

# 含有随机分布缺陷的弹性介质\*

王彪 王殿富 王锋

(哈尔滨工业大学, 1987年9月25日收到)

## 摘 要

本文对含有随机分布缺陷的固体中弹性场进行了研究, 这些缺陷被简化成微空洞或微裂纹等, 它们的位置、方位以及尺寸等都是些随机参量. 作者提出了随机点场模型用于描述这些参量的统计特性, 并发展了随机缺陷介质的基本场方程及其解法. 对于空洞及微裂纹两种缺陷形固体具体得到了弹性场在其中的分布形态.

## 一、引 言

工程材料往往含有各种各样的微观缺陷, 而这些缺陷在很大程度上决定着材料的性能. 尤其对于脆性材料更是这样. 如何正确分析这些缺陷在材料中所起的作用是深入理解材料性能的关键. 而且, 缺陷在材料中往往是随机分布的, 单一缺陷问题的研究结果不一定能代表随机分布缺陷群的作用. Budiansky 等<sup>[1]</sup>曾经利用自恰方法计算了含有随机分布裂纹的弹性固体有效弹性模量. 但是, 仅仅限于讨论随机分布微裂纹的存在对于材料弹性常数的影响是远不够的, 而最为基本的问题是首先应该研究随机分布缺陷的存在对于材料中弹性场分布的影响. 本文的目的是为了寻求含有随机缺陷材料中弹性场的分布规律. 首先提出了随机点场模型用于描述缺陷分布的统计规律性, 并发展了随机缺陷介质的基本均值场方程及其解法. 对于空洞及微裂纹两种缺陷形固体具体得到了弹性场在其中的分布形态.

## 二、基本理论

由文[2]中结果, 可以得到非均匀介质的基本场方程为

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 - \int_V K_{ijkl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') C_{klmnp} \varepsilon_{mn} dV(\mathbf{x}') \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 - \int_V S_{ijkl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') B_{klmnp} \sigma_{mn} dV(\mathbf{x}') \quad (2.2)$$

式中

$$K_{ijkl} = -\frac{1}{4} (\partial_i \partial_j G_{kl} + \partial_j \partial_i G_{kl} + \partial_i \partial_k G_{jl} + \partial_j \partial_k G_{il}) \quad (2.3)$$

\* 叶开沅推荐.

$$S_{ijkl} = C_{ijkl}^M \delta(x-x') - C_{ijmnp}^M K_{mnpq} C_{pqkl}^M \tag{2.4}$$

$$C_{ijklmn}^i = C_{ijklmn}(x') - C_{ijklmn}^M \tag{2.5}$$

$$B_{ijklmn}^i = B_{ijklmn}(x') - B_{ijklmn}^M \tag{2.6}$$

式中  $G_{ij}$  是无限大各向同性体的格林函数。  $C_{ijmnp}^M$ ,  $B_{ijmnp}^M$  分别是基体的弹性模量张量和柔度张量。  $C_{ijklmn}$ ,  $B_{ijklmn}$  分别是整体材料弹性模量张量及柔度张量函数。  $\epsilon_{ij}^0$  及  $\sigma_{ij}^0$  是均匀基体材料的齐次解。对于随机夹杂介质，可以得到

$$C_{ijklmn}^i = \sum_{a=1}^{N_V} C_{ijklmn}^a V_a(x') \tag{2.7}$$

$$B_{ijklmn}^i = \sum_{a=1}^{N_V} B_{ijklmn}^a V_a(x') \tag{2.8}$$

式中

$$V_a(x') = \begin{cases} 1 & (x' \in h_a) \\ 0 & (x' \notin h_a) \end{cases} \tag{2.9}$$

$$C_{ijklmn}^a = C_{ijklmn}^i - C_{ijklmn}^M, \quad B_{ijklmn}^a = B_{ijklmn}^i - B_{ijklmn}^M \tag{2.10}$$

式中  $h_a$  是第  $a$  个夹杂区域，  $C_{ijklmn}^i$  和  $B_{ijklmn}^i$  分别为夹杂的弹性模量张量及柔度张量。

当夹杂为空洞的情况下

$$C_{ijklmn}^a = 0, \quad B_{ijklmn}^a \rightarrow \infty \tag{2.11}$$

将(2.11)式连同(2.7)及(2.8)式代入(2.1)式及(2.2)式中，可以得到

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + \sum_{a=1}^{N_V} \int_{h_a} K_{ijkl}(x-x') C_{ijklmn}^a e_{mn}^i dV(x') \tag{2.12}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 - \sum_{a=1}^{N_V} \int_{h_a} S_{ijkl}(x-x') e_{kl}^i dV(x') \tag{2.13}$$

由于夹杂的位置、方位以及尺寸都为随机变量，由(2.12)式及(2.13)式决定的应变场和应力场也为随机场量。

下面，我们具体分析一下，如何将空洞形缺陷向裂纹问题进行极限转化。

考虑一扁平形状的空洞(图1)，取一光滑曲面  $\Omega$ ， $\Omega$  与空洞边界的交线为  $\Gamma$ 。我们在  $\Omega$  面内的任一点都建立这样一个局部坐标系  $x^L(x_1^L, x_2^L, x_3^L)$ ，使  $x_3^L$  轴沿着此点的法线  $n(x_1^L, x_2^L, x_3^L)$  的方向。我们不把  $\Omega$  面取成平面，目的是为了得出的方程适用于任何形状的三维裂纹。令  $x_{31}^L$  和  $x_{32}^L$  分别为  $x_3^L$  轴同空洞上、下表面的交线， $\epsilon(x^L)$  为空洞的横向尺寸，当  $\epsilon \rightarrow 0$  时， $x_{31}^L, x_{32}^L$  都趋于 0。对于

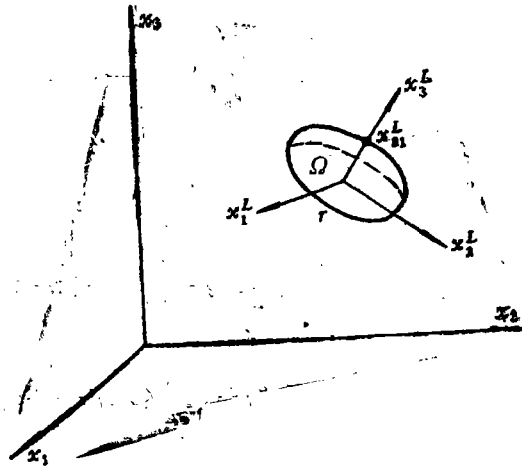


图1 空洞转化成裂纹示意图

于一个固定点  $x \in h$ ， $h$  表示空洞区，方程(2.12)及方程(2.13)式中的积分核  $K_{ijkl}$ ,  $S_{ijkl}$  均为

光滑有界函数, 由此, 我们可以得到下面公式,

$$\begin{aligned} & \int_{h_a} K_{ijkl}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') C_{kilmn}^M \varepsilon_{mn}^I dV(\mathbf{x}') \\ &= \int_{\Omega_a} K_{ijkl}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') C_{kilmn}^M n_{(m} b_{n)} dS(\mathbf{x}') + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\int_{h_a} S_{ijkl}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \varepsilon_{ij}^I dV(\mathbf{x}') = \int_{\Omega_a} S_{ijkl}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') n_{(k} b_{l)} dS(\mathbf{x}') + O(\epsilon) \quad (2.15)$$

式中  $\Omega_a$  为第  $a$  个裂纹面,  $n_m, b_n$  分别为裂纹面的单位法线矢量及张开位移。且

$$n_{(k} b_{l)} = \frac{1}{2} (n_k b_l + n_l b_k) \quad (2.16)$$

将(2.14)式及(2.15)式分别代入(2.12)及(2.13)式中, 可以得到含随机分布微裂纹的弹性介质基本场方程为

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \sum_{a=1}^{N_V} \int_{\Omega_a} K_{ijkl}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') C_{kilmn}^M n_{(m} b_{n)} dS(\mathbf{x}') \quad (2.17)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 - \sum_{a=1}^{N_V} \int_{\Omega_a} S_{ijkl}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') n_{(k} b_{l)} dS(\mathbf{x}') \quad (2.18)$$

下面, 我们引入随机点场模型, 目的是为了能通过(2.12)、(2.13)式以及(2.17)、(2.18)式得到随机场量的统计规律性。

假设:

1. 在体积  $V$  中, 缺陷的数目服从泊松分布, 其参数为  $\lambda$ , 即对于  $m=0, 1, 2, \dots$ ,

$$P_r[N_V=m] = (m!)^{-1} \left( \int_V \lambda dV \right)^m \cdot \exp \left[ - \int_V \lambda dV \right] \quad (2.19)$$

式中  $P_r[N_V=m]$  是  $N_V=m$  的概率,  $\lambda$  是单位体积内缺陷的平均数目。

2.  $\{N_v, v \subset V\}$  在不相交的区域中具有独立的增量, 即对于  $v=u_1, u_2, \dots, u_k$ ,

$$P_r[N_{v_1}=n_1, N_{v_2}=n_2, \dots, N_{v_k}=n_k] = \prod_{i=1}^k P_r[N_{v_i}=n_i] \quad (2.20)$$

根据(2.12)式、(2.13)式以及(2.17)式、(2.18)式, 由于材料中缺陷的存在而引起应变场及应力场的摄动项均可以表示成

$$A_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{N_V} A_{ij}^a(\mathbf{x}-\mathbf{r}_a; \phi_a) \quad (2.21)$$

式中  $\mathbf{r}_a$  是第  $a$  个缺陷的中心位置,  $\phi_a$  代表第  $a$  个缺陷的方位及尺寸。随机场量的特征函数可以定义为,

$$M_A \triangleq E[\exp(i\alpha_{ij} A_{ij})] \quad (2.22)$$

式中  $\alpha_{ij}$  是常张量,  $E[\ ]$  表示取均值,  $i$  为虚数单位, 将(2.21)式代入(2.22)式中, 得到

$$M_A = E \left\{ \exp \left[ i \alpha_{ij} \sum_{a=1}^{N_V} A_{ij}^a(\mathbf{x} - \mathbf{r}_a; \phi_a) \right] \right\} \quad (2.23)$$

利用条件期望的性质(2.23)式可以表示成

$$M_A = P_r[N_V=0] + \sum_{m=1}^{\infty} P_r[N_V=m] \cdot E \left\{ \exp \left( i \sum_{a=1}^m \alpha_{ij} A_{ij}^a \right) \middle| (N_V=m) \right\} \quad (2.24)$$

式中  $E\{\}$  表示在  $N_V=m$  的条件下, 仅对缺陷的方位及尺寸取均值。将(2.19)式代入(2.24)式中并利用假设又可以得到,

$$M_A = \exp \left\{ \int_V \lambda E[\exp(i \alpha_{ij} A_{ij}^a) - 1] dV(\mathbf{r}_a) \right\} \quad (2.25)$$

通过特征函数同各阶矩之间的简单关系, 可以得到随机场量  $A_{ij}$  的均值表达式为

$$\langle A_{ij} \rangle = i^{-1} \partial M_A / \partial \alpha_{ij} \quad (\text{当 } \alpha_{ij} = 0 \text{ 时}) \quad (2.26)$$

将(2.25)式代入(2.26)式中, 我们得到

$$\langle A_{ij} \rangle = \int_V \lambda E[A_{ij}^a(\mathbf{x} - \mathbf{r}_a; \phi_a)] dV(\mathbf{r}_a) \quad (2.27)$$

式中, 积分号内的  $E[\ ]$  表示仅对缺陷的方位及尺寸取均值。下面, 我们将利用(2.27)式对椭球空洞形缺陷以及元片状微裂纹缺陷进行具体的讨论。

### 三、含有随机分布椭球形空洞的弹性介质

将(2.12)式及(2.13)式中最后一项做为  $A$  张量, 并分别代入(2.27)式中, 我们得到关于空洞缺陷介质的均值场方程为

$$\langle e_{ij} \rangle = e_{ij}^0 + \int_V \lambda E \left[ \int_{h_a} K_{ijkl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') C_{klmnp}^M e_{mn}^i dV(\mathbf{x}') \right] dV(\mathbf{r}_a) \quad (3.1)$$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0 - \int_V \lambda E \left[ \int_{h_a} S_{ijkl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e_{kl}^i dV(\mathbf{x}') \right] dV(\mathbf{r}_a) \quad (3.2)$$

对于空洞在材料中完全均匀分布情况,  $\lambda$  等于常数  $n$ , 物理意义是表示单位体积中空洞的平均数目。在后文中, 我们主要就这种情况讨论如下问题。

#### 1. 椭球空洞内部的平均应变场

以(3.1)式及(3.2)式可以看出空洞内部的平均应变场是解决这种介质弹性场分布规律的关键。设  $\mathbf{x}$  点位于空洞夹杂的内部, 这时强度函数  $\lambda$  成为,

$$\lambda(\mathbf{r}_a) = \begin{cases} \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{x}) & (\mathbf{r}_a \in h_x) \\ n & (\mathbf{r}_a \in h_x) \end{cases} \quad (3.3)$$

式中  $h_x$  为以  $\mathbf{x}$  为中心的空洞区域。将(3.3)式代入(3.1)式中, 并经过一定的数学处理可以得到

$$E(e_{ij}^i) = \frac{1}{1 - v_f} (I - \langle P \rangle : C^M)^{-1}_{ij} e_{ij}^0 \quad (3.4)$$

式中  $I$  为单位张量,  $v_f$  为空洞的体积含量,  $P$  张量是 Kunin<sup>[3]</sup> 在研究单一椭球夹杂问题时

引入的, 在同椭球空洞相联的局部坐标系中, 它们的分量表示在附录 1 中。〈 〉表示对于椭球空洞的方位取平均。

### 2. 椭球空洞周围的平均应力集中场

由于我们已经求得了空洞内部的平均应变场, 这样为了寻求某一空洞周围的应力集中场, 我们可以利用单体问题的研究结果。

$$\sigma_{ijk}^i(n) = S_{ijk}^i(n) E(e_{ij}^i) \quad (3.5)$$

式中  $n$  表示空洞表面各点单位法线矢量。

$$S_{ijk}^i(n) = \frac{2\mu_0}{1-\nu_0} [\nu_0 (E_{ijk}^i - E_{ijk}^i - E_{ijk}^i) + (1-\nu_0) (E_{ijk}^i - 2E_{ijk}^i) + E_{ijk}^i] \quad (3.6)$$

式中  $E_{ijk}^i \sim E_{ijk}^i$  是仅同 Kronecker 张量和  $n$  有关的张量, 其具体表达式可见附录 I。 $\mu_0$  和  $\nu_0$  分别为基体的剪切模量和泊松比。

### 3. 算例

我们利用公式(3.4)及(3.5)分别计算了方位单向及随机的旋转椭球形空洞的介质中, 空

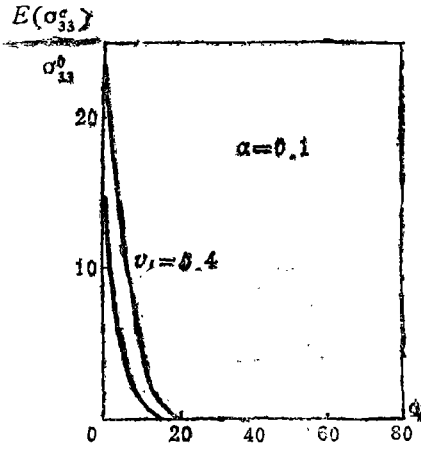


图 2 单向排列椭球空洞应力集中场

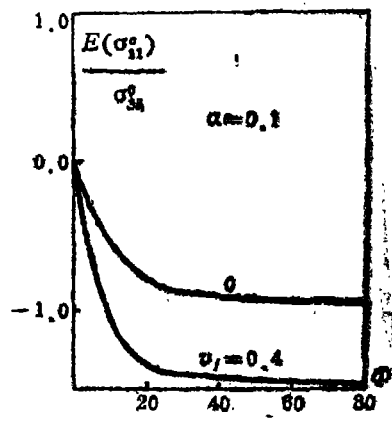


图 3 单向排列椭球空洞应力集中场

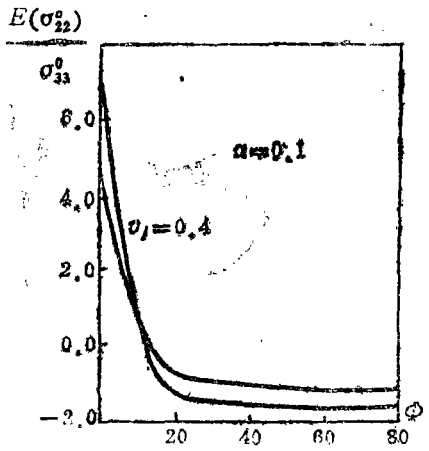


图 4 单向排列椭球空洞应力集中场

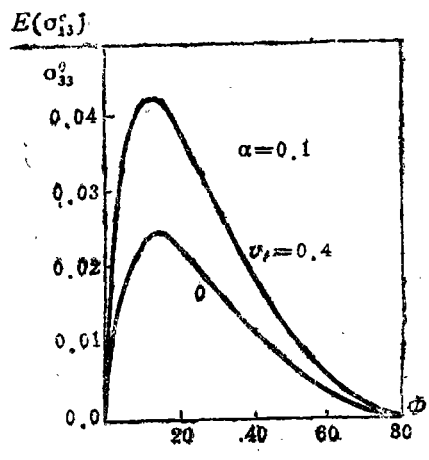


图 5 单向排列椭球空洞应力集中场

洞周围的应力集中场。材料性能为,  $E_0=2.76\text{GPa}$ ,  $\nu=0.35$ , 长径比  $\alpha=0.1, 1, 10$ 。图2~图11绘出了空洞周围应力集中随角度 $\Phi$ (图12)的变化曲线。体积含量 $\nu_j=0$ 的曲线对应于单一空洞的情况。从图中可以发现, 材料内部随机分布有多个空洞的情况下 ( $\nu_j=0.4$ ), 使

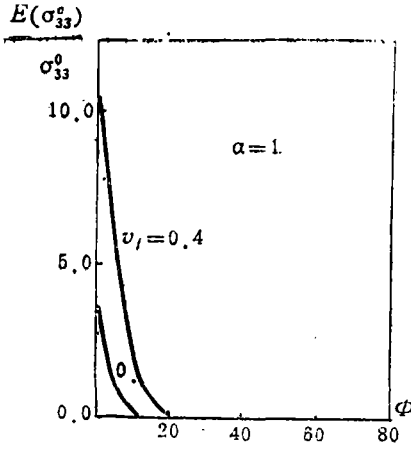


图 6 单向排列椭球空洞应力集中场

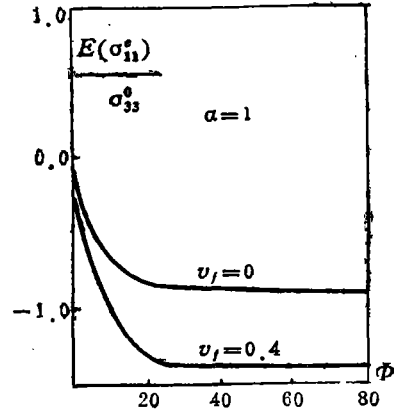


图 7 单向排列椭球空洞应力集中场

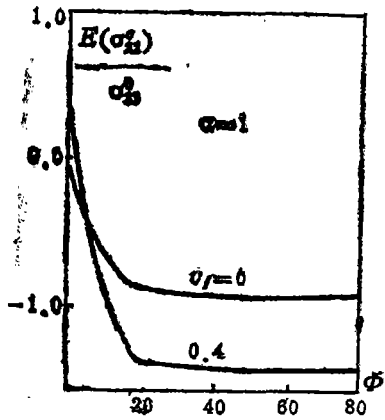


图 8 单向排列椭球空洞应力集中场

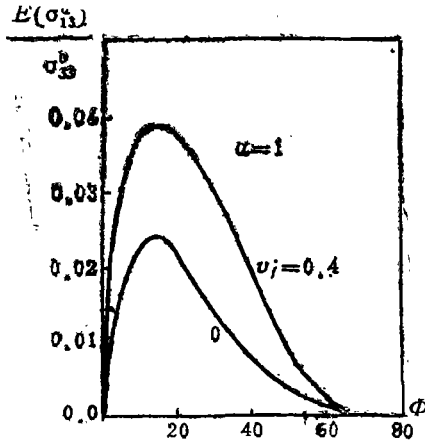


图 9 单向排列椭球空洞应力集中场

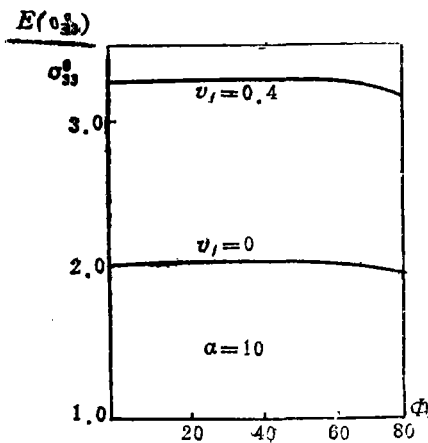


图10 单向排列椭球空洞应力集中场

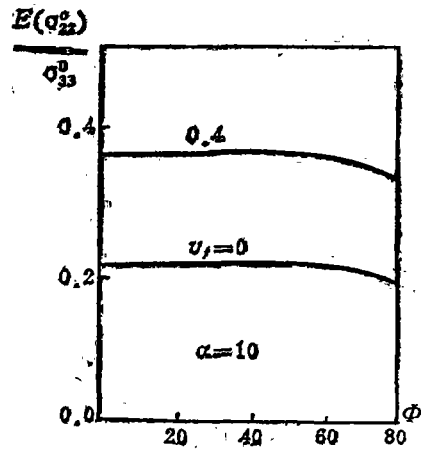


图11 单向排列椭球空洞应力集中场

得应力集中效果明显增大。由于  $\alpha=10$  时，其它两个应力分量较少而没有绘出。当空洞方位为随机分布情况，计算结果示于表1中。

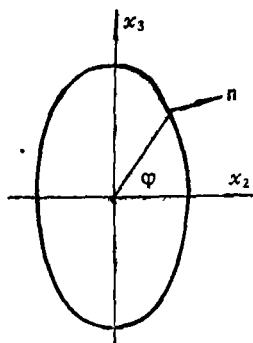


图12 椭球夹杂示意图

#### 四、含有随机分布元片状裂纹的弹性介质

将(2.17)式及(2.18)式中的最后一项，分别作为  $A$  张量代入(2.27)式中，我们得到关于微裂纹缺陷介质的均值场方程为

$$\langle e_{ij} \rangle = e_{ij}^0 + \int_V \lambda E \left[ \int_{\Omega_0} K_{ijkl}(x-x') C_{kilmn}^M n_{(m} b_{n)} dS(x') \right] dV(r_a) \quad (4.1)$$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0 - \int_V \lambda E \left[ \int_{\Omega_0} S_{ijkl}(x-x') n_{(k} b_{l)} dS(x') \right] dV(r_a) \quad (4.2)$$

假设：设含有随机分布裂纹的基体中平均应力场为  $\langle \sigma_{ij}^M \rangle$ ，则认为任一个裂纹所受到的平均应力场为  $\langle \sigma_{ij}^M \rangle$ 。

有了如上的假设，我们可以通过无限大体中含单一裂纹在应力场  $\langle \sigma_{ij}^M \rangle$  的作用下的解而得出裂纹上、下表面的张开位移。为了问题的简化，这里不妨采用张开位移在整个裂纹面内的均值作为(4.1)式及(4.2)式中的值，即

$$\langle n_{(m} b_{n)} \rangle = \frac{1}{S_0} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (n_m b_n + n_n b_m) dS \quad (4.3)$$

式中  $S_0$  为裂纹面积。对于半径为  $a$  的元片状裂纹，在裂纹局部坐标系中

$$\langle n_{(m} b_{n)} \rangle = F_{mn}^L r_q \langle \sigma_{ij}^M \rangle \quad (4.4)$$

式中

$$F_{3333}^L = \frac{16(1-\nu_0^2)}{3E_0 S_0} a^3, \quad F_{1313}^L = F_{2323}^L = \frac{8(1-\nu_0^2)}{3E_0(2-\nu_0) S_0} a^3 \quad (4.5)$$

其余分量为零。

##### 1. 基体中的平均应力场

为了求得基体中的平均应力场，设  $x$  处于基体中，考虑到裂纹之间不能相交，可以得

$$\lambda(r_a) = \begin{cases} 0 & (|r_a - x| \leq a) \\ n & (\text{其它}) \end{cases} \quad (4.6)$$

将(4.6)式以及(4.4)式代入(4.2)式中，并经过一定的数学处理可以得到

表 1 随机方位的薄球壳空腔周围的应力集中场

长径比 $\alpha$	应力 体积 含量 $\Phi$	0.1				1.0				10			
		$\frac{E(\sigma_{33}^0)}{\sigma_{33}^0}$	$\frac{E(\sigma_{11}^0)}{\sigma_{33}^0}$	$\frac{E(\sigma_{22}^0)}{\sigma_{33}^0}$	$\frac{E(\sigma_{13}^0)}{\sigma_{33}^0}$	$\frac{E(\sigma_{33}^0)}{\sigma_{33}^0}$	$\frac{E(\sigma_{11}^0)}{\sigma_{33}^0}$	$\frac{E(\sigma_{22}^0)}{\sigma_{33}^0}$	$\frac{E(\sigma_{13}^0)}{\sigma_{33}^0}$	$\frac{E(\sigma_{33}^0)}{\sigma_{33}^0}$	$\frac{E(\sigma_{11}^0)}{\sigma_{33}^0}$	$\frac{E(\sigma_{22}^0)}{\sigma_{33}^0}$	$\frac{E(\sigma_{13}^0)}{\sigma_{33}^0}$
0.0	0	2.07	0.00	0.21	0.00	2.07	0.00	0.21	0.00	2.07	0.00	0.21	0.00
	20	0.00	-0.78	-0.79	0.02	1.53	0.20	0.10	-0.56	2.07	0.00	0.21	-0.01
	40	0.00	-0.79	-0.79	0.00	0.52	0.37	-0.20	-0.44	2.07	0.00	0.21	-0.02
	60	0.00	-0.79	-0.79	0.00	0.02	-0.05	-0.54	0.03	2.07	0.00	0.21	0.04
0.4	0	0.00	-0.79	-0.79	0.00	-0.02	-0.68	-0.76	0.12	2.06	0.00	0.21	-0.12
	20	3.45	0.00	0.36	0.00	3.45	0.00	0.36	0.00	3.45	0.00	0.36	0.00
	40	0.00	-1.30	-1.31	0.04	2.55	0.34	0.16	-0.93	3.46	0.00	0.36	-0.01
	60	0.00	-1.31	-1.31	0.02	0.97	0.61	-0.33	-0.73	3.46	0.00	0.36	-0.03
0.8	0	0.00	-1.31	-1.31	0.01	0.03	-0.09	-0.89	0.05	3.45	0.00	0.36	-0.06
	20	0.00	-1.31	-1.31	0.00	-0.004	-1.13	-1.26	0.20	3.43	0.01	0.35	-0.20
	40	10.40	0.00	1.07	0.00	0.40	0.00	1.07	0.00	10.40	0.00	1.07	0.00
	60	0.04	-3.91	-3.91	0.11	7.67	1.02	0.49	-2.79	10.40	0.00	1.07	-0.04
	0.8	0.00	-3.93	-3.93	0.05	2.61	1.84	-0.99	-2.19	10.40	0.00	0.07	-0.09
	80	0.00	-3.93	-3.93	0.02	0.09	-0.27	-2.69	0.16	10.40	0.00	1.07	-0.18
	80	0.00	-3.93	-3.93	0.01	-0.11	-3.39	-3.78	0.60	10.30	0.03	1.06	-0.58



$$\langle \sigma_{ij}^M \rangle = [I - nS_0 D : \langle E \rangle]^{-1}_{ijkl} \sigma_{kl}^0 \quad (4.7)$$

式中

$$D_{2qmn} = D_1 E_{2qmn}^1 + D_2 E_{2qmn}^2 \quad (4.8)$$

式中

$$D_1 = \frac{2\mu_0}{15} \times \frac{7-5\nu_0}{1-\nu_0}, \quad D_2 = \frac{2\mu_0}{15} \times \frac{5\nu_0+1}{1-\nu_0} \quad (4.9)$$

(1) 裂纹方位完全随机分布情况

这种情况下, 对  $F$  张量取方位平均可以得到

$$\langle F_{ijkl} \rangle = F_1 E_{ijkl}^1 + F_2 E_{ijkl}^2 \quad (4.10)$$

式中

$$F_1 = \frac{32(1-\nu_0^2)(5-\nu_0)}{45(2-\nu_0)S_0 E_0} \cdot \langle \alpha^3 \rangle \quad (4.11)$$

$$F_2 = -\frac{16\nu_0(1-\nu_0^2)}{45(2-\nu_0)S_0 E_0} \cdot \langle \alpha^3 \rangle \quad (4.12)$$

将(4.8)式及(4.10)式代入(4.7)式中, 得到

$$\langle \sigma_{ij}^M \rangle = (G_1 E_{ijkl}^1 + G_2 E_{ijkl}^2) \sigma_{kl}^0 \quad (4.13)$$

式中

$$G_1 = \frac{1}{1-nS_0 D_1 F_1} \quad (4.14)$$

$$G_2 = \frac{D_2 F_1 + D_1 F_2 + 3D_2 F_2}{(1-nS_0 D_1 F_1)^2 + 3(1-nS_0 D_1 F_1)(D_2 F_1 + D_1 F_2 + 3D_2 F_2)} \quad (4.15)$$

在单向载荷作用下, 图13及图14分别绘出了基体中平均应力分量随  $n\langle \alpha^3 \rangle$  变化曲线。

(2) 所有裂纹平面均平行于给定的  $(\theta_1, \theta_2)$  平面

这种情况下, 整体材料表现为横观各向同性性质。将  $F^L$  张量代入(4.7)式中, 得到

$$E(\sigma_{33}^M) = \sigma_{33}^0 / (1+nS_0 D_{3333} \cdot F_3^L) \quad (4.16)$$

其余的分量也可以相应地求出。

## 2. 裂纹体的有效弹性模量

认为微裂纹在材料中是均匀分布的, 即

$$\lambda = n \quad (4.17)$$

将(4.17)式代入(4.1)式, 可以得到

$$\langle e_{ij} \rangle = e_{ij}^0 + nS_0 E \langle n_{(ij)} \rangle \quad (4.18)$$

式中,  $E(\ )$  表示进行方位平均。由(4.18)式可以将有效柔度张量表示成

$$B_{ijkl}^* = B_{ijkl}^0 + nS_0 \langle F_{ijmn} \rangle \cdot [I - nS_0 D : \langle E \rangle]^{-1}_{mkl} \quad (4.19)$$

(1) 方位完全随机分布

将(4.10)式代入(4.19)式中, 可以得到,

$$\frac{\mu^*}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{1}{B_1^*}, \quad \frac{E^*}{E_0} = \frac{1}{E_0} \cdot \frac{1}{B_1^* + B_2^*} \quad (4.20)$$

式中

$$B_1^* = \frac{1}{2\mu_0} + nS_0 G_1, \quad B_2^* = -\frac{\nu_0}{E_0} + nS_0 (F_1 G_1 + F_2 G_2 + 3F_2 G_2) \quad (4.21)$$

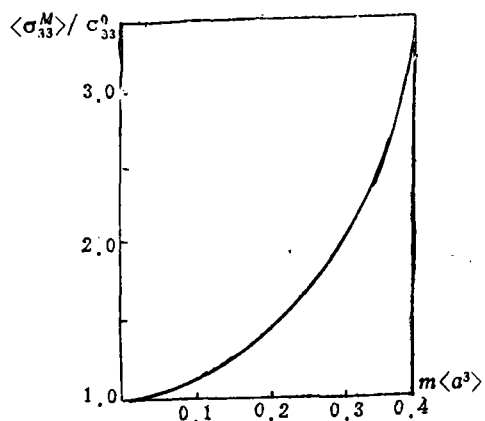


图13 含微裂纹的基体中平均应力

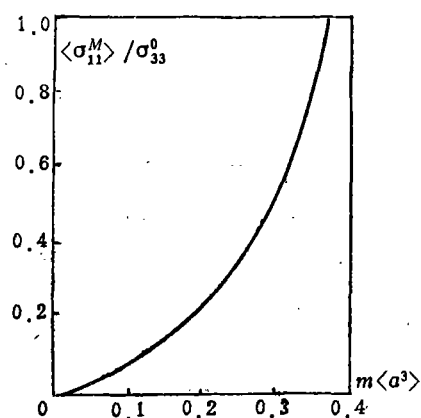


图14 含微裂纹的基体中平均应力

在图15及图16中绘出了(4.20)式值。虚线为[1]中用自恰方法计算结果。杨氏模量两者十分接近,在图15中仅绘出了本文计算曲线。

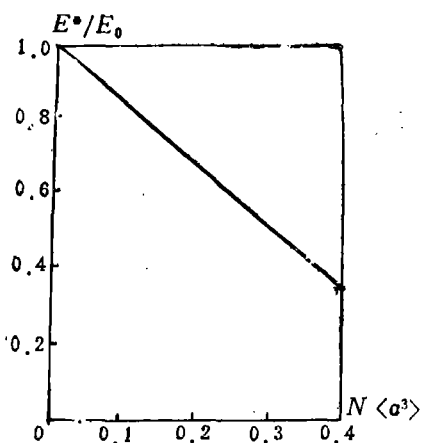


图15 含微裂纹介质的有效弹性模量

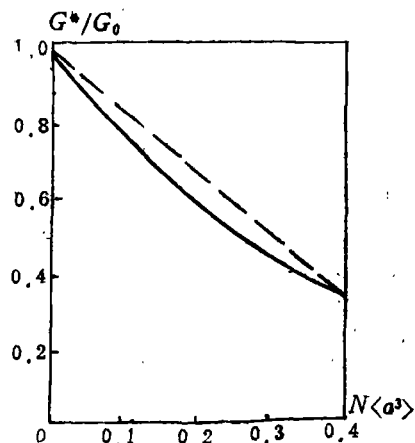


图16 含微裂纹介质的剪切模量

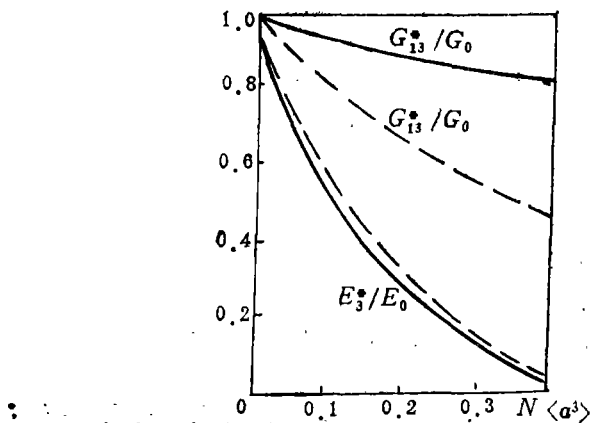


图17 含单向排列微裂纹介质的模量

(2) 所有裂纹平行于  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  平面。

这种情况下, 材料呈现横观各向同性性质。

$$\frac{E_3^*}{E_0} = 1 / \left( 1 + \frac{nS_0 F_{333}^L}{1 + nS_0 D_{3333} \cdot F_{333}^L} \right) \quad (4.22)$$

$$E_1^* = E_2^* = E_0 \quad (4.23)$$

$$\frac{G_{13}^*}{G_0} = 1 / \left( 1 + \frac{nS_0 F_{1313}^L}{1 + nS_0 D_{1313} \cdot F_{1313}^L} \right) \quad (4.24)$$

$$G_{12}^* = G_0 \quad (4.25)$$

应用自恰方法, Hoeng<sup>[4]</sup> 数值计算了此种情况有效弹性模量。图17中绘出了两种方法计算结果, 实线为本文计算结果。

## 附 录 I

在同椭球三半轴相联的坐标系中,  $P$  张量具有正交对称性, 由九个独立分量组成, 为

$$P_{1111}^L = k_0(3I_{11} + (1-4\nu_0)I_1), \quad P_{1122}^L = k_0(I_{21} - I_1)$$

$$P_{1212}^L = \frac{k_0}{2} [I_{21} + I_{12} + (1-2\nu_0)(I_1 + I_2)] \quad (A1.1)$$

式中

$$I_p = \frac{3}{2} \nu \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a_p^2 + \xi) \mathcal{A}(\xi)}, \quad I_{pq} = \frac{3}{2} \nu a_p^2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a_p^2 + \xi)(a_q^2 + \xi) \mathcal{A}(\xi)} \quad (A1.2)$$

$$k_0 = 1/[16\pi\mu_0(1-\nu_0)] \quad (A1.3)$$

$$\mathcal{A}(\xi) = \sqrt{(a_1^2 + \xi)(a_2^2 + \xi)(a_3^2 + \xi)} \quad (p, q = 1, 2, 3) \quad (A1.4)$$

其余的六个分量可以周期地替换角标1, 2, 3而得到。

## 附 录 I

$$E_{ijkl}^1 = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$E_{ijkl}^2 = \delta_{ij}\delta_{kl}$$

$$E_{ijkl}^3 = \delta_{ij}n_k n_l$$

(A2.1)

$$E_{ijkl}^4 = n_i n_j \delta_{kl}$$

$$E_{ijkl}^5 = \frac{1}{4} (n_i n_k \delta_{jl} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_k \delta_{il} + n_j n_l \delta_{ik})$$

$$E_{ijkl}^6 = n_i n_j n_k n_l$$

## 参 考 文 献

- [1] Budiansky, B. and R. J. O'Connell, Elastic moduli of a cracked solid, *Int. J. Solids Structures*, 12 (1976).
- [2] 王彪, 随机夹杂理论, 哈尔滨工业大学博士论文 (1988).
- [3] Kunin, I. A., *Elastic Media with Microstructure, I. Three-dimensional problems*, Springer-Verlag (1983).
- [4] Hoeng, A., Elastic moduli of a non-randomly cracked body, *Int. J. Solids Structures*, 15 (1979).

## Elastic Media with Randomly Distributed Defects

Wang Biao Wang Dian-fu Wang Duo

*(Haerbin Institute of Technology, Haerbin)*

### Abstract

In this paper, the elastic field in a solid with randomly distributed defects is derived. These defects are composed of cavities and microcracks, whose locations, orientation and size are random variables. The Random Point Field Model is proposed to describe the random defects, and the basic equations for elastic field in a random defect medium are developed. Two examples are studied in detail. One is a solid with random microcracks and the other is a solid with ellipsoidal cavities.