应用数学和力学，第10卷第12期(1989年12月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于卷积型组合恒等式的格路方法(Ⅱ)
——赋权格路的枚举函数方法*

初 文 昌

(中国科学院系统科学研究所，1988年10月5日收到)

摘 要

作为无限制条件下格路计数函数——Gauss多项式系数的自然拓广，作者研究了赋权格路的枚举问题．对应的卷积计算则产生普通多项式系数和Gauss的 q-多项式系数的Vandermonde组合恒等式．

设 $\mathbf{N}_0$ 表示非负整数集合，$\mathbf{N}_0^k$ 中的一条格路 l 由 $\mathbf{N}_0^k$ 中沿坐标轴正向具有单位步长的有限序列所组成．以 e_i 表示 $\mathbf{N}_0^k$ 中第 i 个分量为1的单位矢量．对于 $\bar{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_k)\in\mathbf{N}_0^k$，定义由 $\bar{x}$ 至 $\bar{x}+e_i$ 的步骤之权因子为 $\omega_i(\bar{x})$，其中 $\omega_i(\bar{x})$ 是 $\mathbf{N}_0^k$ 上的取值于可换环上的函数 $(1\leqslant i\leqslant k)$．格路 l 的权函数 $W(l)$ 定义为构成 l 的步骤的权因子之积．设 $L(\bar{m};\bar{n})$ 表示 $\mathbf{N}_0^k$ 中由 $\bar{m}$ 至 $\bar{n}$ 的所有格路集，则对应的赋权枚举函数由下式界定

$$W(\bar{m}\#\bar{n})=\sum_{l\in L(\bar{m};\bar{n})}W(l) \tag{1}$$

例如，对于平面格路定义

$$\omega_1(i, j)=j,\ \omega_2(i, j)=i \tag{2}$$

则得到Eulerian数 (Foukle[4], 1977)

$$W[(1, 1)\#(n-k+1, k)]=A(n, k) \tag{3}$$

如果将(2)式的定义替换为Gauss二项式系数

$$\omega_1(i, j)=\begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix},\ \omega_2(i, j)=\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

则计数函数便成为 q-Eulerian数 (Carlitz[3], 1978)

$$W[(1, 1)\#(n-k+1, k)]=q^{-(n-k)(n-k+1)}A_{n,k}(q) \tag{5}$$

为叙述方便，引入下述概念．$\mathbf{F}$ 被称为 $\mathbf{N}_0^k$ 中的序理想[6]如果 $\bar{y}\in\mathbf{F}$ 且 $\bar{x}\leqslant\bar{y}$ (即 $x_i\leqslant y_i$，$1\leqslant i\leqslant k$)隐函 $\bar{x}\in\mathbf{F}$．对任何 $\bar{x}\in\mathbf{F}$，设 $B(\bar{x})$ 表示点集 $\{\bar{x}+e_i|\bar{x}+e_i\bar{\in}\mathbf{F}\}$．因此对任何 $\bar{n}\bar{\in}\mathbf{F}$，每一个由 $\bar{o}$ 至 $\bar{n}$ 的 $\mathbf{N}_0^k$ 中的格路一定包含一个步骤 $\bar{x}\to\bar{y}$ $(\bar{x}\in\mathbf{F},\ \bar{y}\bar{\in}B(\bar{x}))$ 使得该步骤穿过 $\mathbf{F}$ 的

* 吴学谋推荐．

外围边界B。如果定义单位矢量的特征函数

$$\chi(e_j)=j \qquad (1\leqslant j\leqslant k) \tag{6}$$

则由上述分析便得卷积恒等式。

定理 1　设$\mathbf{F}$是$\mathbf{N}_0^k$中的序理想且$\bar{n}\in\mathbf{F}$，则

$$W(\bar{o}\#\bar{n})=\sum_{\bar{x}\in\mathbf{F}}\sum_{\bar{y}\in B(\bar{x})}\omega_{\chi(\bar{y}-\bar{x})}(\bar{x})W(\bar{o}\#\bar{x})W(\bar{y}\#\bar{n}) \tag{7}$$

下面讨论定理的应用。

设 $\bar{x}\in\mathbf{N}_0^k$，则对 $0=i_0<i_1<\cdots<i_d=k$，记子矢量 $\bar{x}_\nu=(x_{i_{\nu-1}+1}, x_{i_{\nu-1}+2}, \cdots, x_{i_\nu})$。因此 $\bar{x}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_d)$。定义权因子函数

$$\omega_i(\bar{x})=q^{|\bar{x}_1|+|\bar{x}_2|+\cdots+|\bar{x}_{\nu-1}|} \qquad (i_{\nu-1}<i\leqslant i_\nu,\ 1\leqslant\nu\leqslant d) \tag{8}$$

此处$|\bar{x}|$表示$\bar{x}$的分量和。按格路集合的最后步骤的方向进行分类，则得下述关于计数函数的递归关系

$$W(\bar{o}\#\bar{n})=\sum_{\nu=1}^{d}q^{\sum_{i=1}^{\nu-1}|\bar{n}_i|}\sum_{j=i_{\nu-1}+1}^{i_\nu}W(\bar{o}\#\bar{n}-e_j) \tag{9}$$

可以验证

$$W(\bar{o}\#\bar{n})=\begin{bmatrix}|\bar{n}|\\|\bar{n}_1|, |\bar{n}_2|, \cdots, |\bar{n}_d|\end{bmatrix}\prod_{j=1}^{d}\binom{|\bar{n}_j|}{\bar{n}_j} \tag{10}$$

满足(9)式。其中

$$\binom{|\bar{x}|}{\bar{x}}=\binom{|\bar{x}|}{x_1, x_2, \cdots, x_k}, \qquad \begin{bmatrix}|\bar{x}|\\\bar{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|\bar{x}|\\x_1, x_2, \cdots, x_k\end{bmatrix}$$

分别为通常的和 Gauss 的 q-多项式系数[1,6~8]。

如果取 $d=2$，$i_1=1$，$i_2=k$，则方程(10)便给出 Niederhausen[9] 的公式；进一步地取 $k=2$，则得到 Pólya[5] 关于平面格路具有面积参数的枚举函数；当取 $d=k$ 时，(10)式便给出 Sulanke[6] 由多重集合排列的逆序数统计量[8] 而类比的格路枚举结果。

由方程(10)，可以计算

$$W(\bar{y}\#\bar{n})=\begin{bmatrix}|\bar{n}-\bar{y}|\\|\bar{n}_1-\bar{y}_1|, |\bar{n}_2-\bar{y}_2|, \cdots, |\bar{n}_d-\bar{y}_d|\end{bmatrix}$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{d}\binom{|\bar{n}_j-\bar{y}_j|}{\bar{n}_j-\bar{y}_j}q^{\sum_{j=2}^{d}\sum_{i=1}^{j-1}|\bar{y}_i|(|\bar{n}_j-\bar{y}_j|)} \tag{11}$$

根据定理1，便有下述关于两种多项式系数的卷积恒等式。

定理 2　在定理 1 的条件下，下式成立

$$\begin{bmatrix}|\bar{n}|\\|\bar{n}_1|, |\bar{n}_2|, \cdots, |\bar{n}_d|\end{bmatrix}\prod_{j=1}^{d}\binom{|\bar{n}_j|}{\bar{n}_j}=\sum_{\bar{x}\in\mathbf{F}}\sum_{\bar{y}\in B(\bar{x})}q^{\sum_{\nu=2}^{d}\sum_{i=1}^{\nu-1}|\bar{y}_i|(|\bar{n}_\nu-\bar{y}_\nu|)}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}|\bar{x}|\\|\bar{x}_1|, |\bar{x}_2|, \cdots, |\bar{x}_d|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|\bar{n}-\bar{y}|\\|\bar{n}_1-\bar{y}_1|, |\bar{n}_2-\bar{y}_2|, \cdots, |\bar{n}_d-\bar{y}_d|\end{bmatrix}$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{d}\binom{|\bar{x}_j|}{\bar{x}_j}\binom{|\bar{n}_j-\bar{y}_j|}{\bar{n}_j-\bar{y}_j} \tag{12}$$

在上述恒等式中取 $d=k$ 则得

系理 1 （Sulanke[6]，1981）。

$$\sum_{\bar{x}\in\mathbf{F}}\sum_{\bar{y}\in B(\bar{x})} q^{\sum_{\nu=2}^{d}\sum_{i=1}^{\nu-1}y_i(n_\nu-x_\nu)}\begin{bmatrix}|\bar{x}|\\ \bar{x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|\bar{n}-\bar{y}|\\ \bar{n}-\bar{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|\bar{n}|\\ \bar{n}\end{bmatrix} \tag{13}$$

现在考虑另一类赋权因子函数。对于 $\bar{x}_1\in\mathbf{N}_0^r$ 和 $\bar{x}_2\in\mathbf{N}_0^s$，定义权因子函数

$$\left.\begin{aligned}&\omega_i(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=q^{x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}} \qquad (1\leqslant i\leqslant r)\\ &\omega_j(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=1 \qquad (r<j\leqslant r+s)\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中 $\bar{x}_1=(x_1,x_2,\cdots,x_r)$，$\bar{x}_2=(x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_{r+s})$。

设 $\bar{m}\in\mathbf{N}_0^r$，$\bar{n}\in\mathbf{N}_0^s$。类似于(9～10)，可以验证由原点至 $(\bar{m},\bar{n})\in\mathbf{N}_0^{r+s}$ 的格路集合的对应赋权函数为

$$W[\bar{o}\#(\bar{m},\bar{n})]=\binom{|\bar{m}|+|\bar{n}|}{|\bar{m}|}\begin{bmatrix}|\bar{m}|\\ \bar{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|\bar{n}|\\ \bar{n}\end{bmatrix} \tag{15}$$

类似于(11)，我们有

$$W[(\bar{y}_1,\bar{y}_2)\#(\bar{m},\bar{n})]=q^{\sum_{i=2}^{r}\sum_{j=1}^{i-1}y_j(m_i-x_i)}\binom{|\bar{m}|+|\bar{n}|-|\bar{y}_1|-|\bar{y}_2|}{|\bar{m}-\bar{y}_1|}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}|\bar{m}-\bar{y}_1|\\ \bar{m}-\bar{y}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|\bar{n}-\bar{y}_2|\\ \bar{n}-\bar{y}_2\end{bmatrix} \tag{16}$$

设$\mathbf{F}$为$\mathbf{N}_0^{r+s}$中的序理想，并且 $(\bar{m},\bar{n})\bar{\in}\mathbf{F}$。由定理 1 及(15)～(16)则有恒等式

定理 3

$$\binom{|\bar{m}|+|\bar{n}|}{|\bar{m}|}\begin{bmatrix}|\bar{m}|\\ \bar{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|\bar{n}|\\ \bar{n}\end{bmatrix}=\sum_{\bar{x}\in\mathbf{F}}\sum_{\bar{y}\in B(\bar{x})}\binom{|\bar{x}_1|+|\bar{x}_2|}{|\bar{x}_1|}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}|\bar{x}_1|\\ \bar{x}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|\bar{x}_2|\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}q^{\sum_{i=2}^{r}\sum_{j=1}^{i-1}y_j(m_i-x_i)}\binom{|\bar{m}|+|\bar{n}|-|\bar{y}_1|-|\bar{y}_2|}{|\bar{m}-\bar{y}_1|}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}|\bar{m}-\bar{y}_1|\\ \bar{m}-\bar{y}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|\bar{n}-\bar{y}_2|\\ \bar{n}-\bar{y}_2\end{bmatrix} \tag{17}$$

类似于[2，6～7]，通过对于格路的维数和序理想$\mathbf{F}$的特殊选择，可以给出定理 2 和定理 3 的部分具体表达形式——关于普通多项式系数和 q-多项式系数的卷积型恒等式。详细的情况这里从略。

如果$\mathbf{F}=\{\bar{x}|\ |\bar{x}|\leqslant t,\ \bar{x}\in\mathbf{N}_0^k\}$，则每个由原点 $\bar{o}$ 至 $\bar{n}$（其中$|\bar{n}|>t$）的格路一定恰好通过超平面$|\bar{x}|=t$ 上的一点。在这种情形下，定理 1 退化成为

定理 4

$$W(\bar{o}\#\bar{n})=\sum_{|\bar{x}|=t}W(\bar{o}\#\bar{x})W(\bar{x}\#\bar{n}) \tag{18}$$

结合定理2，3，4，则得下述推论。

首先，在(10)～(11)中取 $k=3$，$i_1=2$，$i_2=3$，可以证明

$$W[\bar{o}\#(i,j,k)]=\begin{bmatrix} i+j+k \\ k \end{bmatrix}\binom{i+j}{i} \tag{19}$$

和

$$W[(i,j,k)\#(m,n,p)]=q^{(i+j)(p-k)}\binom{m+n-i-j}{m-i}\begin{bmatrix} m+n+p-i-j-k \\ p-k \end{bmatrix} \tag{20}$$

利用(18～20)，我们有

系理 2

$$\begin{bmatrix} m+n+p \\ p \end{bmatrix}\binom{m+n}{n}=\sum_{i+j+k=t} q^{(i+j)(p-k)}\begin{bmatrix} i+j+k \\ k \end{bmatrix} \cdot\binom{i+j}{i}\begin{bmatrix} m+n+p-i-j-k \\ p-k \end{bmatrix}\binom{m+n-i-j}{m-i} \tag{21}$$

其次取 $r=2$，$s=1$，则(15～16)成为

$$W[\bar{o}\#(i,j,k)]=\binom{i+j+k}{k}\begin{bmatrix} i+j \\ i \end{bmatrix} \tag{22}$$

和

$$W[(i,j,k)\#(m,n,p)]=\binom{m+n+p-i-j-k}{p-k}\begin{bmatrix} m+n-i-j \\ m-i \end{bmatrix} q^{t(n-j)} \tag{23}$$

根据定理 4，下面的恒等式成立

系理 3

$$\binom{m+n+p}{p}\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}=\sum_{i+j+k=t} q^{t(n-j)}\binom{i+j+k}{k}\begin{bmatrix} i+j \\ i \end{bmatrix} \cdot\binom{m+n+p-i-j-k}{p-k}\begin{bmatrix} m+n-i-j \\ m-i \end{bmatrix} \tag{24}$$

自然，通过结合定理 4 与方程（8～17），我们亦可给出系理 2 和 3 的多重形式。这里从略。

应该指出：本文提出的赋权计数函数方法与 Lebesgue-Stieltjes 积分方法[10]平行发展，不相重叠。因为对于N_0^3而言，序理想的边界点集和格路的节点集合是互斥的。序理想概念的引入客观上保证格路计数是在无限制条件下进行，因此对应的枚举函数的计算一般没有太大困难。当然，这种方法不再适用于推导具有超平面限制的格路枚举函数及相关的 Rothe-Gould[10]型卷积恒等式。

参 考 文 献

[1] Andrews, G. E., *The Theory of Partitions*, Addison-Wesley, London (1976).

[2] Bender, E. A., A binomial q-Vandermonde convolution, *Discrete Math.*, 1 (1971), 115—119.

[3] Carlitz, L., A note on q-Eulerian numbers, *J. Combin. Th(A)*., 25 (1978), 90—94.

[4] Foukles, H. O., A non-recursive combinatorial rule for Eulerian numbers, *J. Combin. Th(A)*., **22** (1977), 246—248.

[5] Polya, G., On the number of certain lattice polytopes, *J. Combin. Theory*, **6** (1969), 102—105.

[6] Sulanke, R. A., A generalized q-Vandermonde convolution, *J. Combin. Th(A)*., **31** (1981), 33—42.

[7] Sulanke, R. A., q-Counting n-dimensional lattice paths, *J. Combin. Th(A)*., **33** (1982), 135—146.

[8] Zeilberger, D., A lattice walk approach to the "inv" and "maj" q-counting of multiset permutations, *J. Math. Anal. and Appl*., **74** (1980), 192—199.

[9] Niederhausen, H., Linear recurrences under side conditions, *Europ. J. of Combinatorics*, **1** (1980), 353—368.

[10] 初文昌，关于卷积型组合恒等式的格路方法（Ⅰ）———族Lebesque-Stieltjes积分恒等式，东北数学，**4**，2 (1988)，233—240.

On the Lattice Path Method in Convolution-Type Combinatorial Identities (Ⅱ)——The Weighted Counting Function Method on Lattice Paths

Chu Wen-chang

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

An independent method for paper [10] is presented. Weighted lattice paths are enumerated by counting function which is a natural extension of Gaussian multnomial coefficient in the case of unrestricted paths. Convolutions for path counts are investigated, which yields some Vandermonde-type identities for multinomial and q-multinomial coefficients.