应用数学和力学，第10卷第11期（1989年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一个三阶系统的Hopf分叉*

李德明　黄克累

（北京航空航天大学，1988年4月2日收到）

摘　要

本文利用 Liapunov-Schmidt 约化和奇点理论讨论了三阶系统 $\dot{x}=-\beta x+y$，$\dot{y}=-x-\beta y(1-kz)$，$\dot{z}=\beta[\alpha(1-z)-ky^2]$在全参数域上的Hopf分叉与退化的Hopf分叉，给出了周期解存在与稳定性条件。

一、引　　言

一个真实的物理系统，周期运动的出现常常与物理参数的变化有关。Hopf定理描述了周期解对参数的依赖关系。依文[2]的定义，Hopf分叉是Z_2-余维零分叉，而Z_2-余维大于零的Hopf分叉称为退化的Hopf分叉。处理这种分叉的有效工具之一是Liapunov-Schmidt约化和奇点理论。有关奇点理论及应用的例子见文[2～5]。

三阶系统[1]

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-\beta x+y\\ \dot{y}&=-x-\beta y(1-kz)\\ \dot{z}&=\beta[\alpha(1-z)-ky^2]\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中$0\leqslant\beta\leqslant1$，$k>0$，$\alpha\in(0,1]$，描述了一个典型的核自旋发生器的行为。Abragram[6]曾讨论了这种发生器的原理，以后Sherman[7]建立了方程(1.1)，并用环区定理及Borg定理证明了一些参数范围内，周期解的存在、唯一及稳定性。Sherman得到了如下结果：设$\beta>0$充分小，$0<k-2\leqslant\beta$，$2\beta<\alpha\leqslant1$，则系统(1.1)的周期解是存在、唯一和稳定的。

本文首先讨论了(1.1)的Hopf分叉，给出了周期解存在及稳定性条件，然后指出了退化的Hopf分叉仅是Z_2-余维1分叉；应用开折(unfolding)理论，讨论了Z_2-余维1分叉，得知对某些参数，周期解不是唯一的，且发生跳跃与滞后现象。在Sherman的参数域中，两文的结果是一致的。

二、系统（1.1）的Hopf分叉

考察(1.1)有物理意义的平衡点$x=0$，$y=0$，$z=1$。作变换$u=x$，$v=y$，$w=z-1$，$\tau=\sqrt{1-\beta^2}\,t$，则(1.1)化为

* 李骊推荐．国家自然科学基金资助项目．

$$\frac{d}{d\tau}\underline{U}=A\underline{U}+\frac{\beta k}{\sqrt{1-\beta^2}}\underline{H}\triangleq\underline{F}(u,v,w) \tag{2.1}$$

其中

$$\underline{U}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix},\quad A=d\underline{F}|_{(0,0,0)}=\begin{pmatrix}-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0\\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta(k-1)}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\beta\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{pmatrix}$$

A的特征值为

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1=\frac{-\alpha\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}<0 \qquad\qquad (\beta>0)\\ &\lambda_{2,3}=\frac{(k-2)\beta\pm\sqrt{(k-2)^2\beta^2-4(1-\beta^2(k-1))}}{2\sqrt{1-\beta^2}}\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

当$k=2$时

$$\lambda_{2,3}=\pm i \tag{2.2$'$}$$

由 Liapunov-Schmidf 约化及(2.1)对时间τ的平移不变性，可得：

命题1[2] 存在一光滑函数$g(r,k,\alpha,\beta)$使得

$$g(r,k,\alpha,\beta)=a(r^2,k,\alpha,\beta)r$$

$$a(0,2,\alpha,\beta)=0$$

且$g(r,k,\alpha,\beta)$在点$(0,2,\alpha,\beta)$附近的局部解$r\geqslant 0$与(2.1)的微幅周期解一一对应。

称$g(r,k,\alpha,\beta)=0$为(2.1)的分叉方程。求(2.1)的非平凡分叉解，由命题1知，即求解方程

$$a(r^2,k,\alpha,\beta)=0$$

在$(0,2,\alpha,\beta)$附近的非平凡解。

设$s=r^2$，我们有

命题2[2] 若$a_s(0,2,\alpha,\beta)\neq 0$，$a_k(0,2,\alpha,\beta)\neq 0$，则约化分叉方程$g(r,k,\alpha,\beta)$是$Z_2$-等价于叉形分叉$\varepsilon r^3+\delta(k-2)r$的，其中$\varepsilon=\mathrm{sgn}a_s(0,2,\alpha,\beta)$，$\delta=-\mathrm{sgn}a_k(0,2,\alpha,\beta)$。

由[3]中的公式可得

$$a_k(0,\ 2,\alpha,\beta)=-\frac{d}{dk}\left.\frac{(k-2)\beta}{2\sqrt{1-\beta^2}}\right|_{k=2}<0 \tag{2.3}$$

$$a_s(0,\ 2,\alpha,\beta)=-\frac{1}{4}\mathrm{Re}\bar{d}^t\Big[d^2\underline{F}(c,a_0)+d^2\underline{F}(\bar{c},a_2)+\frac{1}{4}d^3\underline{F}(c,c,\bar{c})\Big] \tag{2.4}$$

其中$\bar{d}^t$表示d的转置共轭，Re表示取实部。

$$Ac=ic,\qquad A^td=-id,\qquad \bar{d}^tc=2 \tag{2.5}$$

$$Aa_0=-\frac{1}{2}d^2\underline{F}(c,\bar{c}),\qquad (A-2iI)a_2=-\frac{1}{4}d^2\underline{F}(c,c) \tag{2.6}$$

由(2.5)，计算得

$$c^t=(\beta-i\sqrt{1-\beta^2},\ 1,0)$$

$$d^t=\left(-\frac{i}{\sqrt{1-\beta^2}},\ 1+i\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},\ 0\right)$$

且

$$d^2\underline{F}((\vec{u},\vec{v})=\frac{\partial^2 \underline{F}}{\partial t_1\partial t_2}(t_1\vec{u}+t_2\vec{v})\Big|_{t_1=t_2=0}$$

$$=\frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix}0\\ -u_2v_3-u_3v_2\\ 2u_2v_2\end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$d^3\underline{F}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\equiv 0$$

由(2.7)得

$$d^2\underline{F}(c,c)=\begin{pmatrix}0\\0\\4\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{pmatrix}=d^2\underline{F}(c,\bar{c}) \tag{2.8}$$

把(2.8)代入(2.6)求得

$$a_0=\begin{pmatrix}0\\0\\2/\alpha\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}0\\0\\ \dfrac{\alpha\beta^2-2\beta i\sqrt{1-\beta^2}}{\alpha^2\beta^2+4(1-\beta^2)}\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

将(2.9)代入(2.7)，有

$$\left.\begin{aligned} d^2\underline{F}(c,a_0)&=\begin{pmatrix}0\\ -\dfrac{4\beta}{\alpha\sqrt{1-\beta^2}}\\ 0\end{pmatrix}\\ d^2\underline{F}(\bar{c},a_2)&=\begin{pmatrix}0\\ -\dfrac{2\alpha\beta\sqrt{1-\beta^2}-4\beta^2 i}{\alpha^2\beta^2+4(1-\beta^2)}\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

因此，由(2.4)和(2.10)求得

$$a_s(0,2,\alpha,\beta)=\frac{\beta}{2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{\alpha\beta^2-2\beta^2}{\alpha^2\beta^2+4(1-\beta^2)}\right) \tag{2.11}$$

由(2.11)不难得到：

$$\text{当}\beta^2<\frac{8}{8+2\alpha-3\alpha^2}\text{时，}\quad a_s(0,2,\alpha,\beta)>0 \tag{2.12}$$

$$\text{当}\beta^2>\frac{8}{8+2\alpha-3\alpha^2}\text{时，}\quad a_s(0,2,\alpha,\beta)<0 \tag{2.13}$$

$$\text{当}\beta^2=\frac{8}{8+2\alpha-3\alpha^2}\text{时，}\quad a_s(0,2,\alpha,\beta)=0 \tag{2.14}$$

设 $\mathrm{I}^*=\left\{(\alpha,\beta):0<\alpha<1,\ 0<\beta<\min\left(1,\frac{8}{8+2\alpha-3\alpha^2}\right)\right\}$

$$\mathrm{II}^*=\left\{(\alpha,\beta):0<\alpha<\frac{2}{3},\quad 1>\beta>\frac{8}{8+2\alpha-3\alpha^2}\right\}$$

则由(2.12)，(2.13)，命题2以及Hopf分叉的稳定性交换原则，我们有

定理1 若$(\alpha,\beta)\in$区域I^*，则存在与(α,β)有关的充分小的$\varepsilon_1(\alpha,\beta)>0$，使当$0<k-2<\varepsilon_1(\alpha,\beta)$时，系统(1.1)存在稳定微幅的周期解(见图1)。

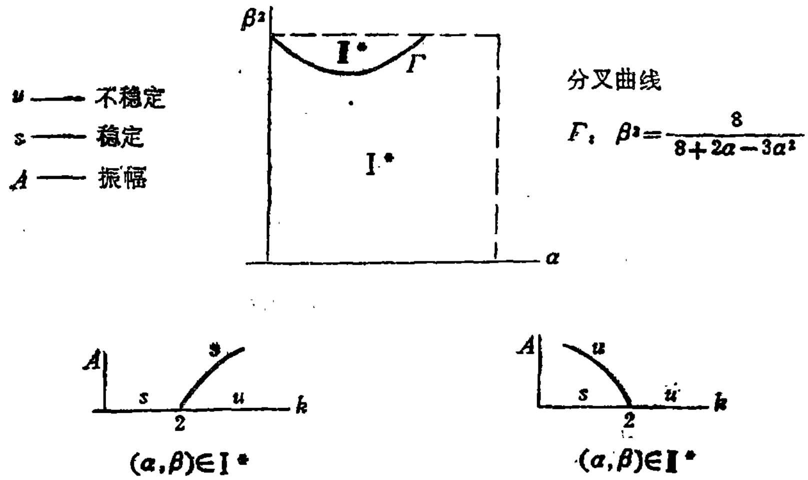

图 1

三、退化的Hopf分叉

由(2.14)，当$(\alpha,\beta)\in\Gamma$时，$a_s(0,2,\alpha,\beta)=0$，命题2不再成立。分叉方程$g(r,k,\alpha,\beta)$的Z_2-余维数为1[3]。本节讨论余维1分叉，即退化的Hopf分叉。

据[3]的公式，以及$d^3F=0$可得

$$a_{ss}(0,2,\alpha,\beta)=R_{200}+R_{101}q_{100} \tag{3.1}$$

$$a_s=R_{100} \tag{3.2}$$

$$q_{100}=\frac{1}{4}\mathrm{Im}\,\bar{d}^t[d^2F(c,a_0)+d^2F(\bar{c},a_0)] \tag{3.3}$$

$$R_{101}=-\frac{1}{4}\mathrm{Re}\,\bar{d}^t d^2F(\bar{c},c_2) \tag{3.4}$$

$$(A-2iI)c_2=2ia_2 \tag{3.5}$$

$$R_{200}=-\frac{1}{4}\mathrm{Re}\,\bar{d}^t\Big[\frac{1}{2}d^2F(c,b_0)+\frac{1}{2}d^2F(\bar{c},\bar{b}_2)+2(d^2F(a_0,a_1)+d^2F(a_2,\bar{a}_1)+d^2F(\bar{a}_2,a_3)\Big] \tag{3.6}$$

$$(A-iI)a_1=-\frac{3}{2}[d^2F(c,a_0)+d^2F(\bar{c},a_2)]-3[R_{100}-iq_{100}]c,\quad \bar{d}^t a_1=0 \tag{3.7}$$

$$(A-3iI)a_3=-\frac{3}{2}d^2\underline{F}(c,a_2) \tag{3.8}$$

$$Ab_0=-2[d^2\underline{F}(c,\bar{a}_1)+d^2\underline{F}(\bar{c},a_1)]$$
$$-3[d^2\underline{F}(a_0,a_0)+2d^2\underline{F}(a_2,\bar{a}_2)] \tag{3.9}$$

$$(A-2iI)b_2=-2[d^2\underline{F}(c,a_1)+d^2\underline{F}(\bar{c},a_3)$$
$$+3d^2\underline{F}(a_0,a_2)] \tag{3.10}$$

由(3.5)求得

$$c_2=\begin{pmatrix}0\\0\\c_2^{(3)}\end{pmatrix},\quad c_2^{(3)}=-\frac{(1-\beta^2)[8\alpha\beta^2+i(2\alpha^2\beta^3/\sqrt{1-\beta^2}-8\beta\sqrt{1-\beta^2})]}{[\alpha^2\beta^2+4(1-\beta^2)]^2} \tag{3.11}$$

由(3.2)，(3.3)和(3.7)有

$$(A-iI)a_1=-\frac{3}{2}[d^2\underline{F}(c,a_0)+d^2\underline{F}(\bar{c},a_2)]$$

$$+\frac{3}{4}\boldsymbol{d}^t[d^2\underline{F}(c,a_0)+d^2\underline{F}(\bar{c},a_2)]c$$

又由$\boldsymbol{d}^t a_1=0$求得

$$a_1^t=\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad i-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad 0\right)\cdot\frac{3}{8}h$$

其中

$$h=\frac{4\beta}{\alpha\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{2\alpha\beta^3-i4\beta^2\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}[\alpha^2\beta^2+4(1-\beta^2)]} \tag{3.12}$$

据(3.8)，(3.9)，(3.10)，计算得

$$b_0=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{6}{\alpha}\mathrm{Re}\left[\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)h\right]\end{pmatrix}$$

$$b_2=\begin{pmatrix}0\\0\\b_2^{(3)}\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}a_3^{(1)}\\a_3^{(2)}\\0\end{pmatrix}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}b_2^{(3)}&=\frac{4\beta}{\alpha\beta+2i\sqrt{1-\beta^2}}\left(2a_3^{(2)}+\frac{3}{4}h\left(i-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right]\\a_3^{(2)}&=\frac{3\beta^2}{8(1-\beta^2)}\cdot\frac{(\alpha\beta-2i\sqrt{1-\beta^2})(\beta+3i\sqrt{1-\beta^2})}{\alpha^2\beta^2+4(1-\beta^2)}\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

若$(\alpha,\beta)\in\Gamma$，则

$$\frac{\beta^2}{1-\beta^2}=\frac{8}{2\alpha-3\alpha^2} \tag{3.14}$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2\beta^2+4(1-\beta^2)}=\frac{2}{\alpha(2-\alpha)} \tag{3.15}$$

因此
$$h=-\frac{8}{\alpha(2-\alpha)}\left(i-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{3.16}$$

$$a_1^{(2)}=-\frac{3}{\alpha(2-\alpha)}\left(i-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 \tag{3.17}$$

$$a_2^{(3)}=\frac{2}{2-\alpha}\left(1-i\frac{2}{\alpha}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\right) \tag{3.18}$$

$$a_3^{(2)}=\frac{3}{4\alpha(2-\alpha)}\left[6+\alpha\frac{\beta^2}{1-\beta^2}+i\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}(3\alpha-2)\right] \tag{3.19}$$

$$b_2^{(3)}=\frac{12}{\alpha^2(2-\alpha)^2}\left[12+16\alpha+\alpha(\alpha-4)\frac{\beta^2}{1-\beta^2}+i\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(8+4\alpha+3\alpha^2-20\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\right)\right] \tag{3.20}$$

据(3.6)得

$$R_{200}=\frac{2\beta}{4!\sqrt{1-\beta^2}}\mathrm{Re}\left\{\left(1-i\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\left[\frac{3}{\alpha}\mathrm{Re}\left(i-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)h+\frac{1}{2}b_2^{(3)}+\frac{3}{2\alpha}\left(i-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)h+2a_2^{(3)}\bar{a}_1^{(2)}+2\bar{a}_2^{(3)}a_3^{(2)}\right]\right\} \tag{3.21}$$

将(3.16)～(3.19)代入(3.21)，整理得

$$R_{200}=\frac{1}{\alpha^2(2-\alpha)^2}\left[72\alpha+\frac{\beta^2}{1-\beta^2}(48-24\alpha+36\alpha^2)\right] \tag{3.22}$$

由(3.15)，(3.16)得

$$q_{100}=\frac{2}{\alpha(2-\alpha)}\frac{1}{1-\beta^2} \tag{3.23}$$

$$R_{101}=\frac{4}{\alpha^2(2-\alpha)^2}\left(4-4\alpha-\frac{\alpha^2\beta^2}{1-\beta^2}\right)\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \tag{3.24}$$

将(3.22)～(3.24)代入(3.11)，得

$$a_{ss}(0,2,\alpha,\beta)=\frac{16-2\alpha-3\alpha^2}{\alpha} \tag{3.25}$$

$$a_{ss}>0,\qquad \alpha\in(0,2/3] \tag{3.26}$$

由(2.11)有

$$\frac{d}{d\beta}a_s=-\frac{4\beta^2(2-\alpha)}{\sqrt{1-\beta^2}\,[\alpha^2\beta^2+4(1-\beta^2)]^2}<0 \tag{3.27}$$

其中
$$\beta^2=\frac{8}{8+2\alpha-3\alpha^2}$$

由［3］的命题 3.48，$\left(\beta-\sqrt{\frac{8}{8+2\alpha-3\alpha^2}}\right)$是开折参数．当$\left|\beta-\sqrt{\frac{8}{8+2\alpha-3\alpha^2}}\right|$充分小时，(2.1)的微幅周期解存在且其稳定性与方程$\dot{r}=r^5+2\delta^*r^3+\varepsilon^*(k-2)r$的平衡解$r\geqslant0$等价，

其中 $\varepsilon^*=\mathrm{sgn}\dfrac{a_k}{a_{ss}}(0,2,\alpha,\beta)$，$\delta^*=\mathrm{sgn}(a_{s\beta}/a_{ss})$。

由(2.3)，(3.26)，(3.27)可得

$$\varepsilon^*=\delta^*=-1$$

从而我们有

定理 2 设$\delta^{**}>0$充分小，分叉曲线Γ的上、下半邻域如下定义：

$$B(\Gamma)_+=\{(\alpha,\beta)\,|\,0<\alpha<2/3,\quad 0<\beta-\sqrt{8/(8+2\alpha-3\alpha^2)}<\delta^{**}\}$$

$$B(\Gamma)_-=\{(\alpha,\beta)\,|\,0<\alpha<2/3,\quad 0<\sqrt{8/(8-2\alpha-3\alpha^2)}-\beta<\delta^{**}\}$$

则存在只与α有关的充分小的$\varepsilon_2(\alpha)>0$，使当$(\alpha,\beta)\in B(\Gamma)_+$，$0<k-2<\varepsilon_2(\alpha)$时，系统(1.1)存在稳定的周期解，且有跳跃与滞后产生；当$(\alpha,\beta)\in\Gamma\cup B(\Gamma)_-$，$0<k-2<\varepsilon_2(\alpha)$时，系统(1.1)只存在稳定的周期解(见图2)。

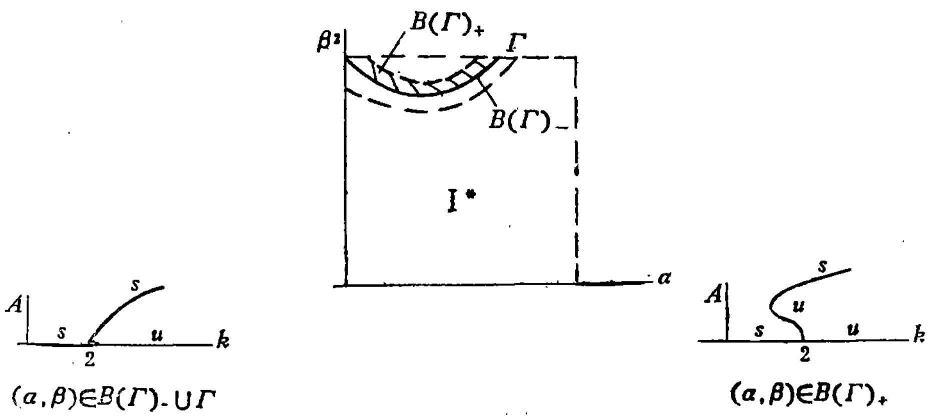

图 2

感谢陆启韶副教授的热情指导。

参 考 文 献

[1] 李炳熙，《高维动力系统的周期轨道：理论与应用》，上海科技出版社 (1984).

[2] Golubitsky, M. and D. G. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol.1, Springer-Verlag, New York (1985).

[3] Golubitsky, M. and W. F. Langford, Classification and unfoldings of degenerate Hopf bifurcations, *J. Diff. Eqs.*, **41** (1981), 375—415.

[4] Golubitsky, M. and I. Stewart, Symmetry and stability in Taylor-Couette flow, *SIAM J. Math. Anal.*, **17** (1986), 249—288.

[5] Chen, Y. S. and W. F. Langford, Subharmonic resonance in nonlinear Mathieu equations, 天津大学学习班资料 (1987).

[6] Abragram, A., *The Principle of Nuclear Magnetism*, Oxford Univ. Press, New York (1961).

[7] Sherman, S., A third-order nonlinear system arising from a nuclear spin generator, *Contr. Diff. Eqs. Z.*, 2 (1963), 197—227.

Hopf Bifurcation in a Three-Dimensional System

Li De-ming Huang Ke-lei

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing)

Abstract

In this paper, Liapunov-Schmidt reduction and singularity theory are employed to discuss Hopf and degenerate Hopf bifurcations in global parametric region in a three-dimensional system $\dot{x}=-\beta x+y$, $\dot{y}=-x-\beta y[1-kz]$, $\dot{z}=\beta[a(1-z)-ky^2]$. The conditions on existence and stability are given.