应用数学和力学，第10卷第12期(1989年12月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

差分方程奇异摄动问题的渐近解

吴启光

(南京大学，1988年8月19日收到)

摘　要

本文对含小参数的差分方程奇异摄动问题构造了一种新的渐近方法。

一、引　言

在数字模拟，样本控制系统，计算机的自适应控制系统以及经济学，生物学，社会学等方面的许多问题均可用含小参数的差分方程来描述。所以研究差分方程奇异摄动问题解的渐近性态是一个重要的课题。

作者在此文中构造了一种新的渐近方法，它包括以下的步骤：

(i) 当$\varepsilon=0$时原方程退化为低阶的差分方程，然后求退化问题的解。

(ii) 将退化问题的解代入原差分方程的低阶项，然后要求这个方程的解满足已失去的边界条件。

当$\varepsilon\to0$时，这个方程的解逼近于退化问题的解，最后我们取这个方程的解作为原差分问题的渐近解。

二、齐次方程的情形

考虑以下问题

$$\begin{cases}\varepsilon Y_{k+1}+aY_k+bY_{k-1}=0 \qquad k=1,2,\cdots,N-1 & (2.1)\\ Y_0=\alpha,\ Y_N=\beta & (2.2)\end{cases}$$

其中，a，b是非零常数。

当$\varepsilon=0$时方程(2.1)退化为下列方程：

$$aZ_k+bZ_{k-1}=0 \tag{2.3}$$

相应的初始条件为

$$Z_0=\alpha \tag{2.4}$$

这是二阶差分方程退化为一阶差分方程的情形。

* 中国科学院科学基金资助的课题。

问题(2.3)，(2.4)的解为：

$$Z_k=\alpha\left(-\frac{b}{a}\right)^k \tag{2.5}$$

通常，它不满足右端的边界条件，因而在右端失去了一个边界条件。

现在我们将退化问题(2.3)，(2.4)的解Z_k代入原差分方程(2.1)的低阶项，于是得到下列方程

$$\varepsilon Y_{k+1}+aY_k=\alpha a\left(-\frac{b}{a}\right)^k \tag{2.6}$$

这是一阶线性非齐次的差分方程。

容易验证方程(2.6)的特解有以下形式：

$$\frac{\alpha a^2}{a^2-b\varepsilon}\left(-\frac{b}{a}\right)^k \tag{2.7}$$

如果假定方程(2.6)的通解为

$$Y_k=C\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)^k+\frac{\alpha a^2}{a^2-b\varepsilon}\left(-\frac{b}{a}\right)^k \tag{2.8}$$

其中C是一个待定常数。

要求Y_k满足下列条件

$$Y_N=\beta \tag{2.9}$$

从而可得

$$C=\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)^{-N}\left\{\beta-\frac{\alpha a^2}{a^2-b\varepsilon}\left(-\frac{b}{a}\right)^N\right\} \tag{2.10}$$

所以

$$Y_k=\left\{\beta-\frac{\alpha a^2}{a^2-b\varepsilon}\left(-\frac{b}{a}\right)^N\right\}\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)^{-(N-k)}+\frac{\alpha a^2}{a^2-b\varepsilon}\left(-\frac{b}{a}\right)^k \tag{2.11}$$

显然，当$k\neq N$，且$\varepsilon\to 0$时我们有

$$Y_k\to Z_k \tag{2.12}$$

所以我们可选取Y_k作为原方程的渐近解，它严格地满足边界条件(2.9)。

三、非齐次方程的情形

这节我们考虑下列问题

$$\begin{cases}\varepsilon Y_{k+1}+aY_k+bY_{k-1}=f \qquad k=1,2,\cdots,N-1 & (3.1)\\ Y_0=\alpha,\ Y_N=\beta & (3.2)\end{cases}$$

其中 a,b,f 是非零常数，且$a+b\neq 0$。

当$\varepsilon=0$时方程(3.1)退化为下列方程

$$aZ_k+bZ_{k-1}=f \tag{3.3}$$

如果我们假定方程(3.3)的通解为

$$Z_k=E\left(-\frac{b}{a}\right)^k+\frac{f}{a+b} \tag{3.4}$$

其中E为待定常数。

由原问题的条件可得

$$E=\alpha-\frac{f}{a+b} \tag{3.5}$$

所以退化问题

$$\begin{cases} aZ_k+bZ_{k-1}=f & (3.6)\\ Z_0=\alpha & (3.7)\end{cases}$$

的解为表示为：

$$Z_k=\left(\alpha-\frac{f}{a+b}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)^k+\frac{f}{a+b} \tag{3.8}$$

通常，它不满足下列条件：

$$Z_N=\beta$$

类似地，我们有

$$\varepsilon\bar{Y}_{k+1}+aY_k=\frac{af}{a+b}+a\left(\alpha-\frac{f}{a+b}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)^k \tag{3.9}$$

假定方程(3.9)的特解为

$$\frac{af}{(a+b)(a+\varepsilon)}+g\left(-\frac{b}{a}\right)^k \tag{3.10}$$

其中g是一个待定常数。

容易验证

$$g=\frac{a^2}{a^2-b\varepsilon}\left(\alpha-\frac{f}{a+b}\right) \tag{3.11}$$

如果假定方程(3.9)的通解为

$$Y_k=h\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)^k+\frac{af}{(a+b)(a+\varepsilon)}+\frac{a^2}{a^2-b\varepsilon}\left(\alpha-\frac{f}{a+b}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)^k \tag{3.12}$$

其中h是一个待定常数。

类似地，我们有

$$h=\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)^{-N}\left\{\beta-\frac{af}{(a+b)(a+\varepsilon)}-\frac{a^2}{a^2-b\varepsilon}\left(\alpha-\frac{f}{a+b}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)^N\right\} \tag{3.13}$$

所以

$$\begin{aligned}Y_k=&\left\{\beta-\frac{af}{(a+b)(a+\varepsilon)}-\frac{a^2}{a^2-b\varepsilon}\left(\alpha-\frac{f}{a+b}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)^N\right\}\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)^{-(N-k)}\\&+\frac{af}{(a+b)(a+\varepsilon)}+\frac{a^2}{a^2-b\varepsilon}\left(\alpha-\frac{f}{a+b}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)^k\end{aligned} \tag{3.14}$$

显然，当$k\neq N$，且$\varepsilon\to 0$时，我们有

$$Y_k\to Z_k \tag{3.15}$$

所以我们可选Y_k作为原问题的渐近解。

四、渐近解的误差分析

引理 令L_h是正型差分算子，则有

$$\max_{0\le k\le N}|Y_k|\le\max\{|Y_0|,|Y_N|\}+M\cdot\max_{1\le k\le N-1}|L_hY_k| \tag{4.1}$$

证明　见参考文献[5]。

定理1　令Y_k是边值问题(2.1)，(2.2)的解，$\bar{Y}_k$是差分方程的渐近解，若$b>0$，$\varepsilon>0$，$a+b+\varepsilon\leqslant 0$则当$\varepsilon\to 0$时有

$$|Y_k-\bar{Y}_k|\leqslant M\varepsilon \tag{4.2}$$

关于$k=0,1,2,\cdots,N$一致成立，其中$\bar{Y}_k$是问题(2.6)，(2.9)的解。

证明　令$R_k=Y_k-\bar{Y}_k$ 则有

$$\begin{aligned}\varepsilon R_{k+1}+aR_k+bR_{k-1}&=\varepsilon(Y_{k+1}-\bar{Y}_{k+1})+a(Y_k-\bar{Y}_k)+b(Y_{k-1}-\bar{Y}_{k-1})\\&=\varepsilon Y_{k+1}+aY_k+bY_{k-1}-(\varepsilon\bar{Y}_{k+1}+a\bar{Y}_k)-b\bar{Y}_{k-1}\\&=-\alpha a\left(-\frac{b}{a}\right)^k-b\left\{\left(\beta-\frac{\alpha a^2}{a^2-b\varepsilon}\left(-\frac{b}{a}\right)^N\right)\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)^{-(N-k+1)}\right.\\&\qquad\left.+\frac{\alpha a^2}{a^2-b\varepsilon}\left(-\frac{b}{a}\right)^{k-1}\right\}\\&=-\alpha a\left(-\frac{b}{a}\right)^k-b\frac{\alpha a^2}{a^2-b\varepsilon}\left(-\frac{b}{a}\right)^{k-1}+O(\varepsilon)\\&=\alpha a\left(-\frac{b}{a}\right)^k\left\{\frac{a^2}{a^2-b\varepsilon}-1\right\}+O(\varepsilon)=O(\varepsilon)\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$R_0=Y_0-\bar{Y}_0=\alpha-\left\{\left[\beta-\frac{\alpha a^2}{a^2-b\varepsilon}\left(-\frac{b}{a}\right)^N\right]\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)^{-N}+\frac{\alpha a^2}{a^2-b\varepsilon}\right\}=O(\varepsilon)$$

$$R_N=Y_N-\bar{Y}_N=\beta-\beta=0$$

于是根据引理可知

$$R_k=O(\varepsilon)$$

关于$k=0,1,2,\cdots,N$一致成立，所以定理得证。

定理2　令Y_k是边值问题(3.1)，(3.2)的解，$\bar{Y}_k$是差分方程的渐近解，若$b>0$，$\varepsilon>0$，$a+b+\varepsilon\leqslant 0$则当$\varepsilon\to 0$时有

$$|Y_k-\bar{Y}_k|\leqslant M\varepsilon$$

关于$k=0,1,2,\cdots,N$一致成立。

证明　令$R_k=Y_k-\bar{Y}_k$

代入(3.1)，根据(3.6)和(3.9)我们有

$$\begin{aligned}\varepsilon R_{k+1}+aR_k+bR_{k-1}&=\varepsilon Y_{k+1}+aY_k+bY_{k-1}-(\varepsilon\bar{Y}_{k+1}+a\bar{Y}_k)-b\bar{Y}_{k-1}\\&=f-aZ_k-b\bar{Y}_{k-1}\\&=\frac{bf}{a+b}\left\{1-\frac{a}{a+\varepsilon}\right\}+a\left(\alpha-\frac{f}{a+b}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)^k\left\{\frac{a^2}{a^2-b\varepsilon}-1\right\}+O(\varepsilon)\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$R_0=Y_0-\bar{Y}_0=\alpha\left\{1-\frac{a^2}{a^2-b\varepsilon}\right\}+\left(\frac{a^2}{a^2-b\varepsilon}-\frac{a}{a+\varepsilon}\right)\frac{f}{a+b}+O(\varepsilon^N)=O(\varepsilon)$$

$$R_N=Y_N-\bar{Y}_N=\beta-\beta=0$$

于是根据引理可知

$$R_k=O(\varepsilon)$$

关于$k=0,1,2,\cdots,N$一致成立，这就完成了收敛性的证明。

五、其 他 问 题

(i)
$$\begin{cases}\varepsilon Y_{k+1}+aY_k+bY_{k-1}=f \qquad 1\leqslant k\leqslant N-1 & (5.1)\\ -Y_0+c_1Y_1=\alpha, \quad -c_2Y_{N-1}+Y_N=\beta & (5.2)\end{cases}$$

其中，a,b是非零常数且$a+b\neq 0$，c_1,c_2是正的常数。

类似地，若$a+b\neq 0$，$a+c_1b\neq 0$，可以证明退化问题

$$\begin{cases}aZ_k+bZ_{k-1}=f \qquad 1\leqslant k\leqslant N-1 & (5.3)\\ -Z_0+c_1Z_1=\alpha & (5.4)\end{cases}$$

的解为

$$Z_k=\frac{a}{a+c_1b}\left\{\frac{f}{a+b}(c_1-1)-\alpha\right\}\left(-\frac{b}{a}\right)^k+\frac{f}{a+b} \tag{5.5}$$

若$a+c_1b\neq 0$，$a+c_2\varepsilon\neq 0$，$a^2-b\varepsilon\neq 0$，则根据非齐次差分方程

$$\varepsilon Y_{k+1}+aY_k=\frac{af}{a+b}+\frac{a^2}{a+c_1b}\left\{\frac{f}{a+b}(c_1-1)-\alpha\right\}\left(-\frac{b}{a}\right)^k \qquad k=1,2,\cdots,N-1 \tag{5.6}$$

和下列条件

$$-c_2Y_{N-1}+Y_N=\beta \tag{5.7}$$

可得

$$Y_k=\frac{a}{(a+c_2\varepsilon)}\left\{\beta+(c_2-1)\frac{af}{(a+b)(a+\varepsilon)}-P\frac{b+c_2a}{b}\left(-\frac{b}{a}\right)^N\right\}\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)^{-(N-k)}$$
$$+\frac{af}{(a+b)(a+\varepsilon)}+P\left(-\frac{b}{a}\right)^k \tag{5.8}$$

其中

$$P=\frac{a^3}{(a^2-b\varepsilon)(a+c_1b)}\left\{\frac{f}{a+b}(c_1-1)-\alpha\right\}\left(-\frac{b}{a}\right)^k \tag{5.9}$$

(ii)
$$\begin{cases}\varepsilon Y_{k+1}+a(\varepsilon)Y_k+b(\varepsilon)Y_{k-1}=0 \qquad 1\leqslant k\leqslant N-1 & (5.10)\\ Y_0=\alpha, \quad Y_N=\beta & (5.11)\end{cases}$$

此时我们可以证明退化问题

$$a(0)Z_k+b(0)Z_{k-1}=0, \quad Z_0=\alpha \tag{5.12}$$

的解为

$$Z_k=\alpha\left(-\frac{b(0)}{a(0)}\right)^k \tag{5.13}$$

以及

$$Y_k=\left\{\beta-\frac{a^2(0)b(\varepsilon)\alpha}{b(0)[a(0)a(\varepsilon)-b(0)\varepsilon]}\left(-\frac{b(0)}{a(0)}\right)^N\right\}\left(-\frac{a(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)^{-(N-k)}$$
$$+\frac{a^2(0)b(\varepsilon)\alpha}{b(0)[a(0)a(\varepsilon)-b(0)\varepsilon]}\left(-\frac{b(0)}{a(0)}\right)^k \tag{5.14}$$

这是差分方程问题

$$\begin{cases}\varepsilon Y_{k+1}+aY_k=\dfrac{a(0)b(\varepsilon)\alpha}{b(0)}\left(-\dfrac{b(0)}{a(0)}\right)^k & (5.15)\\ Y_N=\beta & (5.16)\end{cases}$$

的解，容易证明，当$k\neq N$，且$\varepsilon\to 0$时有

$$\bar{Y}_k\to Z_k \tag{5.17}$$

因而$\bar{Y}_k$是原问题的渐近解。

六、数 值 例 子

在这一节，我们考虑以下的例子

$$\begin{cases} \varepsilon Y_{k+1}-(0.11+2\varepsilon)Y_k+(0.1+\varepsilon)Y_{k-1}=0.015 \qquad 1\leqslant k\leqslant 9 & (6.1)\\ -Y_0+c_1Y_1=\alpha, \quad -c_2Y_9+Y_{10}=\beta & (6.2)\end{cases}$$

其中，$c_1=c_2=10/11$，$\alpha=0.1$，$\beta=2.1/11$，$\varepsilon=10^{-5}$。

k	Z_k	Y_k	$\bar{Y}_k$
0	−1.289963	−1.290475	−1.289844
1	−1.308826	−1.309523	−1.308949
2	−1.326086	−1.326837	−1.326207
3	−1.341773	−1.342581	−1.341896
4	−1.356032	−1.356891	−1.356057
5	−1.368995	−1.369901	−1.369120
6	−1.380778	−1.381728	−1.380904
7	−1.391489	−1.392480	−1.391616
8	−1.401225	−1.402255	−1.401352
9	−1.410076	−1.411111	−1.410234
10		−1.091919	−1.091122

其中Z_k是退化问题

$$\begin{cases} -0.11Z_k+0.1Z_{k-1}=0.015 & (6.3)\\ -Z_0+\frac{10}{11}Z_1=0.1 & (6.4)\end{cases}$$

的解，Y_k是差分方程(6.1)，(6.2)的解，$\bar{Y}_k$是差分方程的渐近解。

类似地，若$\varepsilon=10^{-6}$我们有下列结果

k	Z_k	Y_k	$\bar{Y}_k$
0	−1.290438	−1.290476	−1.290425
1	−1.309454	−1.309524	−1.309466
2	−1.326764	−1.326840	−1.326777
3	−1.342501	−1.342582	−1.342513
4	−1.356806	−1.356892	−1.356819
5	−1.369812	−1.369902	−1.369824
6	−1.381634	−1.381729	−1.381647
7	−1.392382	−1.392481	−1.392395
8	−1.402153	−1.402256	−1.402166
9	−1.411035	−1.411138	−1.411051
10		−1.091944	−1.091859

参 考 文 献

[1] Comstock, C. and G. C. Hsiao, Singular perturbation for difference equation, *Rocky Mountain J. Math.*, **6** (1976).

[2] Naidu, D. S. and A. K. Rao, Singular perturbation analysis of discrete control systems, *Lecture Notes in Math.*, **1154** (1985).

[3] Reinhardt, H. J., Singular perturbation of difference methods for linear ordinary differential equations, *Applicable Analysis*, **10** (1980).

[4] Naidu, D. S. and A. K. Rao, Singular perturbation method for initial value problems with imputs in discrete control systems, *Inter. J. of Control*, **33**, 5 (1981).

[5] Dorr, F. W., The asymptotic behavior and numerical solution of singular perturbation problems with turning points, Doctor of Philosophy University of Wisconsin (1969).

Asymptotic Solution for Singular Perturbation Problems of Difference Equation

Wu Chi-kuang

(*Nanjing University, Nanjing*)

Abstract

In this paper, we constructed a new asymptotic method for singular perturbation problems of difference equation with a small parameter.