\mathrm{cn}t\exp[it]\,dt=\frac{2\pi}{k}\exp[-K']$

从而 $\int_{-K}^{K}\mathrm{cn}t\exp[it]dt=\frac{\pi}{k}\cdot\frac{2}{\exp[K']+\exp[-K']}=\frac{\pi}{k}\mathrm{sech}K'$

进而 $I_2=\mathrm{Re}\int_{-K}^{K}\mathrm{cn}t\exp[it]dt=\frac{\pi}{K}\mathrm{sech}K'$

$$I_2=\frac{2\pi}{k}\mathrm{sech}K'$$

由于 m 为偶数时，$I_1=0$，$I_2=0$，I_3 与 t_0 无关且不为零（见下计算），则系统(1.3)。无偶数阶次谐波分枝。

下面对任意的 m 计算 I_3。

$$\begin{aligned}
I_3&=\int_0^{mT}\mathrm{cn}^2t\cos(2\arcsin k\mathrm{sn}t)dt\\
&=\int_0^{4K}\mathrm{cn}^2t(2k^2\mathrm{ch}^2t-h)dt\\
&=2\int_0^{2K}\mathrm{cn}^2\tau(2k^2\mathrm{cn}^2\tau-h)d\tau \qquad (t=2K+\tau)\\
&=2\left[\int_0^{K}+\int_K^{2K}\mathrm{cn}^2\tau(2k^2\mathrm{cn}^2\tau-h)d\tau\right]
\end{aligned}$$

（在第二个积分中令 $\tau=2K-u$）

$$\begin{aligned}
&=4\int_0^{K}\mathrm{cn}^2\tau(2k^2\mathrm{cn}^2\tau-h)d\tau\\
&=8k^2\int_0^{K}\mathrm{cn}^4\tau d\tau-4h\int_0^{K}\mathrm{cn}^2\tau d\tau
\end{aligned}$$

记 $J_r=\int_0^{K}\mathrm{cn}^r\tau d\tau$ （r 为整数）

有 $J_4=\frac{1}{3k^2}\left[k'^2J_0+\mathrm{cn}\tau\mathrm{sn}\tau\mathrm{dn}\tau\Big|_0^K-2(1-2k^2)J_2\right]$

$$=\frac{1}{3k^2}(k'^2J_0+2hJ_2)$$

其中 $J_0=\int_0^{K}\mathrm{cn}^0\tau d\tau=K$

$$J_2=\int_0^{K}\mathrm{cn}^2\tau d\tau=\frac{1}{k^2}[E(\mathrm{an}\tau)-k'^2\tau]_0^K=\frac{1}{k^2}(E-k'^2K)$$

其中 $E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$ 为第二型全椭圆积分，$k'=1-k^2$。

于是 $I_3=8k^2J_4-4hJ_2=\frac{8k^2}{3k^2}(k'^2J_0+2hJ_2)-4hJ_2$

$$=\frac{4}{3k^2}(2k^2k'^2J_0+k^2hJ_2)=\frac{4}{3k^2}[2k^2k'^2K+h(E-k'^2K)]$$

$$=\frac{4}{3k^2}(k'^2K+hE)$$

进而得到

$$M^m(t_0)=4b\pi\sin t_0\operatorname{sech}K'-\frac{16}{3}(k'^2K+hE)$$

记 $$b_2=\frac{4(k'^2K+hE)\operatorname{ch}K'}{3\pi}$$

则当 $b\geqslant b_2$ 时 $M(t_0)$ 有简单零点。据Melnikov 理论，系统(1.3)有 $m=2p+1$ 阶次谐波分枝。

四、定理3的证明

我们先证下面的

引理 设 p、q 为整数，$n=2p+1$，$m=2q+1$ 且 $K=m\pi/2n$，m 与 n 互质，则

$$\sigma(p)=\sum_{j=-p}^{p}(-1)^j\exp[2jKi]=\begin{cases}1 & (p=0)\\ 0 & (p\neq 0)\end{cases}$$

证 $$\sigma(p)=1+\sum_{j=1}^{p}(-1)^j\exp[2jKi]+\sum_{j=1}^{p}(-1)^j\exp[-2jKi]$$

$$=1+\frac{-\exp[2Ki][1-(-1)^p\exp[2pKi]]}{1+\exp[2Ki]}$$

$$+\frac{-\exp[-2Ki][1-(-1)^p\exp[-2pKi]]}{1+\exp[-2Ki]} \qquad (*)$$

(1) 当 $p>0$ 为偶数，则

$$\sigma(p)=1-\frac{\exp[2Ki](1-\exp[2pKi])}{1+\exp[2Ki]}-\frac{\exp[-2Ki](1-\exp[-2pKi])}{1+\exp[-2Ki]}$$

$$=1-\frac{2\sin pK\cdot\sin(p+1)K}{\cos K}$$

$$=1+\frac{1}{\cos K}(\cos(2p+1)K-\cos K)$$

$$=\frac{\cos nK}{\cos K}=\frac{\cos\frac{2q+1}{2}\pi}{\cos K}=0$$

(2) 当 p 为奇数，则

$$\sigma(p)=1-\frac{\exp[2Ki](1+\exp[2pKi])}{1+\exp[2pKi]}-\frac{\exp[-2Ki](1+\exp[-2pKi])}{1+\exp[-2Ki]}$$

$$=1-\frac{2\cos pK\cdot\cos(p+1)K}{\cos K}$$

$$=1-\frac{1}{\cos K}[\cos(2p+1)K+\cos K]$$

$$=-\frac{\cos nK}{\cos K}=-\frac{\cos\frac{2q+1}{2}\pi}{\cos K}=0$$

当 $p=0$ 结论显然，引理证毕。

现在讨论超次谐波分枝。此时的共振条件为 $nT^h=mT$，即 $4nK=2m\pi$（其中 m 与 n互质）由此确定的 Melnikov 函数为

$$M^{\frac{m}{n}}(t_0)=\int_0^{mT}[y(t)b\sin(t+t_0)-y^2(t)\cos x(t)]dt$$

$$=2kb\int_0^{mT}\mathrm{cn}t(\cos t_0\sin t+\sin t_0\cos t)dt$$

$$-\int_0^{mT}y^2(t)\cos x(t)dt=2kb(\cos t_0I'_1+\sin t_0I'_2)-I'_3$$

用第三节中的方法易知 $I'_1=\int_0^{mT}\mathrm{cn}t\sin tdt=0$。而且

$$I'_2=\int_0^{mT}\mathrm{cn}t\cos tdt$$

$$=\int_0^{2nK}\mathrm{cn}t\cos tdt+(-1)^{m+n}\int_0^{2nK}\mathrm{cn}\tau\cos\tau d\tau$$

$$=\begin{cases}0 & (m+n\text{ 为奇数})\\ 2\int_0^{2nK}\mathrm{cn}t\cos tdt & (m+n\text{ 为偶数})\end{cases}$$

当 $m+n$ 为偶数时，由于 m 与 n 互质，只有 m 与 n 同为奇数。设 $n=2p+1$，$m=2q+1$。使用第三节中的方法有

$$I'_2=2\int_0^{2nK}\mathrm{cn}t\cos tdt=2\int_{-nK}^{nK}\mathrm{cn}t\cos tdt$$

现在考虑函数 $f(z)=\mathrm{cn}z\exp[iz]$ 在如图 3 的围道积分

$$I'=\oint f(z)dz$$

在 $l=l_1+l_2+l_3+l_4$ 内，$f(z)$以 $z_j=2jK+K'i(j=0,\ \pm,\ \cdots,\ \pm p)$ 为一级极点，留数分别为

$$\frac{(-1)^j}{ik}\exp[-K'+2jKi]$$

由留数定理，并据引理有

$$I'=2\pi i\sum_{j=-p}^{p}\mathrm{res}(f(z),z_j)$$

$$=\frac{2\pi}{k}\exp[-K']\Big[\sum_{j=-p}^{p}(-1)^j\exp[2jKi]\Big]=\begin{cases}0 & (p\neq 0)\\ 1 & (p=0)\end{cases}$$

当 $p=0$，即 $n=1$。此为第三节中已讨论过的情况。

当 $p>0$ 时，再对围道积分作分段讨论可得

$$\int_{-nK}^{nK}\mathrm{cn}t\exp[it]dt=0,\text{ 进而 } I_2'=0.$$

又

$$I_3'=\int_0^{mT}y^2(t)\cos x(t)dt$$

$$=\int_0^{n4K}\mathrm{cn}^2t(2k^2\mathrm{cn}^2t-h)dt$$

$$=n\int_0^{4K}\mathrm{cn}^2t(2k^2\mathrm{cn}^2t-h)dt$$

$$=nI_3=\frac{4n}{3k^2}(k'^2K+hE)$$

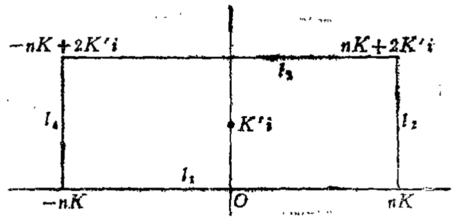

图 3

于是，对 $n>1$ 有

$$M^{\frac{m}{n}}(t_0)=-I_3'\neq 0$$

据 Melnikov 理论，系统 (1.3)$_\varepsilon$ 无超次谐波分枝。

参考文献

[1] Viterbi, A. T., *Principles of Coherent Communications* (1970).

[2] 陈兰荪，锁相技术中的一个微分方程，数学的实践与认识，3 (1973).

[3] 刘张炬、许连超，锁相环路方程的周期扰动，数学年刊，7A，6 (1986).

[4] Guckenheimer, J. and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag (1983).

Chaos and Bifurcation of Phase-Locking Loops under Periodic Perturbation

Guo Rui-hai

(*Southwest Institute for Nationalities, Chengdu*)

Yuan Xiao-feng

(*Institute of Mathematical Sciences, Academia Sinica, Chengdu*)

Abstract

This paper discusses the chaos and bifurcation for equation $\ddot{x}+\varepsilon\dot{x}\cos x+a\sin x=\varepsilon b\sin t$. By use of the Melnikov method, the conditions to have the chaotic behavior and to have subharmonic oscillations are given.