

动态裂纹尖端的单参数粘塑性场*

高 玉 臣

(哈尔滨船舶工程学院, 1988年6月18日收到)

摘 要

本文给出一种弹性-粘塑性本构模型代替了通常的弹塑性模型, 假定在趋向裂纹尖端时粘性系数趋向于零, 即 $\eta = \eta_0 r$, 对动态裂纹的尖端场进行了渐近分析. 文中给出了适当的位移模式并得到了单参数解. 对不同的Mach数和粘性系数作了数值计算. 基于这种渐近解提出一种断裂准则并讨论了裂纹扩展的稳定性.

一、引 言

早期的断裂力学仅以线弹性介质中的裂纹为研究对象, 由于应力强度因子的引入^[1], 使得裂纹尖端场的行为被彻底揭示出来, 因而留下的问题只是具体计算应力强度因子和测量材料的断裂韧性. 对于非线性材料, 如塑性、蠕变、粘弹性、粘塑性等材料, 人们自然也期望得到类似于弹性材料的结果, 即找到裂尖场的控制参数, 从而建立合理的断裂准则. 然而, 非弹性材料中裂纹的尖端场呈现出种种复杂特征. 它不仅对材料性质十分敏感, 甚至还依赖于裂纹的状态(静止、准静态、动态). 例如, 幂强化塑性材料中的静止裂纹, 应力具有 $r^{-\alpha}$ 的奇异性^[2,3], 而准静态扩展裂纹则具有 $(\ln R/r)^\alpha$ 的奇异性^[4], 二者截然不同. 正因为如此, 对于非弹性材料必须分别研究静止裂纹、准静态扩展裂纹及动态裂纹.

对于扩展裂纹最早的研究成果是Chitaleg和McClintock^[5]给出的, 他们研究了理想塑性材料中的准静态扩展的Ⅲ型裂纹. 其后, Slepian^[6]采用Tresca屈服条件研究了Ⅰ型准静态裂纹, 高玉臣^[7]和Rice^[8]独立地采用Mises屈服条件研究了Ⅰ型裂纹, 但只给出不可压缩材料的结果. 对于可压缩的理想塑性材料中的Ⅰ型裂纹, 高玉臣^[9]最先绘出了一般的研究方法并且在[10]中给出了完整的解. 在[10]的结果公布之后, Drugan, Rice等人抄用了[10]的结果**, 改换了书写符号, 发表了论文[11]. 但是, 由于[11]加进一些错误的推导, 使得裂纹正前方应变无奇异性, 这一结果与[10]不同. Drugan等人在[11]中曾多处指责[10], 但均属无依据的推论. 为了更严格地证明裂纹前方应变的奇异性, 高玉臣、韩斌和黄克智采用[9]的方法研究了高阶渐近解, 并发现 $\nu < 1/2$ 情况的二阶渐近解不存在^[12]. 此外, 还指出了准静

* 叶开沅推荐.

** 1981年10月6日在费城会议上Drugan向高索取了[10].

态解的一些其他矛盾。值得提出的是, Drugan沿用 [9] 的方法也研究了二阶渐近解^[13], 但是 [13] 的结果是错误的, 因为在扇形区协调方程不满足。综上所述, 扩展裂纹的准静态解由于一些矛盾而使研究处于停顿状态, 当然, 也未能被应用于断裂准则。

扩展裂纹的动态解^[14~16]表现出许多较为合理的特征, 例如当 Mach 数趋向于零时, 应力场与静止裂纹的一致, 见 [14]。但是, 动态解仍然包含一些矛盾, 其中突出的问题就是某些动态解中含有激波^[14], 这是值得怀疑的。此外, 动态渐近解中仍有两个未知参数, 即在 $A \ln R/r$ 中, A 和 R 均要由远场决定, 这样便无法运用于实际。

本文引入一种新的粘塑性模型来研究扩展裂纹的尖端场。当粘性系数为零时便得到通常的理想弹塑性情况的基本方程。本文给出的粘塑性解消除了塑性激波, 同时证实了通常弹塑性解的某些合理特征。此外, 本文给出的渐近解是单参数的, 只有 R 是未知的, 这将为应用提供方便。

二、弹性-粘塑性模型

如所周知, 许多材料在高速变形时呈现出率敏感性或称为粘性, 即应力依赖于应变速率。另一方面, 在裂纹尖端附近, 应变具有奇异性。所以在接近裂纹尖端时, 应变率总是很高的, 即使是 Mach 数很小也是如此。这样, 材料的粘性便成为裂尖场研究中的重要因素。

这里, 我们将给出一种弹性-粘塑性本构模型, 如图 1 所示。它由三部份组成, 即弹性元件, 塑性元件及粘性元件。令 ε , ε_e 及 ε_p 表示总应变, 弹性应变及塑性应变, σ , σ_v 及 σ_p 表示总应力, 粘性应力及塑性应力, 于是我们有:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_e + \varepsilon_p \\ \varepsilon_e &= \sigma/E, \quad \dot{\varepsilon}_p = \lambda^* \dot{\sigma}_p \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_v + \sigma_p \\ \sigma_v &= \eta \dot{\varepsilon}_p, \quad \sigma_p = f(\varepsilon_p) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

这里 λ^* 是流动因子, $\lambda^* \geq 0$ 。 E 为 Young 氏模量, η 是粘性系数, $f(\varepsilon_p)$ 是塑性加载函数。字母上面的点表示对时间 t 的导数。

由 (2.1), (2.2) 可得:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \lambda^* \dot{\sigma}_p \quad (2.3)$$

$$\sigma_p = \frac{1}{1 + \eta \lambda^*} \sigma \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} \quad (2.5)$$

$$\lambda^* = \begin{cases} \frac{1}{\eta} \left[\frac{\sigma}{f(\varepsilon_p)} - 1 \right] & (\text{当 } \sigma > f(\varepsilon_p)) \\ 0 & (\text{当 } 0 \leq f(\varepsilon_p)) \end{cases} \quad (2.6)$$

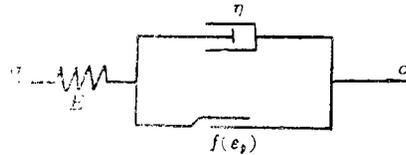


图1 本构模型

(2.3)~(2.6)还可以改写为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{\dot{\sigma}}{E} + \lambda \sigma \\ \lambda &= \frac{\lambda^*}{1 + \eta \lambda^*} = \frac{1}{\eta} \left[1 - \frac{1}{\sigma} f(\epsilon_p) \right] \\ \epsilon_p &= \epsilon - \frac{\sigma}{E} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

对于一般的三维情况, 我们把(2.1), (2.2)写为张量形式,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_e + \epsilon_p \\ \epsilon_e &= \mathbf{c} : \sigma, \quad \dot{\epsilon}_p = \lambda^* \mathbf{s}_p \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{s}_v + \mathbf{s}_p \\ \mathbf{s}_v &= \eta \dot{\epsilon}_p, \quad \sigma_p = f(\epsilon_p) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

这里, \mathbf{c} 是四阶柔度张量, \mathbf{s}, \mathbf{s}_p 分别是 σ 与 σ_p 的偏量, 而 σ_p 与 $\dot{\epsilon}_p$ 由下式给出:

$$\sigma_p = \left(\frac{3}{2} \mathbf{s}_p : \mathbf{s}_p \right)^{1/2}, \quad \dot{\epsilon}_p = \int \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_p : \dot{\epsilon}_p \right)^{1/2} dt \quad (2.10)$$

由(2.8)~(2.10)可得:

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{c} : \dot{\sigma} + \lambda^* \mathbf{s}_p \quad (2.11)$$

$$\mathbf{s}_p = \frac{1}{1 + \eta \lambda^*} \mathbf{s}, \quad \sigma_p = \frac{1}{1 + \eta \lambda^*} \sigma \quad (2.12)$$

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{\lambda^*}{1 + \eta \lambda^*} \cdot \frac{2}{3} \sigma \quad (2.13)$$

$$\lambda^* = \begin{cases} \frac{1}{\eta} \left[\frac{\sigma}{f(\epsilon_p)} - 1 \right] & (\text{当 } \sigma > f(\epsilon_p)) \\ 0 & (\text{当 } \sigma \leq f(\epsilon_p)) \end{cases} \quad (2.14)$$

其中

$$\sigma = \left(\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} \right)^{1/2} \quad (2.15)$$

(2.11)~(2.15)还可改写为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \mathbf{c} : \dot{\sigma} + \lambda \mathbf{s} \\ \lambda &= \frac{\lambda^*}{1 + \eta \lambda^*} = \frac{1}{\eta} \left[1 - \frac{1}{\sigma} f(\epsilon_p) \right] \\ \dot{\epsilon}_p &= \frac{2}{3\eta} [\sigma - f(\epsilon_p)] \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

(2.16)便是我们给出的模型的本构关系。当 $\sigma \leq f(\epsilon_p)$ 时它表现为纯弹性, 当 $\sigma > f(\epsilon_p)$ 时表现为弹性-粘塑性。如果 η 非常小, 它表现为接近弹塑性材料。

三、场的基本方程

现在考虑一个特殊情况, 即塑性元件表现为理想塑性。令 $\epsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ 为直角坐标中的应变及应力分量, 则三维本构关系可写为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_k^k \delta_{ij} + \lambda s_{ij} \\ \lambda &= \frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

这里 σ_0 为拉伸屈服应力, ν 为Poisson比。对于平面应变问题, 利用 $\varepsilon_{zz}=0$, 可得到:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \sigma^* \\ \sigma^* &= \frac{2E}{3} \exp[-A] \int_{t_0}^t \lambda (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \exp[A] dt \\ A &= \frac{2E}{3} \int_{t_0}^t \lambda dt \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$\sigma = \sqrt{3} \left[\frac{1}{4} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \nu \right)^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \sigma^*)^2 \right]^{1/2} \quad (3.3)$$

对于不可压缩材料, $\nu=1/2$, 于是有:

$$\sigma_{zz} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 \quad (3.4)$$

$$\sigma = \sqrt{3} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2/4 + \sigma_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{zz} = -\dot{\varepsilon}_{yy} &= \frac{3}{4E} (\dot{\sigma}_{xx} - \dot{\sigma}_{yy}) + \frac{\lambda}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \\ \dot{\varepsilon}_{xy} &= \frac{3}{2E} \dot{\sigma}_{xy} + \lambda \sigma_{xy} \\ \lambda &= \frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

令 u_i ($i=x, y$) 表示位移, 于是运动方程可写为:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \dot{u}_i \quad (3.7)$$

其中 ρ 为质量密度。几何关系可写为:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.8)$$

四、渐近分析

图2表示一个沿 x 轴方向以速度 v 稳恒扩展的 I 型裂纹。令 r, θ 表示极坐标, 根据稳恒性条件, 对任何物理量 Φ , 其变化率为:

$$\dot{\Phi} = -v \frac{\partial}{\partial x} \Phi = v \left(\sin \theta \frac{\partial}{r \partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi \quad (4.1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Phi_{i_1 \dots i_k} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} \\ \dot{\Phi} &= \dot{\Phi}_{i_1 \dots i_k} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

e_i 表示基向量。

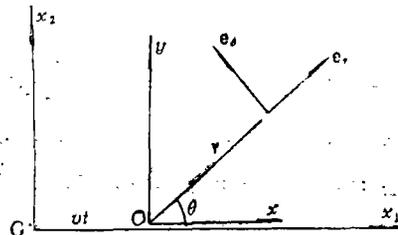


图2 坐标系

对于不可压缩材料，我们可以引入位移势 U ，使得

$$u_r = -\frac{\partial U}{r\partial\theta}, \quad u_\theta = \frac{\partial U}{\partial r} \quad (4.3)$$

根据理想弹塑性情况的分析^[14]，我们假定在裂纹尖端应力有界，于是由(3.7)可知 u_r 是 $1/r$ 量级的。这样，利用[14]的结果，令

$$U = r^2 \left[\bar{A} \sin 2\theta \ln \frac{R}{r} + g(\theta) \right] \quad (4.4)$$

其中 \bar{A} 是常数，可称为应变奇异性因子，而 R 是塑性区尺度。

利用(4.3)，(4.4)，(4.1)可得：

$$\left. \begin{aligned} u_r &= -r \left(2\bar{A} \cos 2\theta \ln \frac{R}{r} + g' \right) \\ u_\theta &= r \left[2\bar{A} \sin 2\theta \left(\ln \frac{R}{r} - \frac{1}{2} \right) + 2g \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{V^2}{r} \left[2\bar{A} (2\cos 2\theta - \cos 4\theta) - (g'' + 4g') \sin^2 \theta \right] \\ u_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

这里，撇号 $'$ 表示对 θ 的导数。

进一步利用(4.5)，(3.8)，(4.1)，可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= -\dot{\epsilon}_{\theta\theta} = -2\bar{A} \frac{V}{r} \cos \theta \\ \dot{\epsilon}_{r\theta} &= \frac{V}{r} \left[2\bar{A} \sin 3\theta - \frac{1}{2} (g'' + 4g') \sin \theta \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

由于应力有界，所以可以令

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\theta) \quad (4.8)$$

为了方便，我们引入下列量：

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= \frac{1}{2} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) / \sigma_0 \\ S &= \frac{1}{2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) / \sigma_0 \\ T &= \sigma_{r\theta} / \sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

这些量的变化率为：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Sigma} &= \frac{v}{r} \sin \theta \frac{d\Sigma}{d\theta} \\ \dot{S} &= \frac{v}{r} \sin \theta \left(\frac{dS}{d\theta} - 2T \right) \\ \dot{T} &= \frac{v}{r} \sin \theta \left(\frac{dT}{d\theta} + 2S \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

下面我们给出材料的粘性。我们指望仅在高应变率区域内粘性作用才显著，而且指望材料仍具有理想塑性的某些特征。所以，我们假定 η 由下式给出：

$$\eta = \begin{cases} \eta_0 & (r \geq R^*) \\ \eta_0 r / R^* & (r < R^*) \end{cases} \quad (4.11)$$

这里 R^* 是一个尺寸, 为了方便, 可以取 $R^* = R$. 将(4.7), (4.9), (4.10), (4.11)代入(3.6), 将(4.6), (4.9)代入(3.7), 并引入下列无量纲量:

$$\alpha = \frac{2ER^*}{3v\eta_0}, \quad G = \frac{2E}{3\sigma_0}g, \quad A = \frac{2\bar{E}}{2\sigma_0}\bar{A}, \quad M = v\left(\frac{3\rho}{E}\right)^{1/2} \quad (4.12)$$

最后可以得到:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{d\theta} - 2T + \frac{1}{\sin\theta} \left[2A\cos\theta + \alpha S \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] &= 0 \\ \frac{dT}{d\theta} + 2S - \frac{M^2}{1-M^2\sin^2\theta} \left[A\cos 2\theta + \alpha T \left(1 - \frac{1}{n} \right) \sin\theta \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Sigma}{d\theta} + \frac{1}{\sin\theta} \left[2A\cos\theta + \alpha S \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] &= 0 \\ \frac{d^3G}{d\theta^3} + 4\frac{dG}{d\theta} - \frac{1}{1-M^2\sin^2\theta} \left[A(1+2\cos 2\theta) \right. \\ \left. + 2M^2(\cos 4\theta - 2\cos 2\theta) - \frac{2\alpha T}{\sin\theta} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

$$\text{其中 } n = (S^2 + T^2)^{1/2}. \quad (4.15)$$

(4.13), (4.14)就是裂尖场的渐近方程.

现在给出问题的边界条件. 由对称性可得:

$$T(0) = G(0) = G''(0) = 0 \quad (4.16)$$

由裂纹面上应力为零条件可得:

$$T(\pi) = 0, \quad \Sigma(\pi) - S(\pi) = 0 \quad (4.17)$$

由 $\theta=0$ 处解的正则性可得:

$$S(0) = -\left(1 + \frac{2A}{\alpha}\right) \quad (4.18)$$

五、与弹塑性比较

为了把以上所得结果与弹塑性情况[14]进行比较, 我们引入新的函数 $\bar{\lambda}$ 及 ψ 使得:

$$\left. \begin{aligned} S &= -\left(1 + \frac{\bar{\lambda}}{\alpha}\right) \cos\psi \\ T &= \left(1 + \frac{\bar{\lambda}}{\alpha}\right) \sin\psi \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

于是(4.13)变为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{\lambda}}{d\theta} + \frac{\bar{\lambda}}{\sin\theta} \frac{\cos^2\psi - M^2\sin^2\theta}{1-M^2\sin^2\theta} - \frac{A}{1-M^2\sin^2\theta} \\ \cdot [2\cos\psi\cot\theta - M^2\sin(\psi-2\theta)] &= 0 \\ \left(1 + \frac{\bar{\lambda}}{\alpha}\right) \left(\frac{d\psi}{d\theta} - 2\right) - \frac{\bar{\lambda}}{\sin\theta} \frac{\sin\psi\cos\psi}{1-M^2\sin^2\theta} + \frac{A}{1-M^2\sin^2\theta} \\ \cdot [2\sin\psi\cot\theta - M^2\cos(4-2\theta)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

(4.14)式变为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Sigma}{d\theta} + \frac{1}{\sin\theta} [2A\cos\theta - \bar{\lambda}\cos\psi] &= 0 \\ \frac{d^2G}{d\theta^2} + 4\frac{dG}{d\theta} - \frac{1}{1-M^2\sin^2\theta} \left[A(1+2\cos 2\theta) \right. \\ &\left. + 2M^2(\cos 4\theta - 2\cos 2\theta) - 2\lambda \frac{\sin\psi}{\sin\theta} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

如果我们简单的取 $\alpha = \infty$, 即 $\eta_0 = 0$, 于是(5.2)变为:

$$\bar{\lambda} = A[2\cos\psi\cos\theta + M^2\sin\theta\sin(\psi - 2\theta)] / (\cos^2\psi - M^2\sin^2\theta) \quad (5.4)$$

$$\frac{d\psi}{d\theta} - 2 - \frac{2AM^2\cos(\psi - 2\theta)}{\cos^2\psi - M^2\sin^2\theta} = 0 \quad (5.5)$$

(5.4), (5.5)正好与[14]得到的方程一致. 这样, 当粘性为零时, 我们所得到的方程便退化为弹塑性情况的结果. 但是, 如果 $\alpha \neq \infty$, 无论 α 值如何大, (5.2)与(5.5)总是有本质区别.

六、数值结果

数值计算是对(5.2)式进行的. 由(4.16)~(4.18)可得到(5.2)的边界条件:

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(\pi) = \pi, \quad \lambda(0) = 2A \quad (6.1)$$

选择适当的 A 值使 $\psi(\pi) = \pi$ 得到满足. 数值计算结果表明:

- 1) 对于固定的 M , 存在一个 α 的临界值 α_{cr} , 当 $\alpha < \alpha_{cr}$ 时没有满足(6.1)的解. 当 $\alpha_{cr} < \alpha < \infty$ 时, 总有解, A 是 α 的减函数. 当 $\alpha \rightarrow \alpha_{cr}$ 时 $A \rightarrow \infty$, 当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时 $A \rightarrow 0$.
- 2) $\alpha_{cr} = \alpha_{cr}(M)$, 当 $M \rightarrow 0$ 时 $\alpha_{cr} \sim M^{-1}$. 曲线 $\alpha_{cr}^{-1}(M)$ 如图3所示.
- 3) 对一些典型的 M 与 α 值, 曲线 $\psi(\theta)$, $\bar{\lambda}(\theta)$ 由图4~图10给出. 由图中可见, 当 M 固定时, 对于较大的 α 值, 函数 $\psi(\theta)$ 与[14]中得到的相似, 但是本文的 $\psi(\theta)$ 到处连续. 这样, 由于粘性的引入消除了裂纹尖端场的塑性激波, 而且 A 成为确定的值. 图11中给出了由[14]得到的 $\psi(\theta)$ 曲线.

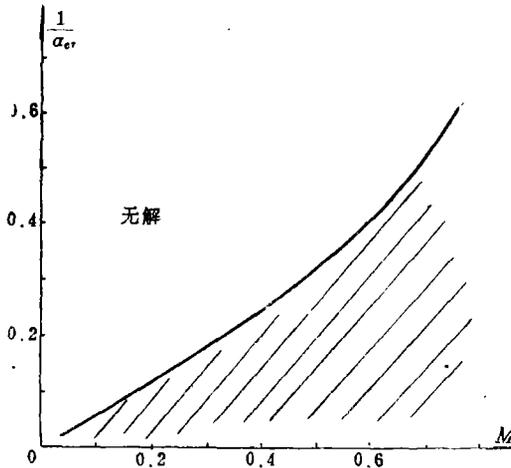


图3 有解区域

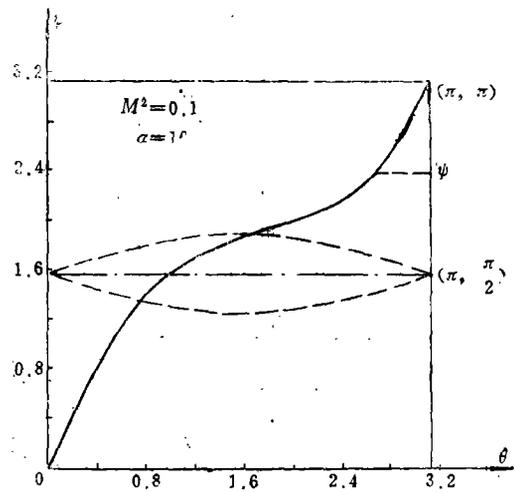


图4 ψ - θ 曲线

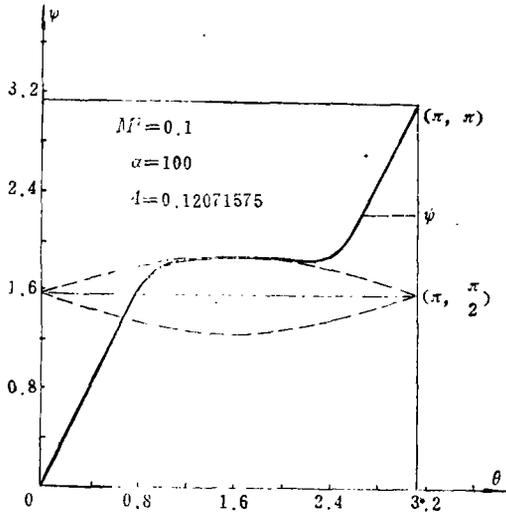


图5 ψ - θ 曲线

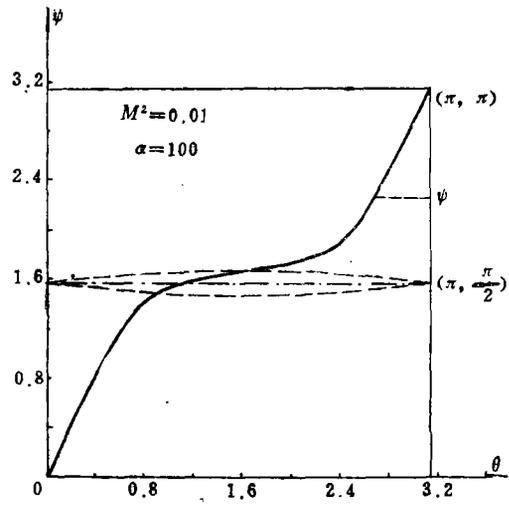


图6 ψ - θ 曲线

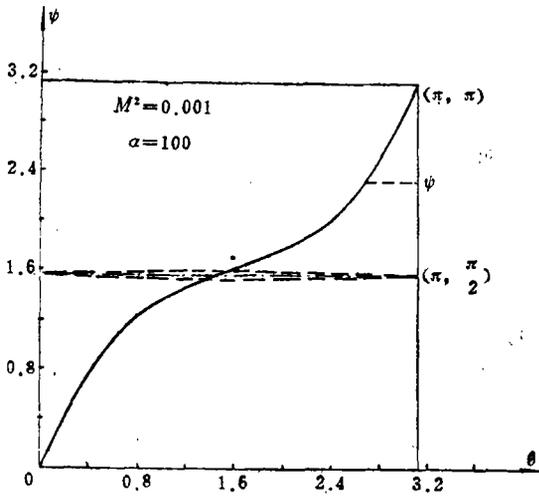


图7 ψ - θ 曲线

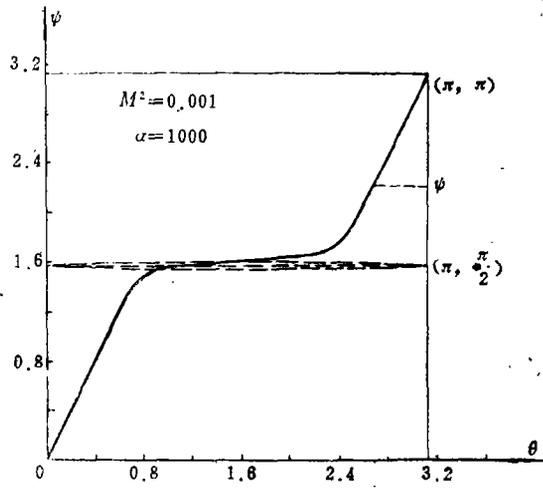


图8 ψ - θ 曲线

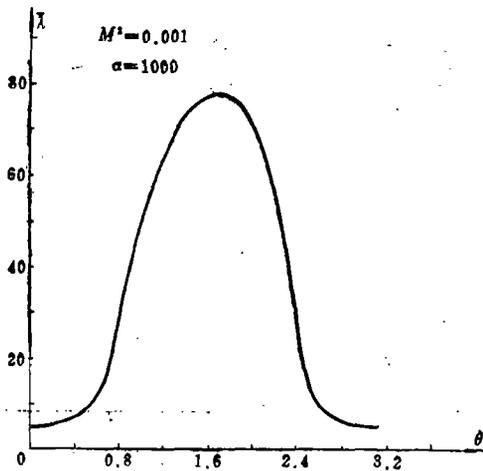


图9 λ - θ 曲线

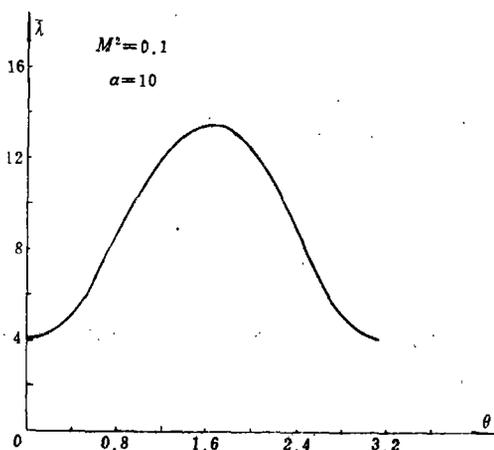


图10 $\bar{\lambda}$ - θ 曲线

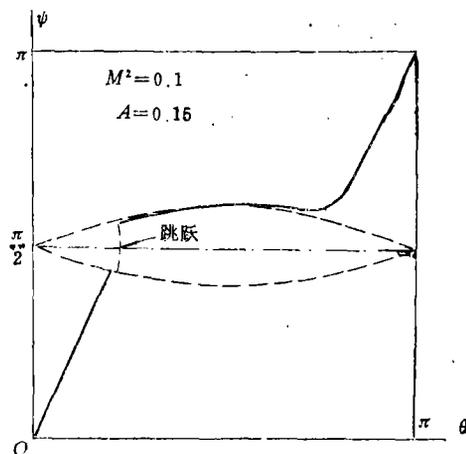


图11 文献[14]给出的 ψ - θ 曲线

七、断裂准则

利用(3.8), (4.5)可得到裂纹前方的应变主奇异部分:

$$\varepsilon_{\theta\theta}|_{\theta=0} = \frac{3\sigma_0}{E} A \ln \frac{R}{r} \quad (7.1)$$

这里 A 是确定的常数, 依赖于 α 与 M . 从力学观点看, 断裂过程应该受裂纹尖端周围的应变状态控制. 另一方面, 本文的结果表明, 在裂纹前方的 ε_{θ} 较其他方向大, 所以我可用下式为判别准则:

$$\varepsilon_{\theta\theta}|_{\substack{\theta=0 \\ r=r_0}} = \varepsilon_{or} \quad (7.2)$$

其中 ε_{or} 与 r_0 是材料常数, 它们应由微观力学确定或者由实验测得. 当 ε_{or} 与 r_0 给定时, 我们可以算得 R 的临界值:

$$R_{or} = r_0 \exp \left[\frac{E \varepsilon_{or}}{3\sigma_0 A(M, \alpha)} \right] \quad (7.3)$$

当远场状态已知时, 我们可以通过计算得到 R , 通过 R 与 R_{or} 的比较便可对裂纹扩展与否作出判断.

八、裂纹扩展的稳定性

为了讨论裂纹扩展的稳定性, 我们引入新的参数 β

$$\beta = \frac{2R^*}{3\eta_0} \left(\frac{\rho E}{3} \right)^{1/2} \quad (8.1)$$

于是

$$\alpha = \beta / M \quad (8.2)$$

这样, 当各材料常数固定时, 即 β 固定时, α 与 M 成反比. 数值计算结果表明, 这种情况下得到的 A 是 M 的减函数. 再由(7.3)可知, R_{or} 是 M 的增函数.

另一方面, 对于小尺度屈服情况, 塑性区尺度 R 是由动态应力强度因子 $K_{ID}^{(20)}$ 决定的

$$R \sim K_{ID}^2 \quad (8.3)$$

而 K_{ID} 又与表观 K_I 有关:

$$K_{ID} = \zeta(M, \nu) K_I \quad (8.4)$$

其中 $\zeta(M, \nu)$ 是 M 的减函数。这样, 为了保持 $R = R_c$ 成立, 即维持裂纹扩展条件, 则 K_I 必须随 M 的增大而增大, 所以裂纹扩展是稳定的。

九、结 论

1) 由于粘性的引入, 动态裂纹尖端场中的不合理的塑性激波被消除了。即使是在裂纹尖端处粘性趋于零而且系数 η_0 很小, 所得的结果仍与通常弹塑性情况有本质区别。

2) 对于 I 型裂纹, 本文得到了单参数渐近解, 就是说, 在应变奇异项 $A \ln \frac{R}{\rho}$ 中只有 R 是未知的, 它要由远场确定, 而 A 是由渐近解本身给出的。在 [14] 中, A 是未知的。

3) 本文的结果表明, 裂纹传播的速度是稳定的。

参 考 文 献

- [1] Irwin, G. R., *J. Appl. Mech.*, 24 (1957), 361.
- [2] Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 16 (1968), 13—21.
- [3] Rice, J. R. and G. F. Rosengren, *J. Mech. Phys. Solids*, 16 (1968), 1—12.
- [4] Gao, Y. C. and K. C. Hwang, *Advances in Fracture Research*, Ed. D. Fraaij, 2 (1981), 669—682.
- [5] Chitaley, A. D. and F. A. McClintock, *J. Mech. Phys. Solids*, 19 (1971), 147.
- [6] Slepian, L. L., *Izv. AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela*, 9 (1974), 57.
- [7] Gan, Y. C., *Acta Mech. Sinica*, 1 (1980), 48. (in Chinese)
- [8] Rice, J. R., W. J. Drugan and T. L. Sham, *Fracture Mechanics*, ASTM STP 700 (1980), 189.
- [9] Gao, Y. C., *Acta Mech. Sinica*, Special issue (1981), 100; presented at the 15th ICTAM, Toronto, Aug. (1980).
- [10] Gao, Y. C., *Elastic Plastic-Fracture*, ASTM STP 803 (1981), 1—176.
- [11] Drugan, W. J., *J.R. Rice and T. L. Sham, J. Mech. Phys. Solids*, 30 (1982), 447.
- [12] Gao, Y. C., B. Han and K. C. Hwang, *Acta Mech. Sinica*, 18, 1 (1986), 88. (in Chinese)
- [13] Drugan, W. J., *J. Appl. Mech.*, 53 (1986), 83.
- [14] Gao, Y. C. and S. Nemat-Nasser, *Mechanics of Materials*, 2 (1983), 47.
- [15] Gao, Y. C. and S. Nemat-Nasser, *Mech. of Mater.*, 2 (1983), 305—317.
- [16] Gao, Y. C. and S. Nemat-Nasser, *J. Mech. Phys. Solids*, 32 (1984), 1—19.
- [17] Gao, Y. C., *Int. J. Engng. Sci.*, 24 (1986), 1045—1055.
- [18] Gao, Y. C., *Int. J. Fracture*, 29 (1985), 171.
- [19] Gao, Y. C., *Int. J. Fracture*, 34 (1987), 111.
- [20] Broberg, B., *Recent Progress in Applied Mechanics*, The Folke Odqvist Volume, Ed by J. Hult et al. (1987), 125.

Viscoplastic Field near a Propagating Crack-Tip

Gao Y. C.

(Haerbin Shipbuilding Engineering Institute, Haerbin)

Abstract

An elastic-viscoplastic constitutive model is proposed instead of the usual elastoplastic model. It is assumed that when crack-tip is approached the viscosity coefficient tends to zero ($\eta = \eta_0 r$). Asymptotic analysis of the dynamic field near a propagating crack-tip is given, and the uniparameter solution is obtained. The numerical result is given for various Mach number and viscosity coefficient. Based on the asymptotic solution, a fracture criterion is proposed and the stability of crack propagation is discussed.