应用数学和力学，第10卷第11期（1989年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性扩散方程静态解的稳定性*

张　国　初

（北京经济学院经济数学系，1988年11月29日收到）

摘　要

在本文中我们考虑下列非线性扩散方程在时间充分长时的性态

$$u_t=(\varphi(u))_{xx}+\psi(u),\qquad (x\in R,t\in R^+=(0,+\infty))$$

其中 函数$\varphi(u)$和$\psi(u)$允许此方程具有行波解．首先我们给出该方程柯西问题的广义解的存在性、唯一性和一些比较原理．然后给定$\varphi(u)$的某些条件，我们证明了一些阈值效应．由这些结果我们可以看到在这些假设条件下，静态解$u=\alpha$是稳定的，而$u=0$或$u=1$是不稳定的，等等．

一、引　言

本文中我们要研究的主要方程是

$$u_t=(\varphi(u))_{xx}+\psi(u)\qquad (x\in R,\ t\in R^+=(0,+\infty))\tag{1.1}$$

$$u(x,\ 0)=u_0(x)\geqslant 0\qquad (x\in R),\tag{1.2}$$

其中 $\varphi(u)$，$\psi(u)$和$u_0(x)$满足某些条件，这些条件将在下节中给出．这里我们假设$\varphi'(0)=0$，$u>0$时$\varphi'(u)>0$．当$u>0$时方程(1.1)是一个二阶抛物型偏微分方程；但是当$u=0$时，它蜕化为一阶方程．

这类问题出现在若干科学领域中，诸如描述气体动力学模型、火焰的化学力学以及生物种群遗传学．在正常的火焰传播过程中，由于分子热传导，热从较高层传到较低层．当温度从某一点升起来时，从该点开始化学反应并发散热，由热传导提高了周围气体的温度，于是燃烧漫延开来．这种反应将漫延到整个气体．当分子扩散系数和热扩散系数相同时，燃烧物质的温度和浓度成比例．因此这种过程几乎是各向同性的．函数$u(x,t)$可表示温度或浓度．在生物种群遗传学模型中，$u(x,t)$表示种群密度，而$\varphi(u)$代表种群流量，$\psi(u)$就是代表种群密度纯增长率的局部流．

Aronson 和 Weinberger[2]给出了一些关于方程$u_t=u_{xx}+\psi(u)$的阈值效应．例如假设$\psi(u)$满足某些条件，$\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=\alpha$，或$u\equiv0$，或$u\equiv1$，其中$0<\alpha<1$．我们把一些阈值效应的结果推广到关于方程(1.1)．

* 李骊推荐．

二、一些预备性结果

本节我们给出下列柯西问题解的存在性、唯一性和比较原理.

$$u_t=(\varphi(u))_{xx}+\psi(u) \qquad ((x,t)\in R\times R^+) \tag{2.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0 \qquad (x\in R) \tag{2.2}$$

如果我们记$v=\varphi(u)$，而且定义$\Phi(v)=u$，则

$$\Phi=\varphi^{-1} \text{ 或 } \varphi=\Phi^{-1}$$

假设Φ，φ，ψ满足下列基本条件

(i) $\Phi(v)\in C^\tau([0,M])$，$\tau\in(0,1)$，$M>0$；

(ii) $\varphi(u)\in C^{1+\beta}([0,M])\cap C^{2+\beta}([m,M])$，$\beta\in(0,1)$，$0<m<M$；

(iii) $\varphi^{(k)}(u)\geqslant 0$，$k=0$，1，2；当$u>0$时$\varphi'(u)>0$，$\varphi'(0)=\varphi(0)=0$；

(iv) $\psi(u)\in C([0,M])\cap C^{1+\tau}([m,M])$，$\tau\in(0,1)$，$0<m<M$；

(v) $\psi(0)=0$，$\psi(u)$关于$u\geqslant 0$连续，对充分大的u，$\psi(u)\leqslant 0$；

(vi) $u_0(x)\geqslant 0$有界，u_0和u_0'连续，而且$\varphi(u_0(x))$是 Lipschitz 连续.

例如$\varphi(u)=u^n$，$\psi(u)=u(1-u)(u-\alpha)\ (0<\alpha<1/2)$就满足这些条件.

定义 1 一个有界的满足 Hölder 条件的函数$u(x,t)\geqslant 0$，如果在包含于 $R\times R^+$中的闭域G中满足下列积分等式，我们称它为 (2.1) 的广义解：

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}[\varphi(u)f_{xx}+uf_t+\psi(u)f]dxdt-\int_{x_0}^{x_1}uf\Big|_{t_0}^{t_1}dx-\int_{t_0}^{t_1}\varphi(u)f_x\Big|_{x_0}^{x_1}dt=0 \tag{2.3}$$

其中$f(x,t)$是任意连续函数，定义在 $[x_0,x_1]\times[t_0,t_1]\subset G$上$(t_0<t_1,x_0<x_1)$，另外 f_t，f_x，f_{xx}也连续而且当$x=x_0$，$x=x_1$时f为零。在本定义中G可能就是$R\times R^+$.

定义 2 如果在定义1中给定的u也满足(2.2)，那么它就称为 (2.1) 和 (2.2) 的广义解.

下面是方程 (2.1) 和 (2.2) 的广义解的存在性定理.

定理 1 存在 (2.1) 和 (2.2) 的广义解. 在$R\times R^+$中的点 (x,t)，当$t>0$ 以及 $u(x,t)>0$时，函数$u(x,t)$有连续导数 u_t，u_x，u_{xx}，而且它在通常意义下满足(2.1).

定理的证明参见文献[8].

下面我们再给出一些解的比较原则和唯一性定理.

定理 2 考虑下列柯西问题

$$u_t=[\varphi(u)]_{xx}+\psi(u) \qquad ((x,t)\in G_l\text{或}(x,t)\in H_l) \tag{1.1$'$}$$

其中 $G_l=\{l<x<+\infty,\ 0<t<+\infty\}$，$H_l=\{-\infty<x<l,\ t>0\}$

$$u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0 \qquad (l\leqslant x<+\infty \text{ 或} -\infty<x\leqslant l) \tag{1.2$'$}$$

假设定理1中条件(i)到(vi)成立；$u(x,t)$是(1.1)$'$和(1.2)$'$的广义解；$w(x,t)$是(1.1)$'$的广义解，而且

$$u_0(x)\leqslant w(x,0) \qquad (l<x<+\infty\text{或}-\infty<x<l) \tag{2.4}$$

$$u(l,\ t)\leqslant w(l,\ t) \qquad (t\geqslant 0) \tag{2.5}$$

那么 $$u(x,t)\leqslant w(x,t) \qquad ((x,t)\in G_l\text{或}H_l)$$

而且如果$u(l,t)$不恒等于$w(l,t)$，那么在G_l (或H_l) 中$u(x,t)<w(x,t)$.

证明参见文献[8]。

如果G_l（或H_l）扩充到$R\times R^+$中，我们不难推得下面定理。

定理 3 给定第二节的假设条件(i)～(vi)；假设$u(x,t)$是方程（1.1）和（1.2）的广义解；$w(x,t)$是（1.1）的广义解，而且$u_0(x)=u(x,0)\leqslant w(x,0)$，$x\in R$。那么

$$或者\ u(x,t)\equiv w(x,t),\ 或者\ u(x,t)<w(x,t).$$

推论 1 在定理3的假设条件之下，柯西问题（1.1）和（1.2）的解是唯一的。

证明 直接用以上定理即可推得。

由定理1可知，在$u(x,t)>0$的点(x,t)，方程（1.1）′可写成如下形式：

$$v_{xx}-\Phi'(v)v_t+\psi(\Phi(v))=0 \tag{2.6}$$

因为$\varphi'(u)\geqslant 0$，$\hat{u}\geqslant u$意味着$\hat{v}\geqslant v$，其中$\hat{v}=\varphi(\hat{u})$，$v=\varphi(u)$。由此得下面推论。

推论 2 设$u(x,t)$是（1.1）′和（1.2）′在G_l中广义解，$\hat{u}(x,t)$是(1.1)′在G_l中广义解，而且

$$u_0(x)\leqslant\hat{u}(x,0)\qquad(l\leqslant x<+\infty) \tag{2.7}$$

$$u(l,t)\leqslant\hat{u}(l,t)\qquad(0\leqslant t<+\infty) \tag{2.8}$$

即

$$v(x,0)\leqslant\hat{v}(x,0)\qquad(l\leqslant x<+\infty) \tag{2.9}$$

$$v(l,t)\leqslant\hat{v}(l,t)\qquad(0\leqslant t<+\infty) \tag{2.10}$$

那么在G_l中

$$v(x,t)\leqslant\hat{v}(x,t)$$

证明 由(2.7)，(2.8)和定理2，$u(x,t)\leqslant\hat{u}(x,t)$，于是$v(x,t)\leqslant\hat{v}(x,t)$。

推论 3 设$v(x,t)$和$\hat{v}(x,t)$是（2.6）在$R\times R^+$中的解，而且在R中$v(x,0)\leqslant\hat{v}(x,0)$，那么

$$v(x,t)\leqslant\hat{v}(x,t),\ (x,t)\in R\times R^+$$

证明 显然。

三、静态解的稳定性

在证明阀门效应之前我们先给出一些引理。这些引理是本节余下部分主要工具。为便于后面证明时使用，我们把定理2、定理3和推论2、3重新叙述成下面的引理1和引理1′。贯穿本节中，φ，ψ满足第二节中的条件(i)到(vi)。

引理 1 设$u(x,t)\in[0,1]$，$\tilde{u}(x,t)\in[0,1]$满足

$$u_t-(\varphi(u))_{xx}-\psi(u)=0$$

$$\tilde{u}_t-(\varphi(\tilde{u}))_{xx}-\psi(\tilde{u})=0\qquad((x,t)\in(a,b)\times(0,T])$$

$$0\leqslant\tilde{u}(x,0)\leqslant u(x,0)\leqslant 1\qquad(x\in(a,b))$$

其中 $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$，$0<T\leqslant+\infty$。

而且如果$a>-\infty$，假设

$$0\leqslant\tilde{u}(a,t)\leqslant u(a,t)\leqslant 1\qquad(t\in[0,T]);$$

如果$b<+\infty$，假设

$$0\leqslant\tilde{u}(b,t)\leqslant u(b,t)\leqslant 1\qquad(t\in[0,T])$$

那么在$(a,b)\times(0,T]$上，$u\geqslant\tilde{u}$。

由于$v=\varphi(u)$，引理1可写成另一形式。

引理1′ 设$v(x,t)\in[0,\varphi(1)]$，$\bar{v}(x,t)\in[0,\varphi(1)]$满足

$$\Psi'(v)v_t-v_{xx}-\Psi(v)=0$$
$$\Psi'(\bar{v})\bar{v}_t-\bar{v}_{xx}-\Psi(\bar{v})=0\qquad((x,t)\in(a,b)\times(0,T])$$
$$0\leqslant\bar{v}(x,0)\leqslant v(x,0)\leqslant\varphi(1)\qquad(x\in(a,b));$$

这里$\Phi(v)=u$，即$\Phi(\varphi(u))=u$；$\Psi=\psi\circ\Phi$；

$$-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty;\ 0<T\leqslant+\infty.$$

而且如果$a>-\infty$，设

$$0\leqslant\bar{v}(a,t)\leqslant v(a,t)\leqslant\varphi(1)\qquad(t\in[0,T]);$$

如果$b<+\infty$，设

$$0\leqslant\bar{v}(b,t)\leqslant v(b,t)\leqslant\varphi(1)\qquad(t\in[0,T]);$$

那么在$(a,b)\times(0,T]$中，$v\geqslant\bar{v}$。

下面证明另一对引理。

引理 2 设$q(x)\in[0,1]$是下列方程的静态广义解，即

$$(\varphi(q))_{xx}+\psi(q)=0\qquad(x\in(a,b),\ -\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)\tag{3.1}$$

如果$a>-\infty$假设$q(a)=0$；如果$b<+\infty$假设$q(b)=0$。设$u(x,t)$是(1.1)的广义解，$0\leqslant u(x,t)\leqslant1$，且

$$u(x,0)=\begin{cases}q(x)&(x\in(a,b))\\0&(x\in R\backslash(a,b))\end{cases}$$

那么$u(x,t)$对每个x是t的非减函数，而且在每个有界区间中$\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=\tau(x)$，其收敛是一致的，$\tau(x)$是下列方程的最小非负解：

$$(\varphi(\tau))_{xx}+\psi(\tau)=0\qquad(x\in R)\tag{3.2}$$

而且满足

$$\tau(x)\geqslant q(x)\qquad(x\in(a,b))\tag{3.3}$$

证明 由引理1以及$q(x)\geqslant0$得在$R\times R^+$中，$u(x,t)\geqslant0$。再次用引理1，在$(a,b)\times R^+$中$u(x,t)\geqslant q(x)$。设$u^h(x,t)=u(x,t+h)$，$(h>0)$，那么由上述不等式，

$$u^h(x,0)=u(x,h)\geqslant u(x,0)=\begin{cases}q(x)&(x\in(a,b))\\0&(x\in R\backslash(a,b))\end{cases}$$

再用引理1，$u^h(x,t)=u(x,t+h)\geqslant u(x,t)$，$(x,t)\in R\times R^+$。这意味着$u(x,t)$关于$t$非减。又因为对每个$x$，$u(x,t)\leqslant1$有界，所以$\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)$存在。设$\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=\tau(x)$。由定理1中的证明[8]，$u\in C^{2+\alpha}$，而且$u$，$u_t$，$u_x$和$u_{xx}$都满足 Hölder 条件。因此等度连续，而且一致有界。由 Arzela 定理，u，u_t，u_x，u_{xx}当$t\to\infty$时一致收敛。因此$\tau(x)$满足方程(3.2)。设$\sigma(x)$是(3.2)和(3.3)的非负解。因此$u(x,0)\leqslant\sigma(x)$。由引理1在$R\times R^+$中$u(x,t)\leqslant\sigma(x)$。因此

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=\tau(x)\leqslant\sigma(x)$$

这意味着$\tau(x)$是所求的最小解。

由$\Phi(\varphi(u))=u$和$\Phi=\psi\circ\Phi$，我们推得引理2的另一形式。

引理2′ 设$s(x)=\varphi(q(x))\in[0,\varphi(1)]$，因此它是下面方程的广义解：

$$s''+\Psi(s)=0\qquad(x\in(a,b),\ -\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)\tag{3.1′}$$

如果$a>-\infty$，设$s(a)=0$（注意，如果$q(a)=0$，那么$s(a)=\varphi(q(a))=\varphi(0)=0$）；如果$b<$

$+\infty$，设$s(b)=\varphi(q(b))=0$。设$v(x,t)$是下列方程的广义解：

$$\Phi'(v)v_t=v_{xx}+\Psi(v) \qquad ((x,t)\in R\times R^+) \tag{3.0}$$

而且

$$v(x,0)=\begin{cases} s(x) & (x\in(a,b)) \\ 0 & (x\in R\backslash(a,b)) \end{cases}$$

那么$v(x,t)$是（对每个x）关于t的非减函数，而且在每个有界区间中一致地有极限$\lim\limits_{t\to\infty}v(x,\ t)=\xi(x)$，$\xi(x)$是下列方程的最小非负解：

$$\xi''+\Psi(\xi)=0 \qquad (x\in R) \tag{3.2$'$}$$

而且满足

$$\xi(x)\geqslant s(x) \qquad (x\in(a,b)) \tag{3.3$'$}$$

证明 由引理1′以及$s(x)\geqslant 0$，得在$R\times R^+$中$v(x,t)\geqslant 0$。再用引理1′，在$(a,b)\times R^+$中$v(x,\ t)\geqslant s(x)$。然后由上述两个不等式，并定义函数$v^h(x,\ t)=v(x,\ t+h)$，即有$v^h(x,\ 0)=v(x,h)\geqslant v(x,0)$。再用引理1′，在$R\times R^+$中$v^h(x,t)=v(x,t+h)\geqslant v(x,t)$。因此$v(x,t)$关于$t$非减。因为$v(x,t)\leqslant\varphi(1)$，对每个$x$，极限$\lim\limits_{t\to\infty}v(x,t)$存在。令$\lim\limits_{t\to\infty}v(x,\ t)=\xi(x)$。类似于引理2，$\xi(x)$是(3.2)′的解。设$\beta(x)$是(3.2)′、(3.3)′的非负解，那么$v(x,0)\leqslant\beta(x)$。由引理1′得在$R\times R^+$中$v(x,t)\leqslant\beta(x)$。于是$\xi(x)=\lim\limits_{t\to\infty}v(x,t)\leqslant\beta(x)$。这意味着$\xi(x)$是所要的最小解。

类似于引理2和引理2′，我们得到另外一对引理。

引理 3 设$\tilde{q}(x)\in[0,1]$是下列方程的静态广义解：

$$(\varphi(\tilde{q}))_{xx}+\psi(\tilde{q})=0 \qquad (x\in(a,b))$$

其中φ，ψ如前所述，且$-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$。

如果$a>-\infty$，设$\tilde{q}(a)=1$，如果$b<+\infty$，设$\tilde{q}(b)=1$。设$u(x,t)\in[0,1]$是(1.1)的广义解，即

$$u_t=(\varphi(u))_{xx}+\psi(u) \qquad ((x,t)\in R\times R^+),$$

$$u(x,0)=\begin{cases} \tilde{q}(x) & (x\in(a,b)) \\ 1 & (x\in R\backslash(a,b)) \end{cases}$$

那么$u(x,t)$对每个x是关于t的非增函数，而且在每个有界区间内一致地有极限$\lim\limits_{t\to\infty}u(x,\ t)=\tilde{\tau}(x)$。$\tilde{\tau}(x)\in[0,1]$是下列方程的最大解：

$$(\varphi(\tilde{\tau}))_{xx}+\psi(\tilde{\tau})=0 \qquad (x\in R) \tag{3.4}$$

$$\tilde{\tau}(x)\leqslant\tilde{q}(x) \qquad (x\in(a,b)) \tag{3.5}$$

证明 与前证明完全类似。

由$\Phi(\varphi(u))=u$ 和 $\Psi=\psi\circ\Phi$，可得引理3的另一形式。

引理3′ 设$\tilde{s}(x)=\varphi(\tilde{q})\in[0,\varphi(1)]$，是下列方程的广义解：

$$\tilde{s}''+\Psi(\tilde{s})=0 \qquad (x\in(a,b),\ -\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty) \tag{3.6}$$

如果$a>-\infty$，设$\tilde{s}(a)=\varphi(1)$；如果$b<+\infty$，设$\tilde{s}(b)=\varphi(1)$。设$v(x,t)$是下列方程的广义解：

$$\Phi'(v)v_t=v_{xx}+\Psi(v) \qquad ((x,t)\in R\times R^+) \tag{3.7}$$

$$v(x,0)=\begin{cases}\bar{s}(x) & (x\in(a,b))\\ \varphi(1) & (x\in R\backslash(a,b))\end{cases}$$

那么对每个x，$v(x,t)$是t的非增函数，而且在每个有界区间内，一致地有极限$\lim\limits_{t\to\infty}v(x,t)=\bar{\xi}(x)$，$\bar{\xi}(x)\in[0,\varphi(1)]$是下列方程的最大解：

$$\bar{\xi}''+\Psi(\bar{\xi})=0 \qquad (x\in R) \tag{3.8}$$

$$\bar{\xi}(x)\leqslant\bar{s}(x) \qquad (x\in(a,b)) \tag{3.9}$$

证明　显然。

定理 4　设$u(x,t)\in[0,1]$是（1.1）的广义解，即

$$u_t=(\varphi(u))_{xx}+\psi(u) \qquad ((x,t)\in R\times R^+) \tag{1.1}$$

其中φ、Φ和ψ满足第二节中基本条件(i)～(vi)，但是$\varphi'(0)>0$。$\psi(0)=\psi(1)=0$，$\psi(u)\in C^1[0,1]$。

（i）　如果$\psi(u)$满足：当$0<u<\alpha$时$\psi(u)>0$，当$\alpha<u<1$时$\psi(u)<0$；对于$0<\alpha<1$，$\psi'(1)>0$；那么

或者$u(x,t)\equiv0$　或者$u(x,t)\equiv1$　或者$\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=\alpha$。

（ii）　如果$\psi(u)$满足：当$0<u<1$时$\psi(u)<0$，$\psi'(0)<0$，$\psi'(1)>0$；那么

或者$u(x,t)\equiv1$　或者$\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=0$。

（iii）　如果$\psi(u)$满足：当$0<u<1$时$\psi(u)>0$；$\psi'(0)>0$，$\psi'(1)<0$；那么

或者$u(x,t)\equiv0$　或者$\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=1$

证明　首先假定$\psi(u)$满足条件(i)。考虑方程

$$\Phi'(v)v_t=v_{xx}+\Psi(v) \qquad ((x,t)\in R\times R^+) \tag{3.0}$$

其中$\Psi(v)=\psi(\Phi(v))$定义在$[0,\varphi(1)]$上。因此有：

$$\left.\begin{aligned}&\Psi(0)=\psi(\Phi(0))=\psi(0)=0\\&\Psi(\varphi(\alpha))=\psi(\alpha)=0\\&\Psi(\varphi(1))=\psi(1)=0\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Psi(v)=\psi(u)>0,\ u\in(0,\alpha);\ 即\Psi(v)>0,\ v\in(0,\varphi(\alpha));\\&\Psi(v)=\psi(u)<0,\ u\in(\alpha,1);\ 即\Psi(v)<0,\ v\in(\varphi(\alpha),\varphi(1))\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

$$\Psi'(v)|_{v=0}=\frac{d}{dv}[\psi(\Phi(v))]|_{v=0}=\psi'(\Phi(0))\Phi'(0)$$

$$=\frac{\psi'(0)}{\varphi'(0)}>0$$

$$\Psi'(v)|_{v=\varphi(1)}=\frac{\psi'(1)}{\varphi'(1)}>0$$

由（3.10）和(3.11)，$\Psi'(v)|_{v=\varphi(\alpha)}<0$。因此得

$$\Phi'(0)>0,\ \Psi'(\varphi(1))>0,\ \Psi'(\varphi(\alpha))<0.$$

微分方程

$$q''+\Psi(q)=0 \tag{3.0.1}$$

有第一积分

$$q'^2/2+F(q)=k \tag{3.12}$$

这里k是任意常数，而且$F(q)=\int_0^q \Psi(u)du$。方程（3.0.1）等价于方程组

$$\left.\begin{aligned} q'&=p \\ p'&=-\Psi(q) \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

这个方程组有临界点（*critical point*）：$(q,p)=(0,0)$，$(\varphi(\alpha),0)$和$(\varphi(1),0)$。它的线性化矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Psi'(q) & 0 \end{pmatrix}$$

显然$(0,0)$和$(\varphi(1),0)$是中心点（*center point*），而$(\varphi(\alpha),0)$是鞍点（*saddle point*）。

首先我们考虑在临界点$(\varphi(1),0)$附近的情况。我们画出如图1的相图，它有通过点$(\varphi(1)-\varepsilon,0)$的轨道，在该轨道上$q(0)=\varphi(1)$。

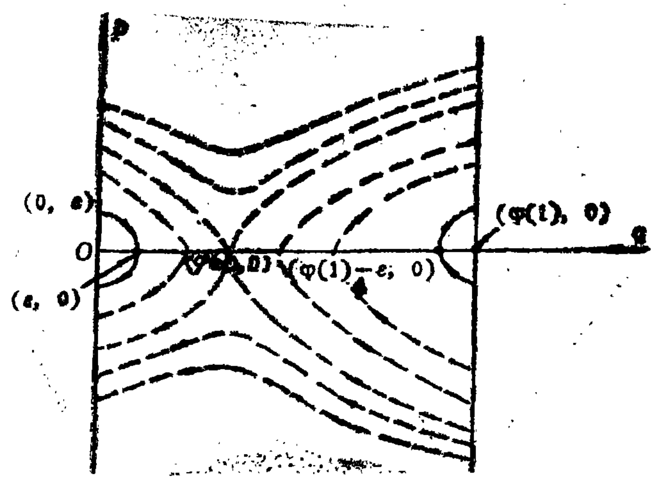

图1　方程组(*)的相图

存在一个$b_\varepsilon>0$，使得$q(b_\varepsilon)=\varphi(1)$，$q\ b_\varepsilon/2=\varphi(1)-\varepsilon$，$q'\ b_\varepsilon/2=0$。因此由(3.12)，$q'^2/2+F(q)=F(\varphi(1)-\varepsilon)$。

所以
$$\frac{1}{2}q'^2(0)+F(q(0))=F(\varphi(1)-\varepsilon)$$

即
$$q'(0)=-\sqrt{2[F(\varphi(1)-\varepsilon)-F(\varphi(1))]}$$

这里负号是由于$q(x)$在$x=0$附近是递减的。因此我们得初始值问题

$$\frac{1}{2}q'^2+F(q)=F(\varphi(1)-\varepsilon)$$

$$q(0)=\varphi(1)$$

另有
$$q'(0)=-\sqrt{2[F(\varphi(1)-\varepsilon)-F(\varphi(1))]},$$

它有个解$q_\varepsilon(x)$满足：

$$\varphi(1)-\varepsilon\leqslant q_\varepsilon(x)\leqslant\varphi(1)\qquad (x\in(0,b_\varepsilon)) \tag{3.13}$$

当$\varepsilon\to0$时，$\|q_\varepsilon\|_\infty\to0$而且$q_\varepsilon\to\tilde{q}$，而$\tilde{q}$是下面线性方程的解：

$$\tilde{q}''+\Psi'(\varphi(1))\tilde{q}=0\qquad \tilde{q}(0)=\varphi(1)$$

所以 $\tilde{q}=A\cos(\sqrt{\Psi'(\varphi(1))}\,x)+B\sin(\sqrt{\Psi'(\varphi(1))}\,x)$. 这个解有周期 $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\Psi'(\varphi(1))}}$.

因此当 $\varepsilon\to 0$ 时，$b_\varepsilon\to\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{\Psi'(\varphi(1))}}$，这意味着 b_ε 的值是有限的。另一方面从 $\frac{1}{2}q'^2+F(q)=F(\varphi(1)-\varepsilon)$，即有

$$dx=\pm\frac{dq}{\sqrt{2[F(\varphi(1)-\varepsilon)-F(q)]}},$$

当 $b_\varepsilon/2\leqslant x\leqslant b_\varepsilon$ 时，由于 $dq/dx\geqslant 0$，符号取正。所以

$$\frac{1}{2}b_\varepsilon=\int_{\frac{1}{2}b_\varepsilon}^{b_\varepsilon}dx=\int_{\varphi(1)-\varepsilon}^{\varphi(1)}\frac{dq}{\sqrt{2[F(\varphi(1)-\varepsilon)-F(q)]}}.$$

由定理 3，如果 $v(x,t)$ 不恒等于 $\varphi(1)$，那么 $v(x,t)<\varphi(1)(t>0)$. 由于 $[0,b_\varepsilon]$ 是紧致集，存在充分小的 ε 使得在 $[0,b_\varepsilon]$ 上 $v(x,t)<\varphi(1)-\varepsilon$. 由引理3′得

$$\lim_{t\to\infty}\sup v(x,t)=\lim_{t\to\infty}\sup v(x,t+h)\leqslant\xi(x) \tag{3.14}$$

这里 $\xi(x)\in[0,\varphi(1)]$ 是 (3.8) 和 (3.9) 的最大解，即 $\xi''+\Psi(\xi)=0$，且在 $(0,b_\varepsilon)$ 中满足 $\xi(x)\leqslant q_\varepsilon(x)$.

我们用反证法来证明 $\xi(x)\leqslant\varphi(\alpha)$.

假设存在一个 x_0 使得 $\tilde{\beta}=\xi(x_0)\in(\varphi(\alpha),\varphi(1))$. 于是 $\xi'^2/2+F(\xi)=k=\xi'^2(x_0)/2+F(\xi(x_0))=\frac{1}{2}\xi'^2(x_0)+F(\tilde{\beta})$. 因此 $k\geqslant F(\tilde{\beta})$. 由定义 $F(\xi)=\int_0^\xi\Psi(v)dv$，而且当 $v\in(\varphi(\alpha),\varphi(1))$ 时 $\Psi(v)<0$，$F(\xi)$ 在 $(\varphi(\alpha),\varphi(1))$ 中递减，所以 $k\geqslant F(\tilde{\beta})$ 意味着当 $\xi>\tilde{\beta}$ 时 $k>F(\xi(x))$，令 $I=\int_{\tilde{\beta}}^{\varphi(1)}\frac{dv}{\sqrt{k-F(v)}}=\int_{\tilde{\beta}}^{\sigma}+\int_{\sigma}^{\varphi(1)}$，$\tilde{\beta}<\sigma\leqslant\varphi(1)$. 这个积分是可积的。事实上，因为 $k-F(v)>0$，显然地 $\int_\sigma^{\varphi(1)}$ 是可积的。关于 $\int_{\tilde{\beta}}^{\sigma}$ 我们用分部积分法，$\int_{\tilde{\beta}}^{\sigma}\frac{dv}{\sqrt{k-F(v)}}$

$$=\int_{\tilde{\beta}}^{\sigma}\frac{F'(v)dv}{F'(v)\sqrt{k-F(v)}}=\frac{1}{F'(v)}(-2\sqrt{k-F(v)}\,|_{\tilde{\beta}}^{\sigma}+2\int_{\tilde{\beta}}^{\sigma}\left\{\frac{\sqrt{k-F(v)}\cdot\Psi'(v)}{\Psi^2(v)}\right\}dv,$$ 最后

这个积分是可积的。因此

是可积的

$$I=\int_{\tilde{\beta}}^{\varphi(1)}\frac{dv}{\sqrt{k-F(v)}} \tag{3.15}$$

由此得

$$\frac{d\xi}{dx}=\pm\sqrt{2(k-F(\xi))},\quad dx=\pm\frac{d\xi}{\sqrt{2(k-F(\xi))}},$$

$$\int_{x_0}^{x}dx=\pm\int_{\tilde{\beta}}^{\xi}\frac{dv}{\sqrt{2(k-F(v))}},\quad x=x_0\pm\int_{\tilde{\beta}}^{\xi}\frac{dv}{\sqrt{2(k-F(v))}}$$

这个方程隐含地确定了 $\xi(x)$ 是 x 的函数。所以 $x_1=x_0\pm\int_{\tilde{\beta}}^{\varphi(1)}\frac{dv}{\sqrt{2(k-F(v))}}$. x_1 是个有限的值，因为 $\int_{\tilde{\beta}}^{\varphi(1)}\frac{dv}{\sqrt{2(k-F(v))}}$ 可积。这意味着 $\xi(x_1)=\varphi(1)$，并且

$\left.\frac{d\xi}{dx}\right|_{x=x_1}=\pm\sqrt{2[k-F(\varphi(1))]}\neq 0$（因为 $k-F(\varphi(1))>0$）。所以 $\xi(x)\leqslant\varphi(1)$ 不可能对所有 x 都成立。但是已知 $\xi\in[0,\varphi(1)]$，这是矛盾的。因此得

$$\bar{\xi}(x)\leqslant\varphi(\alpha) \tag{3.16}$$

所以$\lim\limits_{t\to\infty}\sup v(x,t)\leqslant\varphi(\alpha)$。如果让$\alpha\to 0$，本定理中(ii)即得证。

下一步证明$\lim\limits_{t\to\infty}\inf v(x,t)\geqslant\varphi(\alpha)$。考虑临界点(0,0)，存在一个定义在$[0,b_\varepsilon]$的解$q_\varepsilon$(见图1)，满足：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}q'^2+F(q)=k=F(\varepsilon)\\&q(0)=0,\ q(b_\varepsilon)=0,\ q\left(\frac{1}{2}b_\varepsilon\right)=\varepsilon,\quad q'\left(\frac{1}{2}b_\varepsilon\right)=0\end{aligned}\right\} \tag{3.0.2}$$

当$\varepsilon\to 0$时，$\|q_\varepsilon\|_\infty\to 0$，而且$q_\varepsilon\to\bar{q}(x)=\varepsilon\sin(\sqrt{\Psi'(0)}\,x)$。$\bar{q}$是线性化了的方程$\bar{q}''+\Psi'(0)\bar{q}=0$，$\bar{q}(0)=0$的解。由(3.0.2)，在$\left(0,\frac{1}{2}b_\varepsilon\right)$上$dx=\frac{dq}{\sqrt{2[F(\varepsilon)-F(q)]}}$，所以$\frac{b_\varepsilon}{2}=\int_0^\varepsilon\frac{dq}{\sqrt{2[F(\varepsilon)-F(q)]}}$，$\bar{q}(x)$有周期$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\Psi'(0)}}$。当$\varepsilon\to 0$时，$b_\varepsilon\to\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{\Psi'(0)}}>0$。因此$b_\varepsilon$是有限的，而且在$[0,b_\varepsilon]$上，$0\leqslant q_\varepsilon(x)\leqslant\varepsilon$。由定理3，如果$v(x,t)\not\equiv 0$，那么当$t>0$时$v(x,t)>0$。我们可选择$\varepsilon$充分小使得在$[0,b_\varepsilon]$上，$v(x,t)\geqslant q_\varepsilon(x)$。根据引理2′，得

$$\lim_{t\to\infty}\inf v(\alpha,t)=\lim_{t\to\infty}\inf v(x,t+h)\geqslant\xi(x) \tag{3.17}$$

如前所述，我们得

$$\bar{\xi}(x)\geqslant\varphi(\alpha) \tag{3.18}$$

令$\alpha\to 1$，本定理的(iii)即得证。(3.14)，(3.16)，(3.17)和(3.18)意味着$\lim\limits_{t\to\infty}v(x,t)=\varphi(\alpha)$，或者$v(x,t)\equiv 0$，或者$v(x,t)\equiv\varphi(1)$。所以如果$u\not\equiv 0$或$u\not\equiv 1$，那么$\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=\alpha$。定理得证。

附注 在证明$\lim\limits_{t\to\infty}v(x,t)\geqslant\varphi(\alpha)$时，当我们线性化原来的常微分方程组时，使用了条件$\varphi'(0)>0$。如果$\varphi'(0)=0$，那么$\Psi'(0)$将无定义。但是在这个分析过程中稍为留心一点可发现，我们可以允许$\varphi'(0)=0$，旦且能够得到一个类似于上述的q_ε的下解(subsolution)。事实上，我们考察一下图1中在$(q,p)=(0,0)$附近的第一象限。因为$q'=p$并且$p'=-\Psi(q)$，因此$q'>0$并且$p'<0$。所以在第一象限沿着轨迹q是递增的（我们称它指向东），而p是递减的（指向南）。因此在第一象限内这个轨迹的点(q,p)（在原点附近）向东南方向移动。类似地，(q,p)在第四象限向西南方向移动。另一方面由(3.12)对于每个k，对应有一个对称于q轴的轨迹。因此这个轨迹必须与q轴相交。如果我们从点$(q(x),p(x))|_{x=0}=(q_0,p_0)=(0,k)$开始，在第一象限内$(q,p)$向东南方向移动直到$F(q)=F(q_1)=k$为止。当$F(q_1)=k$时，$p=0$。之后$(q,p)$向西南方向移动直到重新$q=0$。另外我们注意到，假如$k$值很小，由$F(q)=k$，那么$q$也会很小，特别是当$0<q_1<\alpha$时。这就意味着此轨迹不通过任何临界点。因此我们得到了一个类似于前述的q_ε的下解。

参 考 文 献

[1] Aronson, D. G., Density-dependent interaction-diffusion system, *Dynamics and Modeling of Reactive Systems*, Academic Press, New York (1980), 161—176.

[2] Aronson, D. G. and H. F. Weinberger, Non-linear diffusion in population genetics, combustion, and nerve propagation, *Proceedings of the Tulane Program in Partial Differential Equations and Related Topics*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin (1975), 446.

[3] Conway, J. B., *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York (1978).

[4] Fife, P. C., *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems*, Lecture Notes in Biomathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1979).

[5] Friedman, A., *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall, New Jersey (1964).

[6] Gurtin, M. E. and R. C. MacCamy, On the diffusion of biological populations, *Math. Biosci.* **33** (1977), 35—49.

[7] Hale, J. K., *Ordinary Differential Equations*, Robert E. Krieger Publishing Company, Florida (1980).

[8] Kalashnikov, A. S., The propagation of disturbance in problems of non-linear heat conduction with absorption, *Zh. Vychisl Mat. Mat. Fiz.*, **14**, 4 (1974), 891—905.

[9] Kalashnikov, A. S., The Cauchy problem in the class of increasing functions of equations of the non-stationary seepage type, Vesln, Mosk, v_n-t_n, *Matem. Mekham*, **6** (1963), 17—23.

[10] Kruzhkov, S. N., Results concerning the nature of continuity of the results of parabolic equations and some applications, *Matem. Zametki*, **6**, 1 (1969), 97—108.

[11] Ladyzhenskaya, O.A., V. A. Solonnikov and N. N. Uraltseva, *Linear and Quasi-Linear Equations of the Parabolic Type*, Nauka, Moscow (1967).

[12] Oleinik, Olga, On some degenerate quasilinear parabolic equations, Conferenze tenute al sominario di Analisi nei giorni 18,19 Aprile (1963).

[13] Protter, M. H. and H. F. Weinberger, *Maximum Principle in Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1967).

[14] Rudin, Walte, *Real and Complex Analysis*, McGraw (1973).

Stability of Stationary State Solution for a Reaction Density-Dependent Diffusion Equation

Zhang Guo-chu

(Beijing Institute of Economics, Beijing)

Abstract

In this paper we are interested in the large time behavior of the nonlinear diffusion equation

$$u_t=(\varphi(u))_{xx}+\psi(u) \qquad (x\in R,\ t\in R^+=(0,+\infty))$$

We consider functions $\varphi(u)$ and $\psi(u)$ which allow the equation to possess traveling wave solutions. We first present an existence and uniqueness as well as some comparison principle result of generalized solutions to the Cauchy problem. Then we give for $\psi(u)=u(1-u)(u-a)$ some threshold results, from which we can see that $u=a$ is stable, $u=0$ or $u=1$ is unstable under some assumptions, etc.