

随动强化材料壳体的安定分析*

金永杰 赵小津

(上海交通大学, 1988年4月5日收到)

摘 要

在循环加载下壳体结构的安定分析, 特别是对于具有应变强化的材料制成的壳体结构的安定分析具有很大的实际意义。

文中对随动强化材料的安定定理有了进一步的认识并应用它去分析壳体结构的安定载荷。对于一个真实状态其残余应力与塑性应变之间是相关的, 但我们在定理中所示的与时间无关的残余应力场 $\bar{\sigma}_i^r$ 和与时间无关的几何容许的塑性应变场 $\bar{\varepsilon}_i^p$ 可以是不相关的。明确指出这点对于工程应用带来很多方便, 否则将是十分困难的。为此还给出了该定理的新的证明方法。

我们还应用了上述定理对一个半球封头的圆柱壳体进行了安定分析。根据所求得的弹性解, 各种可能的残余应力和塑性应变分布, 结构的安定分析可归结为一个数学规划问题。

计算结果表明应变强化材料的安定载荷要比理想塑性材料的安定载荷高出30~40%, 这说明在安定分析中考虑材料强化是重要的, 可使壳体结构的设计承载能力有相当大的提高, 同时对改进目前壳体结构的设计提供了科学依据。

一、引 言

对循环载荷作用下的结构进行安定分析有着重要的实际意义, 由于不少工程材料具有应变强化效应, 如仍按理想塑性材料处理, 近似性太大, 结果也偏保守。本文就应变强化材料的结构进行塑性安定分析。

1974年W. Prager^[1]把随动强化概念引入安定问题, 建立了刚性应变强化材料的安定定理。L. Corradi 和 G. Maier^[2], J. A. König^[3]提出了弹性-应变强化的安定定理, 但在应用方面除梁、桁架等有计算实例外, 其他的结构(如壳体)考虑强化的安定分析尚未见到。本文对随动强化材料的安定定理给出一个更明确的新的叙述, 与之相一致的给出了一个证明。在此基础上对一个壳体结构进行了具体的分析计算。

二、随动强化材料的安定下限定理

关于在动载荷下考虑随动强化的安定下限定理^[4](原作者称之为动力安定定理), 在文[4]中已给出了证明。本文为了便于实际应用我们将随动强化的安定下限定理重新给以更明确的叙述, 并给出了与这种叙述相一致的证明。

随动强化安定下限定理: 如果能找到任何一个不随时间变化的残余应力场 $\bar{\sigma}_i^r$ 及不随时间变化的运动可能的塑性应变场 $\bar{\varepsilon}_i^p$, $\bar{\sigma}_i^r$ 与 $\bar{\varepsilon}_i^p$ 之间可以不相关联。若下式成立:

* 卢文达推荐。

$$\varphi(\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^E - \alpha \bar{e}_{ij}^E) < K \quad (2.1)$$

则结构具有安定性。式中 φ 是屈服函数， σ_{ij}^E 是当材料假设为理想弹性体时的应力， α 是随动强化系数， K 为与屈服应力 σ_0 有关的常数。

证明 设结构在循环载荷作用下在某瞬时 t 的应力、应变、塑性应变、塑性应变率为 σ_{ij} ， ε_{ij} ， e_{ij}^p ， \dot{e}_{ij}^p ，此状态可在应力空间内表示(图1)。由公式(2.1)，因 $\bar{\sigma}_{ij}^E$ 与 \bar{e}_{ij}^E 可以是不相关联的，所以满足条件(2.1)式的应力应变状态只能是一个虚拟的状态；此虚拟的状态同样可以表示在应力空间内，为了说明的方便，可将由分量 $(\sigma_{ij} - \alpha e_{ij}^p)$ 及 $(\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^E - \alpha \bar{e}_{ij}^E)$ 组成的向量平移画在同一个屈服面内。根据应力空间中屈服面的外凸性和法向规则，可以给出下列不等式：

$$[(\sigma_{ij} - \alpha e_{ij}^p) - (\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^E - \alpha \bar{e}_{ij}^E)] \dot{e}_{ij}^p \geq 0 \quad (2.2)$$

或写成

$$[\sigma_{ij} - (\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^E)] \dot{e}_{ij}^p \geq \alpha (e_{ij}^p - \bar{e}_{ij}^E) \dot{e}_{ij}^p \quad (2.2)'$$

由虚功原理可得：

$$\int_V [\sigma_{ij} - (\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^E)] [\dot{\varepsilon}_{ij} - (\dot{e}_{ij}^e + \dot{e}_{ij}^p)] dV = 0 \quad (2.3)$$

式中 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 是与 $\dot{\sigma}_{ij}$ 相对应的应变率，可写成 $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij}^e + \dot{e}_{ij}^p$ ，而 \dot{e}_{ij}^e 是与应力状态 $(\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^E)$ 相对应的弹性应变率，而 $\dot{e}_{ij}^p = 0$ ，这是因为 $(\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^E)$ 满足(2.1)式。因 $[\sigma_{ij} - (\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^E)]$ 是静力容许的而 $[\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{e}_{ij}^e]$ 是几何容许的，故(2.3)式成立。利用(2.2)'式，(2.3)式可写成：

$$\int_V [\sigma_{ij} - (\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^E)] [\dot{e}_{ij}^e - \dot{e}_{ij}^e] dV + \int_V \alpha (e_{ij}^p - \bar{e}_{ij}^E) \dot{e}_{ij}^p dV \leq 0$$

$$\text{即} \quad -\frac{d}{dt} \left\{ \int_V A_{ijkl} [\sigma_{ij} - (\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^E)] [\sigma_{ij} - (\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^E)] dV \right. \\ \left. + \int_V \alpha (e_{ij}^p - \bar{e}_{ij}^E) (e_{ij}^p - \bar{e}_{ij}^E) dV \right\} \leq 0$$

式中 A_{ijkl} 是弹性柔度系数，或可写成：

$$dA/dt \leq 0 \quad (2.4)$$

$$\text{其中} \quad A = \left\{ \int_V A_{ijkl} [\sigma_{ij} - (\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^E)] [\sigma_{ij} - (\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^E)] dV \right. \\ \left. + \int_V \alpha (e_{ij}^p - \bar{e}_{ij}^E) (e_{ij}^p - \bar{e}_{ij}^E) dV \right\} \quad (2.4)'$$

很明显 $A \geq 0$ ，而 $dA/dt \leq 0$ ，故当时间 t 大于某一特定的 t_1 值后 $dA/dt = 0$ 。当 $dA/dt = 0$ 时可将(2.2)'式写成等式，即

$$[(\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^E - \alpha \bar{e}_{ij}^E) - (\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^E - \alpha \bar{e}_{ij}^E)] \dot{e}_{ij}^p = 0 \quad (2.5)$$

如果屈服面严格外凸，则要使(2.5)式满足，物体内每一点必须满足下列两条件之一：

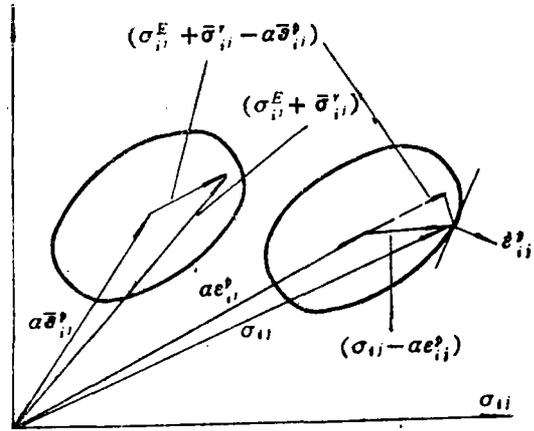


图 1

$$(a) \sigma_{ij}^E + \sigma_{ij}^r - \alpha \varepsilon_{ij}^E = \sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^r - \alpha \bar{\varepsilon}_{ij}^E$$

因而有 $\varphi(\sigma_{ij} - \alpha \varepsilon_{ij}^E) = \varphi(\sigma_{ij}^E + \bar{\sigma}_{ij}^r - \alpha \bar{\varepsilon}_{ij}^E) < K$

即有 $\varphi(\sigma_{ij} - \alpha \varepsilon_{ij}^E) < K$

表明这一解答是安定的。

$$(b) \varepsilon_{ij}^E = 0$$

这表明塑性应变不再增加，结构又呈弹性性能，也即处于安定状态。于是上述静力安定定理得证。

考虑强化材料的安定问题也可表达成为一个数学规划问题，即

$$\left. \begin{aligned} \text{Max } \Gamma_\beta \\ \text{Sub. to } \varphi[\Gamma_\beta(\sigma_{ij}^{E_0})_\beta + \bar{\sigma}_{ij}^r - \alpha \bar{\varepsilon}_{ij}^E] < K \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

式中 β 是独立载荷的组数， $(\sigma_{ij}^{E_0})_\beta$ 是第 β 组单位载荷作用下的弹性应力， Γ_β 是载荷系数。

应用随动强化的安定下限定理，其关键是必须寻找自我平衡的应力场 $\bar{\sigma}_{ij}^r$ 和运动可能的塑性应变场 $\bar{\varepsilon}_{ij}^E$ ，并且它们都与时间无关。

三、考虑强化材料半球封头圆柱壳的安定分析

(1) 弹性解

结构的弹性解，结果可见文[5]。对较厚的壳体我们利用了有限元方法。

(2) 残余应力的选取

残余应力场选取的好坏直接影响安定载荷的准确性，它愈接近于真实的情况则所得到的安定值就愈准确。所选残余应力场必须满足下列方程：

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij,j}^r &= 0 \quad (\text{在域内}) \\ \bar{\sigma}_{ij}^r n_j &= 0 \quad (\text{在力的边界上}) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

由此我们可以按如下方法确定 $\bar{\sigma}_{ij}^r$ ：把壳体在任一截面处截开，卸载后该截面上如有残余力必然是一组分布剪力和弯矩（见图2），很明显这组分布的剪力和弯矩是自平衡的，它们满足自平衡条件。因而我们可以把上述那组分布剪力和弯矩引起的弹性应力分布近似地作为残余应力场。这对于脉动循环载荷，这样的选取可比较接近实际情况，因在零载荷时应力必须满足屈服条件。故残余应力可近似地取为 $\bar{\sigma}_{ij}^r$ ：

$$\bar{\sigma}_{ij}^r = G(x_1, x_2, x_3, N_0)N + H(x_1, x_2, x_3, N_0)M \quad (3.2)$$

式中 $G(x_1, x_2, x_3, N_0)$ 和 $H(x_1, x_2, x_3, N_0)$ 分别为由单位分布剪力 N_0 及单位分布弯矩 M_0 在结构内引起的弹性应力场。 N 和 M 是分布剪力和弯矩的乘子。改变 N 和 M 还可以在一定范围内调节残余应力场 $\bar{\sigma}_{ij}^r$ 。对于半球封头圆柱壳，可把球壳和圆柱壳连接处截于（由于对称性，只画出一半，见图2）。将该截面上的分布剪力 N 和分布弯矩 M 引起的弹性应力取作残余应力 $\bar{\sigma}_{ij}^r$ ，形式仍如(3.2)式所示。

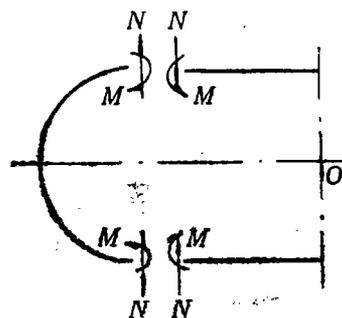


图 2

(3) 塑性应变 $\bar{\epsilon}_i^p$ 的选取

由于 $\bar{\epsilon}_i^p$ 必须是运动可能的, 且与时间无关. 考虑到结构的对称性及加载情况, 并参照结构破坏的机构形式^[6], 该结构有以下几种可能的变形形式 (图3).

位移与塑性应变的关系:

在柱壳中 ($-L \leq x \leq 0$)

$$\bar{\epsilon}_\phi^p = \frac{w}{R}, \quad \bar{\epsilon}_x^p = \frac{dv}{dx}, \quad \bar{k}_\phi = 0, \quad \bar{k}_x = -\frac{d^2w}{dx^2}$$

在球壳中 ($0 \leq \phi \leq \pi/2$)

$$\bar{\epsilon}_\theta = (v \operatorname{ctg} \phi + w)/R, \quad \bar{\epsilon}_\phi = (dv/d\phi + w)/R$$

$$\bar{k}_\theta = -\operatorname{ctg} \phi \left(v - \frac{dw}{d\phi} \right) / R^2, \quad \bar{k}_\phi = -\frac{d}{d\phi} \left(v - \frac{dw}{d\phi} \right) / R^2$$

旋转角速度 $\psi = dw/dx \quad (-L \leq x \leq 0)$

$$\psi = -\left(v - \frac{dw}{d\phi} \right) / R \quad \left(0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

(i) 模式(a)

球壳没有变形, 只有柱壳有变形.

位移 $w = k_1(L-x), v = 0$, 其中 k_1 是常数.

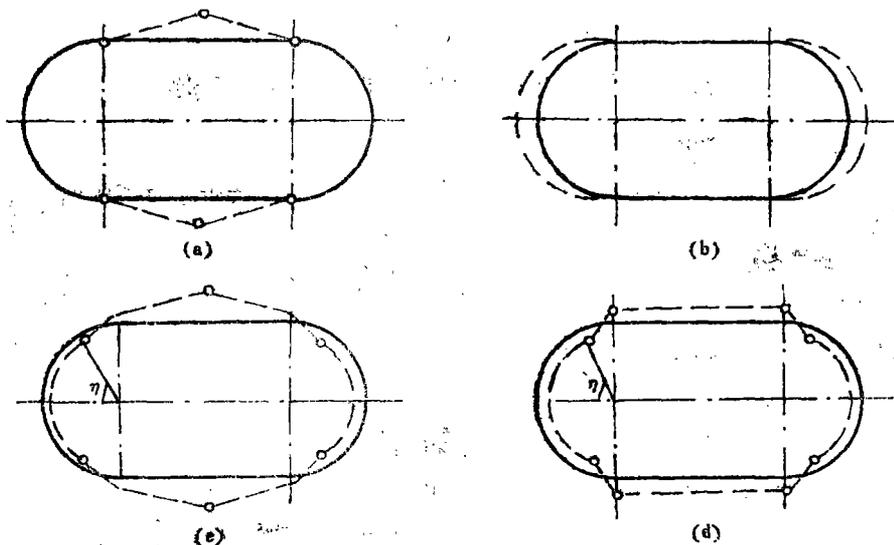


图 3

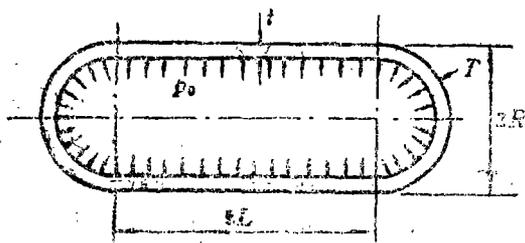


图4 结构的尺寸及载荷

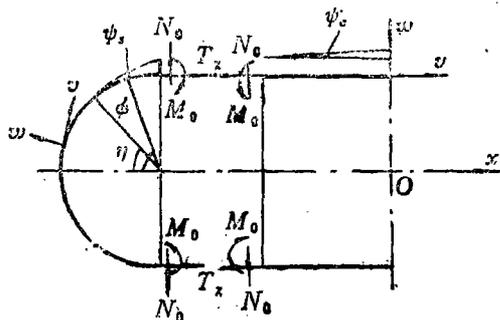


图5 连接情况及符号规定

塑性应变: $\bar{\varepsilon}_{i,j}^p = [\bar{\varepsilon}_\phi^p, \bar{\varepsilon}_x^p, \bar{k}_x^p] = \left[-\frac{k_1(L-x)}{R}, 0, 0 \right]$

(ii) 模式(b)

球壳没有变形, 柱壳有变形.

位移 $w=0, v=v_0(L-x)$, 其中 v_0 是常数.

塑性应变: $\bar{\varepsilon}_{i,j}^p = [\bar{\varepsilon}_\phi^p, \bar{\varepsilon}_x^p, \bar{k}_x^p] = [0, -v_0, 0]$

(iii) 模式(c)

球壳与柱壳同时有变形.

位移: $w_{柱} = k_2(L-x + R\cos\eta), v_{柱} = 0 \quad (-L \leq x \leq 0)$

$$\left. \begin{aligned} w_{球} &= k_2 R \sin(\phi - \eta) - k_2 R (1 - \sin\eta) \cos\phi \\ v_{球} &= -k_2 R [1 - \cos(\eta - \phi)] + k_2 R (1 - \sin\eta) \sin\phi \end{aligned} \right\} \quad \left(\eta \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{球} &= -k_2 R (1 - \sin\eta) \cos\phi \\ v_{球} &= k_2 R (1 - \sin\eta) \sin\phi \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \phi \leq \eta)$$

式中 k_2 是常数.

塑性应变: $\bar{\varepsilon}_{i,j}^p_{柱} = [\bar{\varepsilon}_\phi^p, \bar{\varepsilon}_x^p, \bar{k}_x^p] = \left[-\frac{k_2}{R}(L-x + R\cos\eta), 0, 0 \right]$

$$\bar{\varepsilon}_{i,j}^p_{球} = [\bar{\varepsilon}_\theta^p, \bar{\varepsilon}_\phi^p, \bar{k}_\theta^p, \bar{k}_\phi^p]$$

$$= \left[k_2 \frac{\cos\eta - \cos\phi}{\sin\phi}, 0, \frac{k_2}{R} \operatorname{ctg}\phi, 0 \right] \quad \left(\eta \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

在 $0 \leq \phi \leq \eta$ 区域内没有塑性变形, 而 η 由下式确定:

$$\frac{T}{4R} [k^2(1 + \omega^2) + 1 - 2k\omega^2] \left[\frac{\pi}{2} - \eta + 2\frac{L}{R} \right]$$

$$- (k-2)\frac{L}{R} \left[\frac{T}{2R} k\omega^2 - (1 - \sin\eta) \right] = 0$$

式中 $k=t/T, \omega^2=2L^2/kRT$

(iv) 模式(d)

位移 $w_{柱} = k_3 R \cos\eta, v_{柱} = 0 \quad (-L \leq x \leq 0)$

$$\left. \begin{aligned} w_{球} &= k_3 R \sin(\phi - \eta) - k_3 R (1 - \sin\eta) \cos\phi \\ v_{球} &= -k_3 R [1 - \cos(\eta - \phi)] + k_3 R (1 - \sin\eta) \sin\phi \end{aligned} \right\} \quad \left(\eta \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{球} &= -k_3 R (1 - \sin\eta) \cos\phi \\ v_{球} &= k_3 R (1 - \sin\eta) \sin\phi \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \phi \leq \eta)$$

k_3 是常数.

塑性应变: $\bar{\varepsilon}_{i,j}^p_{柱} = [\bar{\varepsilon}_\phi^p, \bar{\varepsilon}_x^p, \bar{k}_x^p] = [k_3 \cos\eta, 0, 0]$

$$\bar{\varepsilon}_{i,j}^p_{球} = [\bar{\varepsilon}_\theta^p, \bar{\varepsilon}_\phi^p, \bar{k}_\theta^p, \bar{k}_\phi^p]$$

$$= \left[k_s \frac{\cos \eta - \cos \phi}{\sin \phi}, 0, \frac{k_s}{R} \operatorname{ctg} \phi, 0 \right]$$

式中 η 由下式确定

$$\frac{T}{2R} \left[\frac{\pi}{2} - \eta + 2 \frac{L}{R} \right] - (2-k) \frac{L}{R} (1 - \sin \eta) = 0$$

知道了弹性解、残余应力分布及塑性应变分布后，再根据(2.6)式，则求解考虑强化材料的安定问题的数学规划问题成为：

$$\begin{aligned} & \text{Max } \Gamma \\ & \text{Sub. to } \varphi[\Gamma \sigma_{ij}^{E_0} + \bar{\sigma}_{ij}^r - \alpha \bar{\epsilon}_{ij}^p] < K \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \text{Max } \Gamma \\ & \text{Sub. to } \varphi[\Gamma \sigma_{ij}^{E_0} + \bar{\sigma}_{ij}^r - \alpha \bar{\epsilon}_{ij}^p] < K \end{aligned}} \right\}$$

屈服函数 φ 取为 Mises 屈服函数，如将其线性化后成为 Tresca 屈服函数，则上述数学规划问题便成为一线性规划问题。具体计算时在结构上选取众多的比较危险的点 x_1, x_2, \dots, x_n ，然后对每一种可能的变形模式进行优化计算，而残余应力数值的大小及塑性应变数值的大小在优化过程中自行确定（它们各自的分布情况前面已确定）。比较各种变形模式的优化值，取最小的数作为安定载荷值。其计算结果如下列表1~4中所示（表中 p^E 表示弹性极限压力， \bar{p} 为容器的安定压力值）。

表 1

L=500mm R=1250mm t/T=0.667			
T(mm)	p^E/σ_0	\bar{p}/σ_0	$\frac{\bar{p}-p^E}{p^E} \%$
90	4.504	7.137	58.474
80	4.017	6.289	56.562
70	3.542	5.456	54.038
60	3.061	4.615	50.793
50	2.570	3.785	47.292
40	2.059	2.968	44.131
30	1.548	2.181	40.872

表 2

L=500mm R=1250mm t/T=0.833			
T(mm)	p^E/σ_0	\bar{p}/σ_0	$\frac{\bar{p}-p^E}{p^E} \%$
90	5.632	8.575	52.242
80	5.022	7.593	51.205
70	4.409	6.562	48.817
60	3.808	5.566	46.156
50	3.207	4.571	42.531
40	2.578	3.586	39.091
30	1.938	2.634	35.913

表 3

L=500mm R=1250mm t/T=1.0			
T(mm)	p^E/σ_0	\bar{p}/σ_0	$\frac{\bar{p}-p^E}{p^E} \%$
90	6.776	9.890	45.959
80	6.031	8.799	45.884
70	5.294	7.696	45.373
60	4.562	6.504	42.560
50	3.834	5.322	38.821
40	3.095	4.196	35.575
30	2.330	3.083	32.343

表 4

L=500mm R=1250mm t/T=1.25			
T(mm)	p^E/σ_0	\bar{p}/σ_0	$\frac{\bar{p}-p^E}{p^E} \%$
90	8.539	12.135	42.111
80	7.591	10.797	42.237
70	6.651	9.451	42.103
60	5.719	8.109	41.799
50	4.793	6.765	41.149
40	3.868	5.418	40.149
30	2.922	4.065	39.144

将计算结果分别作成曲线如图 6, 7, 8, 9 所示, 图中曲线(1)代表弹性极限值, 曲线(2), (3)分别代表理想塑性时的安定下限值和上限值, 曲线(4)代表考虑材料强化时的安定下限值。

另外我们还对 $L=100\text{mm}$, $R=51\text{mm}$, $t=T=6\text{mm}$ 的较厚的壳体进行了计算, 可得强化时的安定载荷为 $\bar{p}/\sigma_0=1.8372 \times 10^{-1}$, 比弹性极限提高了

$$\delta = (\bar{p} - p^E) / p^E \times 100\% = 50.67\%$$

从表中数值及曲线可以看出强化材料的安定载荷比理想弹塑性材料的安定载荷要高出许多。前者比弹性限可提高40~50%, 而后者只提高10%左右, 因此在进行结构的安定分析时考虑材料的强化是非常重要的, 它能大大地提高结构的承载能力, 这为改进壳体的设计提供了依据。

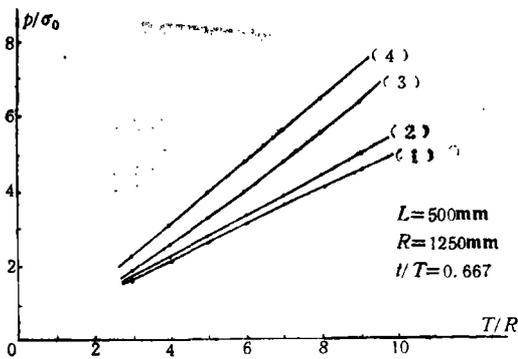


图 6

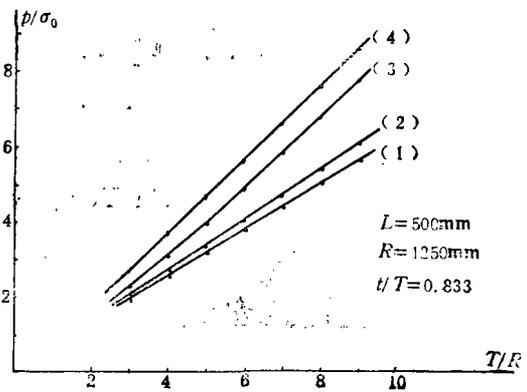


图 7

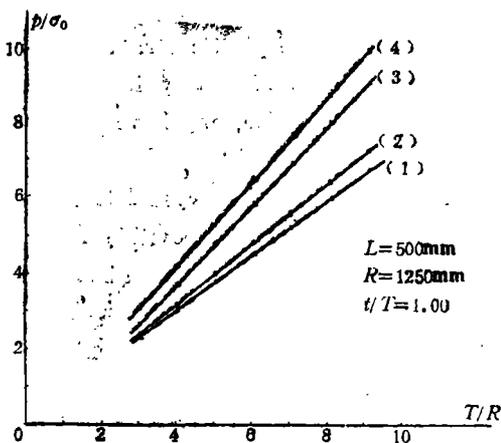


图 8

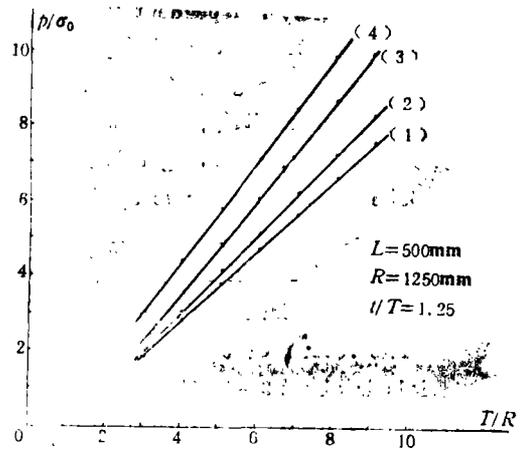


图 9

参 考 文 献

- [1] Prager, W., Bauschinger adaption of rigid work-hardening trusses, *Mech. Res. Comm.*, 1 (1974), 253—256.
- [2] Corradi, L. and G. Maier, Inadaption theorems in the dynamics of elastic-work hardening structure, *Ingenieur Archiv.*, 43 (1973), 44—57.
- [3] König, J.A., On shakedown of strain hardening structure, *ZAMM*, 63, T 177—178
- [4] 黄筑平、杜森田, 动载荷下弹塑性随动强化结构的安定问题, *力学学报*, 17, 5 (1985), 445—452.
- [5] 金永杰、赵小津, 半球封头圆柱壳的安定分析, 第一届全国塑性力学学术会议论文, 杭州(1986, 11), 3—6.
- [6] 程莉、徐秉业、黄克智, 半球封头圆柱壳的极限分析, *力学学报*, 17, 2 (1985), 135—150.

Shakedown Analysis of Shell Structures of Kinematic Hardening Materials

Jin Yong-jie Zhao Xiao-jin

(Shanghai Jiaotong University, Shanghai)

Abstract

It is of great practical importance to analyze the shakedown of shell structures under cyclic loading, especially of those made of strain hardening materials.

In this paper, some further understanding of the shakedown theorem for kinematic hardening materials has been made, and it is applied to analyze the shakedown of shell structures. Though the residual stress of a real state is related to plastic strain, the time-independent residual stress field $\bar{\sigma}_r^*$, as we will show in the theorem may be unrelated to the time-independent kinematically admissible plastic strain field $\bar{\epsilon}_p^*$. For the engineering application, it will be much more convenient to point this out clearly and definitely, otherwise it will be very difficult. Also, we have proposed a new method of proving this theorem.

The above theorem is applied to the shakedown analysis of a cylindrical shell with hemispherical ends. According to the elastic solution, various possible residual stress and plastic strain fields, the shakedown analysis of the structure can be reduced to a mathematical programming problem.

The results of calculation show that the shakedown load of strain hardening materials is about 30-40% higher than that of ideal plastic materials. So it is very important to consider the hardening of materials in the shakedown analysis, for it can greatly increase the structure design capacity, and meanwhile provide a scientific basis to improve the design of shell structures.