

空间轴对称问题边界元法的程序处理

吕 品 黄 茂 光

(中国科技大学近代力学系, 1988年9月26日收到)

摘 要

弹性力学的空间轴对称问题可以化为两个变量 (r, z) 的二维问题求解, 但又比平面问题略复杂些. 在轴对称问题边界元的程序处理上也会相应带来些麻烦. 文章具体介绍了作者在调试轴对称问题边界元程序中遇到的一些问题及处理方法, 并给出数值结果加以验证.

用边界元方法求解弹性力学空间轴对称问题的文章可以在一些文献中找到^[4,5]. 在这些文章中, 导出的积分方程及基本解本质上都是等价的. 但在具体实施这些方程的数值计算中仍会遇到一些问题, 各文中都所涉甚少. 本文介绍了作者在编制空间轴对称问题的边界元程序中遇到的一些问题及处理方法.

一、基本公式

弹性力学的空间轴对称问题可以化为两个变量的二维问题求解. 因此将三维问题通过适当变换, 并沿 φ 方向作积分后可得到边界积分方程^[1]:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + 2\pi \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)r(x)d\Gamma(x) \\ = 2\pi \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)r(x)d\Gamma(x) \\ + 2\pi \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x)b_j(x)r(x)d\Omega(x) \quad (i, j=r, z) \end{aligned} \quad (1.1)$$

式中 Γ, Ω 分别是物体子午面的边界区域, u_j, p_j 和 b_j 分别表示 x 点 j 方向的边界位移、边界力和体力. $u_{ij}^*(\xi, x), p_{ij}^*(\xi, x)$ 分别表示 ξ 点作用 i 方向的单位力在 x 点所引起的 j 方向的位移和力, 其具体表达式为^[1].

$$\left. \begin{aligned} u_{ir}^* &= \frac{1}{16\pi^2(1-\nu)G\sqrt{Rr}} \left\{ (3-4\nu)Q_{1/2}(\gamma) + \frac{Z^2}{Rr} \frac{dQ_{1/2}}{d\gamma} \right\} \\ u_{iz}^* &= \frac{Z}{16\pi^2(1-\nu)G\sqrt{Rr}} \left\{ \frac{Q_{1/2}(\gamma)}{2} - \left(\gamma - \frac{r}{R} \right) \frac{dQ_{1/2}}{d\gamma} \right\} \end{aligned} \right\}$$

* 徐次达推荐.

$$u_{z,r}^* = \frac{-Z}{16\pi^2(1-\nu)G\sqrt{Rr}} \left\{ \frac{Q_{-1/2}(\gamma)}{2} + \left(\gamma - \frac{r}{R}\right) \frac{dQ_{-1/2}}{d\gamma} \right\} \quad (1.2)$$

$$u_{z,z}^* = \frac{1}{16\pi^2(1-\nu)G\sqrt{Rr}} \left\{ (3-4\nu)Q_{-1/2}(\gamma) - \frac{Z^2}{Rr} \frac{dQ_{-1/2}}{d\gamma} \right\}$$

$$p_{r,r}^* = \frac{2G}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \frac{\partial u_{r,r}^*}{\partial r} + \nu \left(\frac{u_{r,r}^*}{r} + \frac{\partial u_{r,z}^*}{\partial z} \right) \right\} n_r$$

$$+ G \left(\frac{\partial u_{r,r}^*}{\partial z} + \frac{\partial u_{r,z}^*}{\partial r} \right) n_z$$

$$p_{r,z}^* = \frac{2G}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \frac{\partial u_{r,z}^*}{\partial z} + \nu \left(\frac{u_{r,r}^*}{r} + \frac{\partial u_{r,r}^*}{\partial r} \right) \right\} n_z$$

$$+ G \left(\frac{\partial u_{r,r}^*}{\partial z} + \frac{\partial u_{r,z}^*}{\partial r} \right) n_r$$

$$p_{z,r}^* = \frac{2G}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \frac{\partial u_{z,r}^*}{\partial r} + \nu \left(\frac{u_{z,r}^*}{r} + \frac{\partial u_{z,z}^*}{\partial z} \right) \right\} n_r$$

$$+ G \left(\frac{\partial u_{z,r}^*}{\partial z} + \frac{\partial u_{z,z}^*}{\partial r} \right) n_z$$

$$p_{z,z}^* = \frac{2G}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \frac{\partial u_{z,z}^*}{\partial z} + \nu \left(\frac{u_{z,r}^*}{r} + \frac{\partial u_{z,r}^*}{\partial r} \right) \right\} n_z$$

$$+ G \left(\frac{\partial u_{z,r}^*}{\partial z} + \frac{\partial u_{z,z}^*}{\partial r} \right) n_r$$

(1.3)

在上两式中, G, ν 是弹性常数, n_r 和 n_z 是方向余弦, $R=r(\xi), Z=z(\xi), r=r(x), z=z(x)$

$$Z = Z - z, \quad \gamma = 1 + \frac{Z^2 + (R-r)^2}{2Rr}$$

$Q_{1/2}(\gamma), Q_{-1/2}(\gamma)$ 是 Legendre 函数, 它们与第一、第二类完全椭圆积分 $K(k), E(k)$ 的关系为

$$Q_{-1/2}(\gamma) = kK(k), \quad \frac{dQ_{-1/2}}{d\gamma} = -\frac{kE(k)}{2(\gamma-1)}$$

$$Q_{1/2}(\gamma) = \gamma kK(k) - \sqrt{2(H\gamma)}E(k)$$

$$\frac{dQ_{1/2}}{d\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma)}} \left\{ K(k) - \frac{\gamma E(k)}{\gamma-1} \right\}$$

其中 $k = \sqrt{\frac{2}{1+\gamma}}$.

在(1.1)中, c_{ij} 是与 ξ 点位置有关的系数, 在物体外为零, 在域内为单位矩阵, 在边界上的情况后面将要论及。

二、积分方程的离散

如果不考虑体力, (1.1)式具体写出为

$$\begin{bmatrix} c_{rr}(\xi) & c_{rz}(\xi) \\ c_{zr}(\xi) & c_{zz}(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r(\xi) \\ u_z(\xi) \end{Bmatrix} + 2\pi \int_r \begin{bmatrix} p_{r,r}^*(\xi, x) & p_{r,z}^*(\xi, x) \\ p_{z,r}^*(\xi, x) & p_{z,z}^*(\xi, x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r(x) \\ u_z(x) \end{Bmatrix} r(x) dF(x)$$

$$= 2\pi \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} u_{r,r}^*(\xi, x) & u_{r,z}^*(\xi, x) \\ u_{z,r}^*(\xi, x) & u_{z,z}^*(\xi, x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_r(x) \\ p_z(x) \end{Bmatrix} r(x) d\Gamma(x) \quad (2.1)$$

将物体的边界离散成 N 个单元, 如图 1, 对每一单元采用线性插值, 则当 ξ 取单元边界上的每一点时都有相应的离散方程, 对于 i 点有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_{rr} & c_{rz} \\ c_{zr} & c_{zz} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix}^i + 2\pi \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} p_{r,r}^* & p_{r,z}^* \\ p_{z,r}^* & p_{z,z}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r^{j1} \\ u_z^{j1} \\ u_r^{j2} \\ u_z^{j2} \end{Bmatrix} r \cdot \frac{L_j}{2} d\eta \\ & = 2\pi \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} u_{r,r}^* & u_{r,z}^* \\ u_{z,r}^* & u_{z,z}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_r^{j1} \\ p_z^{j1} \\ p_r^{j2} \\ p_z^{j2} \end{Bmatrix} r \cdot \frac{L_j}{2} d\eta \end{aligned} \quad (2.2)$$

式中 L_j 是 j 单元长度, ϕ_1, ϕ_2 是线性插值函数, 在 j 单元内

$$\begin{cases} u_r = \phi_1 u_r^{j1} + \phi_2 u_r^{j2} \\ u_z = \phi_1 u_z^{j1} + \phi_2 u_z^{j2} \end{cases}$$

其中 $\phi_1 = -(1-\eta)/2$, $\phi_2 = (1+\eta)/2$.

在每一单元内用高斯积分, 设取 S 个高斯积分点, 则有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_{rr} & c_{rz} \\ c_{zr} & c_{zz} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix}^i + 2\pi \sum_{j=1}^N \frac{L_j}{2} \left(\sum_{s=1}^S \begin{bmatrix} p_{r,r}^* & p_{r,z}^* \\ p_{z,r}^* & p_{z,z}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} W_s r_s \right) \cdot \begin{Bmatrix} u_r^{j1} \\ u_z^{j1} \\ u_r^{j2} \\ u_z^{j2} \end{Bmatrix} \\ & = 2\pi \sum_{j=1}^N \frac{L_j}{2} \left(\sum_{s=1}^S \begin{bmatrix} u_{r,r}^* & u_{r,z}^* \\ u_{z,r}^* & u_{z,z}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} W_s r_s \right) \cdot \begin{Bmatrix} p_r^{j1} \\ p_z^{j1} \\ p_r^{j2} \\ p_z^{j2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

上式中 W_s 是高斯积分点的权, 基本解 $p_{r,j}^*$, $u_{r,j}^*$ 中的变量 r, z 都要用局部坐标 η 表示出。

$$\begin{cases} r = \frac{1}{2}(1+\eta)(r_{j2} - r_{j1}) + r_{j1} \\ z = \frac{1}{2}(1+\eta)(z_{j2} - z_{j1}) + z_{j1} \end{cases} \quad (-1 \leq \eta \leq 1)$$

当 ξ 点取遍边界上的点时, 就得到了一组联立方程组, 简写成矩阵的形式为

$$CU + HU = GP \quad (2.4)$$

其中 $U = \{u_r^1, u_z^1, \dots, u_r^N, u_z^N\}^T$, $P = \{p_r^1, p_z^1, \dots, p_r^N, p_z^N\}^T$ 分别是 n 个边界点的位移和力分量。知道了物体边界上的性质以后, 就可由 (2.1) 及适当的导数来求内部的位移和应力。

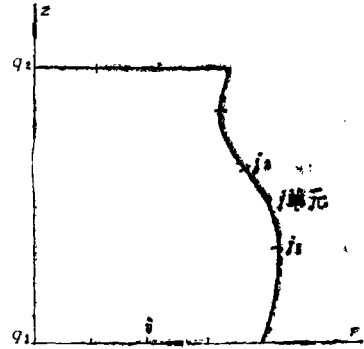


图 1

三、几个问题的处理

轴对称问题的边界元程序虽然也是二维的但比平面问题要复杂一些。由于轴对称的性质带来了一些特殊的问题，须做些相应处理。

1. 零轴问题

由(1.2)、(1.3)可以看出，当 ξ 点取在零轴，即 $R=0$ 时，这些表达式的直接形式是不能用的。因此，必须求出当 $R=0$ 时的表达式才能做(1.1)的积分。因为当 $R \rightarrow 0$ 时， $k \rightarrow 0$ 。为此可将 $K(k)$ 、 $E(k)$ 展开成 k 的级数，代入(1.2)、(1.3)中，然后令 $R \rightarrow 0$ 就可得到 ξ 点在零轴上的式子。

$$\left. \begin{aligned} u_{r,r}^* &= u_{r,z}^* = 0 \\ u_{z,r}^* &= -\frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \frac{rZ}{(Z^2+r^2)^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$u_{z,z}^* = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \frac{1}{\sqrt{Z^2+r^2}} \left\{ 3-4\nu + \frac{Z^2}{r^2+Z^2} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} p_{r,r}^* &= p_{r,z}^* = 0 \\ p_{z,r}^* &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{(Z^2+r^2)^{3/2}} \left\{ Z \left[-(1-2\nu) + \frac{3r^2}{Z^2+r^2} \right] n_r \right. \\ &\quad \left. - r \left[1-2\nu + \frac{3Z^2}{Z^2+r^2} \right] n_z \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{z,z}^* &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{(Z^2+r^2)^{3/2}} \left\{ Z \left[1-2\nu + \frac{3Z^2}{Z^2+r^2} \right] n_z \right. \\ &\quad \left. - r \left[1-2\nu + \frac{3Z^2}{Z^2+r^2} \right] n_r \right\} \end{aligned} \right\}$$

当 $r \rightarrow 0$ 的式子也可同样考虑。但在实际计算中用不到，因由(1.1)式可以看出，当 $r=0$ 时，整个积分为零。所以零轴上的积分可不予考虑。

2. 求C矩阵的注意

由于轴对称问题是关于 z 轴对称的，所以不能通过刚体位移的方法求(2.4)中的C矩阵，因为 r 方向的刚体位移并不满足关于 z 轴对称的条件，所以必须直接求C矩阵的值。一般情况下

$$C = \begin{cases} 0 & (\xi \text{ 在域外}) \\ 1 & (\xi \text{ 在域内}) \\ \frac{1}{2} & (\xi \text{ 在光滑边界上}) \end{cases}$$

若 ξ 在不光滑边界点时，其表达式为^[2]

$$C = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 4(1-\nu)(-\pi+\theta_2-\theta_1) & \cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1 \\ + \sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2 & \\ \cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1 & 4(1-\nu)(-\pi+\theta_2-\theta_1) \\ + \sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1 & \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

在使用上式时应注意下面几点

- i) ξ 点两边单元所定义的角度应是 r 轴正向与单元外法线的夹角。
- ii) θ_1 与 θ_2 的顺序在单连通区域中, 应使点沿着单元 I 过渡到单元 II 时, 保持区域的内部在左边
- iii) θ_1, θ_2 的变化范围是 $-\pi \leq \theta_i \leq \pi$ ($i=1, 2$)。在图2所示的情况下, θ_1 为负, θ_2 为正。

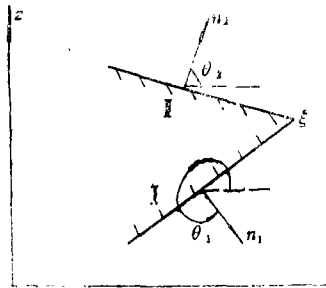


图 2

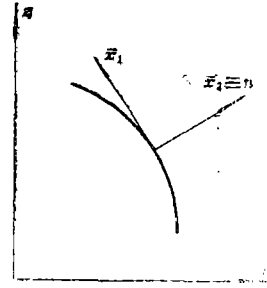


图 3

3. 物体表面的应力

在有些情况下, 需要知道物体表面的应力和应变分量。当求出边界节点上的位移和力以后, 就可通过一些变换直接求得边界各点的应力分量, 无需再做积分。

设边界上一点, 取局部坐标如图。在此局部坐标下应变、应力分量为

$$\bar{\epsilon}_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1}, \quad \bar{\epsilon}_\varphi = \frac{\bar{u}_r}{r}$$

$$\bar{\sigma}_{12} = \bar{p}_1 \quad \bar{\sigma}_{22} = \bar{p}_2$$

φ 方向的应力和应变分量与局部坐标的选取无关, 由胡克定律可得到 $\bar{\sigma}_{22}$

$$\therefore \bar{\sigma}_{22} = 2G\bar{\epsilon}_{22} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\bar{\epsilon}_{11} + \bar{\epsilon}_{22} + \bar{\epsilon}_\varphi)$$

$$\therefore \bar{\epsilon}_{22} = \left[\bar{\sigma}_{22} - \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\bar{\epsilon}_{11} + \bar{\epsilon}_\varphi) \right] \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}$$

因此, 局部坐标下的应力分量可由矩阵写成如下形式

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \\ \bar{\sigma}_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{2G}{1-\nu}(\bar{\epsilon}_{11} + \nu\bar{\epsilon}_\varphi) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2G}{1-\nu}(\bar{\epsilon}_\varphi + \nu\bar{\epsilon}_{11}) \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

利用坐标变换可将局部坐标下的表面力 \bar{p}_1, \bar{p}_2 变换到整体坐标下

$$\begin{Bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_2 & n_1 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{p}_r \\ \bar{p}_z \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

n_1, n_2 是物体表面在整体坐标下的方向余弦。整体坐标下的应力分量与局部坐标下的应力关系为

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_r \\ \bar{\sigma}_z \\ \bar{\sigma}_{rz} \\ \bar{\sigma}_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_2^2 & n_1^2 & -2n_1n_2 & 0 \\ n_1^2 & n_2^2 & 2n_1n_2 & 0 \\ -n_1n_2 & n_1n_2 & n_1^2 - n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \\ \bar{\sigma}_\varphi \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

将(3.4), (3.5)代入(3.6)就可得到在整体坐标下边界应力的分量

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_r \\ \bar{\sigma}_z \\ \bar{\sigma}_{rz} \\ \bar{\sigma}_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^3 + \frac{2-\nu}{1-\nu} n_1 n_2^2 & -n_1^2 n_2 + \frac{\nu}{1-\nu} n_2^3 \\ -2n_1 n_2^2 + \frac{\nu}{1-\nu} n_1^3 & n_2^3 + \frac{2-\nu}{1-\nu} n_1^2 n_2 \\ n_2^3 - \frac{\nu}{1-\nu} n_1^2 n_2 & n_2^3 - \frac{\nu}{1-\nu} n_1 n_2^2 \\ \frac{\nu}{1-\nu} n_1 & \frac{\nu}{1-\nu} n_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{p}_r \\ \bar{p}_z \end{Bmatrix} + \frac{2G}{1-\nu} \bar{\varepsilon}_{11} \begin{Bmatrix} n_2^2 \\ n_1^2 \\ -n_1 n_2 \\ \nu \end{Bmatrix} + \frac{2G}{1-\nu} \bar{\varepsilon}_\varphi \begin{Bmatrix} \nu n_2^2 \\ \nu n_1^2 \\ -\nu n_1 n_2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

上式中 \bar{p}_r 、 \bar{p}_z 是所考虑点的表面力分量, $\bar{\varepsilon}_\varphi = \bar{u}_r/r$, 都是已知的。对 $\bar{\varepsilon}_{11}$ 需作些处理。取包含所考虑点的一个单元 j (如图1)。利用局部坐标下线性插值公式

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{1-\eta}{2} \bar{u}_1^{j1} + \frac{1+\eta}{2} \bar{u}_1^{j2} \\ \bar{x}_1 &= \frac{L_j}{2} \eta \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \\ \therefore \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} &= \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}_1} = \frac{1}{L_j} (-\bar{u}_1^{j1} + \bar{u}_1^{j2}) \end{aligned} \right\}$$

又由局部与整体坐标的变换关系, 可得到

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} = \frac{1}{L_j} \{n_2 \quad -n_1 \quad -n_2 \quad n_1\} \begin{Bmatrix} \bar{u}_r^{j1} \\ \bar{u}_z^{j1} \\ \bar{u}_r^{j2} \\ \bar{u}_z^{j2} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

将(3.8)代入(3.7)中后, 只要知道了边界各点的位移和表面力在整体坐标下的分量后, 就可求得这些点的应力分量。

四、数值处理及算例

根据上面的公式和处理方法, 作者调试了空间轴对称问题的边界元程序, 通过算例的验证, 结果比较理想。

程序是在[1]中的平面边界元程序的基础上扩充、修改而成。对单元采用线性插值，角点采用双节点处理的方法。在求(2.4)中的系数矩阵时，按各元素离主对角线的远近采用不同阶次的高斯积分。对奇异单元采用高阶高斯积分。但在计算中也发现积分点过多时，反而使计算结果误差增大。因为采用过多的高斯积分点，靠近单元节点的积分点坐标与奇点坐标非常靠近，而引起误差。因此，奇异单元积分点数目应根据单元长度，计算精度等因素合理选取，并非越多越好。

由图1可以看出，由于轴对称的原因， q_1, q_2 两点 r 方向的位移为零，即 $u_r^{q_1} = u_r^{q_2} = 0$ 。在程序中，为了不破坏方程的顺序，采用与有限元类似的处理方法，即令 $u_r^{q_1}, u_r^{q_2}$ 所对应的系数矩阵中的元素取一大数，仍然求解原来的线性方程组，结果证明这种处理效果很好，而且程序处理比较简单。

根据所编程序，计算了等直径圆柱两端受均布拉伸的算例。取

$$p_z = 1 \text{ kg/cm}^2, E = 2 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2, \nu = 0.25$$

沿物体的边界取6个单元。

计算结果列于表1中，可以看出，与理论结果吻合的较好，说明程序中的处理方法均是正确的。

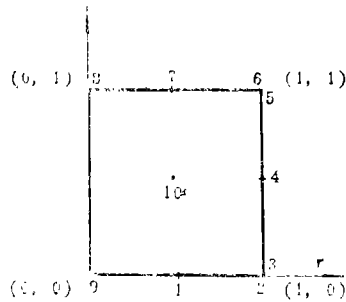


图 4

表 1

节 点	各分量						
	比较	$u(\times 10^{-6} \text{cm})$	$w(\times 10^{-6} \text{cm})$	$\sigma_r(\text{kg/cm}^2)$	$\tau_{rz}(\text{kg/cm}^2)$	$\sigma_z(\text{kg/cm}^2)$	$\sigma_\varphi(\text{kg/cm}^2)$
1	理	-0.06250	-0.250	0	0	1.000	0
	计	-0.06250	-0.2494	0.507×10^{-3}	0	1.000	0.169×10^{-3}
2	理	-0.1250	-0.250	0	0	1.000	0
	计	-0.12477	-0.2494	0.00106	0	1.000	0.732×10^{-3}
3	理	-0.1250	-0.250	0	0	1.000	0
	计	-0.12477	-0.2494	0	0	0.99676	-0.344×10^{-3}
4	理	-0.125	0	0	0	1.000	0
	计	-0.12492	0.000216	0	0	0.9967	-0.670×10^{-3}
10	理	-0.06250	0	0	0	1	0
	计	-0.06250	-0.216×10^{-3}	-0.000117	-0.000379	0.99919	-0.000337

参 考 文 献

- [1] Brebbia, C. A., J. C. F. Telles, and L. C. Wrobel, *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1984).
- [2] Brebbia, C. A. (Ed.), *Boundary Element Techniques in Computer-Aided Engineering*, Martinus Nijhoff Publishers (1984).
- [3] Brebbia, C. A. (Ed.), *Progress in Boundary Element Methods*, Pentech Press, 1, (1981).
- [4] Kermanidis, T., A numerical solution for axially symmetrical elasticity problems, *Int. J. Solids Structures*, 11, (1975), 493—500.
- [5] Cruse, T. A., D. W. Snow and R. B. Wilson, Numerical solutions in axisymmetric elasticity, *Computers and Structures*, 7 (1977), 445—451.

Some Problems in Boundary Element Programming of Axisymmetric Elasticity

Lu Pin Huang Mao-kuang

(Department of Modern Mechanics, University of Science
and Technology of China, Hefei)

Abstract

Axisymmetric problems in elasticity can be reduced to two dimensional ones, but they are a little more complicated than plane problems. Therefore, some special problems will be encountered in the boundary element programming of axisymmetric elasticity. In this paper, the methods to treat these problems and some remarks are given according to our experience in programming. Numerical examples are presented for the checking of these treatments.