

基于广义变分原理的矩形薄板单元

钱伟长 王 刚

(上海工业大学) (上海铁道学院)

(1988年5月1日收到)

摘 要

本文应用广义变分原理, 构造了适合正交各向异性薄板静动力分析的矩形单元 MR-12。计算结果表明, 基于广义变分原理的非协调元具有很好的收敛性和计算精度, 证明了广义变分原理在建立非协调单元中的有效性和优越性。

MR-12 单元的计算格式和普通矩形板元无原则性的差别, 极易推广使用。

一、前 言

在板壳的有限元分析中, 非协调元一般比协调元优越, 因此, 研究非协调元在有限元分析中具有重要地位。

在非协调元的研究中, 有 Oden 的罚函数法, 卞学锁的杂交元法, Zienkiewicz 的缩并降阶积分法, 以及唐立民的拟协调元法。上述各法各有特点, 但也都有困难。钱伟长教授自1979年以来, 用识别的拉氏乘子法和广义变分法, 导出了用原有待定场变量表示的连续条件, 在理论上使该法具有明确的物理意义。该法已被美国“应用力学进展”所接受。

本文根据钱的理论, 构造了矩形非协调板元 MR-12, 证明了钱伟长方法的收敛性和计算精度都具有良好的性态, 并推广了钱的方法, 使其适用于正交各向异性板的静、动力分析。

二、适合薄板有限元计算的分区广义变分原理

将薄板所在域分成 N 个子域

$$\Omega = \sum_{\sigma=1}^N \Omega^{\sigma}$$

又设板上除横向面力 \bar{f} 和边界力 H_n, M_n 作用外, 还有集中力 $P_{k_1} (k_1=1, 2, \dots, k_{\sigma})$ 。集中力 P_{k_1} 的作用点以及给定位移 $w_{k_2} (k_2=1, 2, \dots, k_w)$ 都在各子域的的角点上。对于典型子域 Ω^{σ} (图 1), 其广义泛函为

$$\begin{aligned}
 \Pi_e^* = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega^e} D_{\alpha\beta\gamma\delta} w_{,\alpha}^e w_{,\beta}^e w_{,\gamma}^e w_{,\delta}^e d\Omega - \iint_{\Omega^e} f w^e d\Omega \\
 & - \int_{S_{\sigma_1}} H_n w^e dS + \int_{S_{\sigma_2}} M_n w_{,n}^e dS \\
 & - \sum_{k_1=1}^{k_\sigma^e} P_{k_1} w_{k_1}^e - \int_{S_{w_1}} (w^e - \bar{w}) H_n^e dS \\
 & + \int_{S_{w_2}} M_n^e (w_{,n}^e - \bar{w}_{,n}) dS \\
 & + \sum_{k_2=1}^{k_w^e} \Delta k_2 M_{n_2}^e (w_{k_2}^e - \bar{w}_{k_2})
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

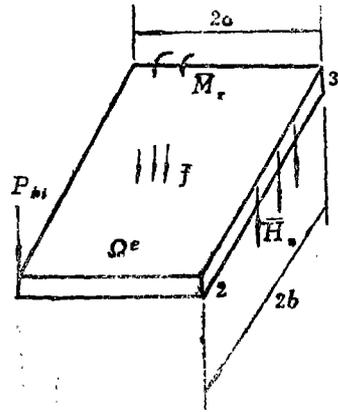


图 1

如果选择的单元位移函数满足 $w^e = w^{e'}$, $w_{,n}^e = -w_{,n}^{e'}$, 那么

$$\Pi_e = \sum_{e=1}^N \Pi_e^* \tag{2.2}$$

就是建立协调薄板单元的广义泛函。

若在相邻单元边界上, 位移函数的选择使 $w^e \neq w^{e'}$ 或 $w_{,n}^e \neq w_{,n}^{e'}$, 那么为消除位移协调条件, 引入拉格朗日乘子 $A_1^{e'e'}$, $A_2^{e'e'}$, 作新的泛函

$$\begin{aligned}
 \Pi_e^* = & \Pi_e + \sum_{\text{all } S^{e,e'}} \left\{ \int_{S^{e,e'}} (w^e - w^{e'}) A_1^{e'e'} dS \right. \\
 & \left. + \int_{S^{e,e'}} (w_{,n}^e + w_{,n}^{e'}) A_2^{e'e'} dS \right\}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

由式(2.3)的变分驻值原理, 可以得到各单元的平衡方程、边界条件、角点条件, 同时还可识别拉氏乘子

$$A_1^{e'e'} = -H_n^e = -H_n^{e'}, \quad A_2^{e'e'} = M_n^e = -M_n^{e'} \tag{2.4}$$

计算中通常取

$$A_1^{e'e'} = -(H_n^e + H_n^{e'})/2, \quad A_2^{e'e'} = (M_n^e - M_n^{e'})/2 \tag{2.5}$$

将(2.5)式代入(2.3)式即可得建立非协调板元的广义泛函。

三、基于广义变分原理的矩形薄板单元

如图 2 所示的薄板, 厚度为 h , 取直角坐标系 $Oxyz$, 使 Oxy 位于薄板的中面, 当薄板的材料为正交各向异性时, x, y 轴分别平行于材料的弹性主向。

将图 2 所示的薄板划分成一组矩形单元, 其中任一单元如图 1 所示。为方便, 引进自然坐标系 $O\xi\eta$ (图 3)。取结点的广义位移为

$$\{\delta_i\} = \left\{ \begin{matrix} w_i \\ \theta_{z_i} \\ \theta_{y_i} \end{matrix} \right\} \tag{3.1}$$

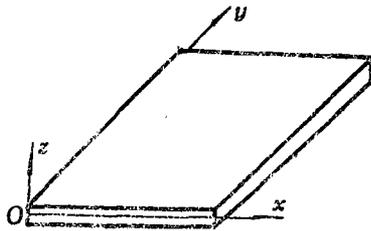


图 2

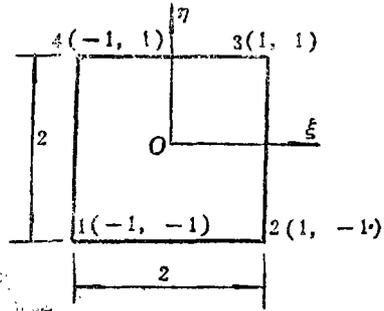


图 3

板单元的横向位移可以表示成

$$w^e = [N] \{\delta\}^e \tag{3.2}$$

式中 $[N]^e = [[N_1] [N_2] [N_3] [N_4]]$, $[N_i] = [N_i, N_{z_i}, N_{y_i}]$,

$$[\delta]^e = [\{\delta_1\}^T \{\delta_2\}^T \{\delta_3\}^T \{\delta_4\}^T]^T$$

而

$$\left. \begin{aligned} N_i &= (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(2 + \xi_0 + \eta_0 - \xi^2 - \eta^2)/8 \\ N_{z_i} &= -b\eta_i(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 - \eta^2)/8 \\ N_{y_i} &= a\xi_i(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 - \xi^2)/8 \end{aligned} \right\} \tag{3.3}$$

其中 $\xi_0 = \xi_i \xi$, $\eta_0 = \eta_i \eta$

为了和通常的有限元的做法一致，把位移边界条件的处理放到静力方程形成后进行。此外，由于所取插值函数沿相邻单元边界的位移是协调的，即 $w^e = w^{e'}$ ，所以(2.3)式中

$$\sum_{\text{all } S^{e'e'}} \int_{S^{e'e'}} (w^e - w^{e'}) A_i^{e'e'} dS = 0$$

于是，用于实际计算的广义泛函为

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{e=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \iint_{\Omega^e} D_{\alpha\beta\gamma\delta} w_{,\alpha}^e w_{,\beta}^e w_{,\gamma}^e w_{,\delta}^e d\Omega + \frac{1}{2} \sum_{S^{e'e'} \text{ of } e} \int_{S^{e'e'}} (M_n^e - M_n^{e'}) w_{,n}^e dS \right. \\ &\quad \left. - \iint_{\Omega^e} f w^e d\Omega + \int_{S_{\sigma_2}} M_n w_{,n}^e dS - \int_{S_{\sigma_1}} H_n w^e dS - \sum_{k_1=1}^{k_\sigma} P_{k_1} w_{k_1}^e \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K^*] \{\delta\} - \{\delta\}^T \{Q\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$[K^*] = \sum_{e=1}^N ([K1]^e + [K2]^e)$$

上式中 $[K1]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha \cdot b [B]^T [D] [B] d\xi d\eta$

而 $[B] = [[B_1] [B_2] [B_3] [B_4]]$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \xi_0(1+\eta_0) \frac{1}{a^2} & 0 & -\frac{\xi_0}{4a} (1+3\xi_0)(1+\eta_0) \\ -\frac{3}{4} \eta_0(1+\xi_0) \frac{1}{b^2} & \frac{\eta_0}{4b} (1+\xi_0)(1+3\eta_0) & 0 \\ -\frac{1}{4} \xi_0 \eta_0 (3\xi_0^2+3\eta_0^2-4) \frac{1}{ab} & \frac{\xi_0}{4a} (3\eta_0^2+2\eta_0-1) & -\frac{\eta_0}{4b} (3\xi_0^2+2\xi_0-1) \end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}$$

$$[K_2]^e = \sum_{i=0}^4 [K_{2i}]^e$$

$$\begin{aligned} [K_{2_0}]^e &= \int_{-1}^1 -[B]^T \Big|_{\xi=-1} \{C1\} [N], \xi \Big|_{\xi=-1} \frac{b}{a} d\eta \\ &\quad - \int_{-1}^1 [B]^T \Big|_{\eta=-1} \{C2\} [N], \eta \Big|_{\eta=-1} \frac{a}{b} d\xi \\ &\quad + \int_{-1}^1 [B]^T \Big|_{\xi=-1} \{C1\} [N], \xi \Big|_{\xi=-1} \frac{b}{a} d\eta \\ &\quad + \int_{-1}^1 [B]^T \Big|_{\eta=-1} \{C2\} [N], \eta \Big|_{\eta=-1} \frac{a}{b} d\xi \end{aligned}$$

$$[K_{2_1}]^e = \int_{-1}^1 [B]^T \Big|_{\xi=-1} \{C1\} [N], \xi \Big|_{\xi=-1} \frac{b}{a} d\eta$$

$$[K_{2_2}]^e = \int_{-1}^1 [B]^T \Big|_{\eta=-1} \{C2\} [N], \eta \Big|_{\eta=-1} \frac{a}{b} d\xi$$

$$[K_{2_3}]^e = \int_{-1}^1 -[B]^T \Big|_{\xi=-1} \{C1\} [N], \xi \Big|_{\xi=-1} \frac{b}{a} d\eta$$

$$[K_{2_4}]^e = \int_{-1}^1 -[B]^T \Big|_{\eta=-1} \{C2\} [N], \eta \Big|_{\eta=-1} \frac{a}{b} d\xi$$

$$\{C1\} = \frac{h^3}{12} [Q_{11} \quad Q_{12} \quad 0]^T$$

$$\{C2\} = \frac{h^3}{12} [Q_{21} \quad Q_{22} \quad 0]^T, \quad \{Q\} = \sum_{\sigma=1}^N \{Q\}^\sigma$$

$$\begin{aligned} \{Q\}^\sigma &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f [N]^T a \cdot b d\xi d\eta \\ &\quad - \int_{S_{\sigma_2}} M_n [N]^T, \eta dS + \int_{S_{\sigma_1}} H_n [N]^T dS \end{aligned}$$

由 $\delta\Pi=0$, 可得静力方程

$$[K] \{\delta\} = \{Q\}$$

(3.5)

式中

$$[K] = ([K^*] + [K^*]^T) / 2$$

采用有限元常用的方法对静力方程(3.5)进行边界条件的处理,得到修正后的静力方程

$$[K]\{\delta\} = \{Q\} \quad (3.6)$$

求解方程(3.6),可以得到各结点广义位移的解。

四、算 例

按本文推导的结果,编制了计算程序,进行了计算。计算采用弹性方板,网格划分见图4。

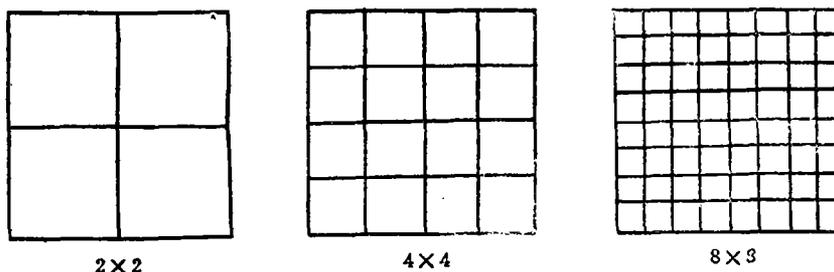


图 4

表 1 四周简支方板受均压

网格划分	R-12*	误差 Δ%	MR-12	误差 Δ%
2×2	0.005066	24.7	0.004109	1.16
4×4	0.004330	6.6	0.004068	0.15
8×8	0.004131	1.7	0.004063	0.02
解析解	0.004062			

表 2 四周固支方板受均压

网格划分	R-12	误差 Δ%	MR-12	误差 Δ%
2×2	0.00148	17.46	0.00140	11.11
4×4	0.00140	11.11	0.00134	6.35
8×8	0.00130	3.53	0.00128	1.59
解析解	0.00126			

表 3 四周简支方板受中心集中力

网格划分	R-12	误差 Δ%	MR-12	误差 Δ%
2×2	0.01378	18.81	0.01123	-3.15
4×4	0.01233	6.29	0.01160	-0.83
8×8	0.01182	1.95	0.01157	-0.25
解析解	0.01160			

表 4 四周固支方板受中心集中力

网格划分	R-12	误差 Δ%	MR-12	误差 Δ%
2×2	0.00591	5.54	0.00568	-0.36
4×4	0.00613	9.46	0.00571	1.96
8×8	0.00580	3.57	0.00562	0.36
解析解	0.00560			

* R-12 为用最小势能原理建立的矩形单元。

五、MR-12单元求解薄板的自振频率

MR-12 单元的质量矩阵为

$$[M] = \sum_{e=1}^N [M]^e$$

$$[M]^e = \iint_{\Omega^e} \rho h [N]^T [N] d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho h [N]^T [N] a \cdot b d\xi d\eta$$

于是 MR-12 求解薄板的自振频率可以归结为一个广义特征值问题:

$$[K] - \lambda [M] = 0 \quad (5.1)$$

$$\lambda = \omega^2$$

求解(3.6)式,可以得到薄板振动时的固有频率。本文计算了几个例题,计算精度令人满意。

六、薄板固有频率算例

1. 薄板边长 $a \times a = 2 \times 2 \text{m}$, 板厚 $h = 0.1 \text{m}$, 质量面密度 $m = 780 \text{kg/m}^2$, $\nu = 0.3$, $E = 2.1 \times 10^7 \text{N/m}^2$ 。

表 5 各向同性简支方板的自振频率

网格划分	α_{11}^*	$\Delta\%^{**}$	α_{12}	$\Delta\%$	α_{21}	$\Delta\%$
2×2	2.019	0.95	5.438	8.76	—	—
3×3	2.006	0.30	5.077	1.54	8.154	1.93
4×4	2.002	0.10	5.032	0.64	8.076	0.95
5×5	2.002	0.10	5.015	0.30	8.040	0.50
7×7	2.001	0.06	5.006	0.09	8.013	0.16
8×8	2.000	0.00	5.002	0.05	8.008	0.10

* α_{ij} : $\omega_{ij} = \alpha_{ij} \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}$, 其中 a 为板边长, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, m 为质量面密度。

** $\Delta\% = \frac{\text{数值解} - \text{解析解}}{\text{解析解}} \times 100\%$

2. 正交各向异性方板, 边长 $a = 2 \text{m}$, 板厚 $h = 0.1 \text{m}$, 质量面密度 $m = 780 \text{kg/m}^2$, $D_1 = 4.59 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}$, $D_2 = 1.53 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}$, $D_k = 0.75 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}$, $D_3 = 1.88 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}$

表 6 正交各向异性简支方板自振频率

网格划分	ω_{11}	$\Delta\%$	ω_{12}	$\Delta\%$
2×2	279.84	0.77	617.07	5.17
3×3	278.73	0.37	593.83	1.20
4×4	278.14	0.16	580.14	0.58
5×5	277.99	0.10	588.65	0.32
7×7	277.80	0.04	587.71	0.16
8×8	277.74	0.01	587.48	0.12
解析解	277.697		586.76	

表 7 正交各向异性固支方板自振频率

网格划分	ω_{11}	$\Delta\%$	ω_{12}	$\Delta\%$
3×3	618.56	-3.79	893.83	-1.47
4×4	524.01	-2.78	179.69	-3.03
5×5	528.93	-1.86	883.69	-2.59
7×7	534.10	-0.91	892.82	-1.59
8×8	535.48	-0.65	895.73	-1.26
10×10	536.76	-0.41	899.13	-0.89
解析解	538.98		907.20	

七、结 论

基于广义变分原理的非协调单元 MR-12, 有着很好的收敛性和计算精度。和基于最小势能原理的同样单元相比, 其优越性是明显的。它不需要增加新的单元变量, 从而使计算过程简单易行。同时, 几何不增加数据准备工作量, 使 MR-12 具有很好的实用价值, 便于推广使用。

本文的工作验证了钱伟长的非协调单元理论, 表明广义变分原理支持的非协调单元有着十分广阔的前景。

本文工作得到了卢文达教授和何福保教授的支持帮助, 在此谨表衷心感谢。

参 考 文 献

- [1] 钱伟长, 《广义变分原理》, 知识出版社 (1985).
- [2] Chien, W. Z., Incompatible plate elements based upon generalized variational principles, *Hybrid and Mixed Finite Element Method*, eds. A. N. Atluri, R. H. Gallagher and O. C. Zienkiewicz (1983), 381—404.
- [3] 谢贻权、何福保, 《弹性和塑性力学中的有限单元法》, 机械工业出版社 (1981).

A Rectangular Element of Thin Plates Based upon the Generalized Variational Principles

Chien Wei-zang

(Shanghai University of Technology, Shanghai)

Wang Gang

(Shanghai Institute of Railway Technology; Shanghai Institute of Appl. Math. and Mech., Shanghai)

Abstract

Based on generalized variational principles, an element called MR-12 was constructed for the static and dynamic analysis of thin plates with orthogonal anisotropy. Numerical results showed that this incompatible element converges very rapidly and has good accuracy. It was demonstrated that generalized variational principles are useful and effective in founding incompatible element.

Moreover, element MR-12 is easy for implementation since it does not differ very much from the common rectangular element R-12 of thin plate.