应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

周期轨间蕴含关系的判定算法(Ⅱ)*

张景中　　杨　路　　章　雷

(中国科学院成都分院，1988年3月7日收到)

摘　要

近年来，Sarkovskii 定理及其有关研究引起很大兴趣．按 Sarkovskii 定理，若闭区间上连续自映射f有3-周期点，则对任意正整数n有n周期点．但f不可能有所有类型的n-周期轨．例如：

$$f(x)=\begin{cases}x+1/2 & x\in[0,\ 1/2]\\ 2(1-x) & x\in(1/2,\ 1]\end{cases}$$

则f仅有两种类型的3-周期轨中的一类．这表明 Sarkovskii 定理远远没有给出周期轨之间的关系的全部信息．本文(Ⅰ)中将给出周期轨的型的概念，并证明可以建立机械方法来判断一种周期轨是否蕴含另一类型的周期轨．本文(Ⅱ)中将给出这个判断方法的计算机程序，并列出一些计算结果．

设f是线段I上的连续自映射．如果I上的n个两两不同的点x_0，x_1，…，x_{n-1}满足

$$\begin{cases}f(x_k)=x_{k+1} & (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-2)\\ f(x_{n-1})=x_0\end{cases}$$

则称$\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n-1}\}$为$f$的一个$n$-周期轨．把$x_0$，$x_1$，…，$x_{n-1}$按自小而大的顺序重排为

$$z_1<z_2<\cdots<z_n$$

之后，若$f(z_i)=z_j$，则令$a_i=j$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$．
把正整数有序组$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$称为$n$周期轨$\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n-1}\}$的型．显然，$n$周期轨可能有的型共$(n-1)!$种．

如果具有A型周期轨的连续函数必然具有B型周期轨，我们就说A型蕴含B型．记作$A\lhd B$．具体给了两种型A与B，究竟是A蕴含B、还是B蕴含A，或互不蕴含？这在一维动力系研究中是有兴趣的问题．

本文(Ⅰ)中已给出了用计算机判定任给两种型之间是否有蕴含关系，以及谁蕴含谁的方法的原理．在(Ⅱ)中将根据这一原理给出程序，并列出一些具体计算结果．

三、程序的说明

我们已用BASIC语言写出了可在CASIO—PB—700袖珍微机上使用的算法程序．这程

* 钱伟长推荐．
国家自然科学基金资助项目．本文(Ⅰ)发表于本刊11卷1期．

序当然可以在任一种微机上运行。（也许要修改极个别的字符）这里列出全部程序。我们并录制了磁带，供对此问题有兴趣的同行直接在同型号的微机上使用。

程序开始，屏幕上即显示菜单。请使用者选择输入0，1，2三者之一。（第6行）输入0，即选LIST，机器将给出所有的最小循环节长度为k的M_f中的序列的一个循环节，由这个序列确定的周期轨的大小顺序，以及这个周期轨的型。输入1，即选 NO SAME，重复的型将被删除。输入2，即选 CHECK，机器将具体检查f是否蕴含某一个给定的型的周期轨。

选择菜单之后，屏幕显示要求输入N，即f的定义域的元素个数。再输入K，即要列出或检查是否被蕴含的周期轨的周期。

如果你选择了2，即P=2，屏幕显示即要求输入{C!(J)；J=1，2，…，K}，而C!(J)即待查是否被蕴含的周期轨的型。

然后，屏幕显示要求输入f的型{A!(J，0)；J=1，2，…，N}。这时，全部信息输入完毕。

机器随即打印出N，K。（如果选P=2，还打印出待查的是否被蕴含的型，即{C!(J)；J=1，…，K}，在C!(J)末尾标明"***CK"。）再打印出f的型，即{A!(J)；J=1，…，N}。末尾标明*OMP，原初给出映射之意。然后打印出诸Δ_i($i=1$，2，…，$N-1$)在$\bar{f}$下所覆盖的区间的号码的上下界。例如2—(2，4)表明$\bar{f}(\Delta_2)$将覆盖Δ_2，Δ_3，Δ_4三个区间。

然后，经运算即打印出结果。选择P=0(LIST)时，打印出各种长为K的循环节，以*结尾，然后是与此循环节对应的诸周期点的顺序号，以———ODER 结尾，最后是对应的周期轨的型，以***MP结尾。若选 P=1，则遇有重复的型则删去不打印。（为此，程序在13行引入D!(K，100)以贮存已找出的型。这里至多可贮100个，是受袖珍机贮存量的限制。）而且P=2时，仅打印出与所给K-周期轨的型一致的循环节，周期点序号及对应的型。若确实蕴含所检查的型，最后打印出YES，否则，打印NO而结束停机。

程序中没有特别列出那些平凡的周期轨的型。在我们检查周期轨间的蕴含关系时，这当然是不必要的。

下面对程序中的某些变量及某些行加以解释。

变量符加"!"号表示半精度，为了少用内存。

第25到28行是为了确定K的约数B!(E，3)，以便去掉那些可以分成更小循环节的长为K的循环节。

第75行至625行是为了写出一个长为K的循环节，即确定一个M_f中的K循环序列。而700行至740行是为了删去含有更小循环节的序列。第745行至775行则删去那些重复的K循环序列。第860行至935行对周期点给出按自小而大的排列顺序号码{B!(L，2)，L=1，2，…，K}。第965行至975行则给出对应周期轨的型并打印出来。

如果选P=1，则1000行至1050行删去重复的型。如果选P=2，则1200以下将找出的周期轨的型与预给的C!(J)比较。若两者不同，继续查找。相同时打印出来YES而停机。

这个程序应当有相当大的改进余地。特别是选择P=2(CHECK)时，可利用已给周期轨的型的特点，更多地预先删除不必查对的循环节，从而减少计算量。

概要流程请见图1。

计算程序文件

```
5 ERASE A!, B!, C!, D!
6 INPUT "0:LIST 1:NO SAME 2:CHECK P="
  ;P
10 INPUT "N="; N, "K="; K
```

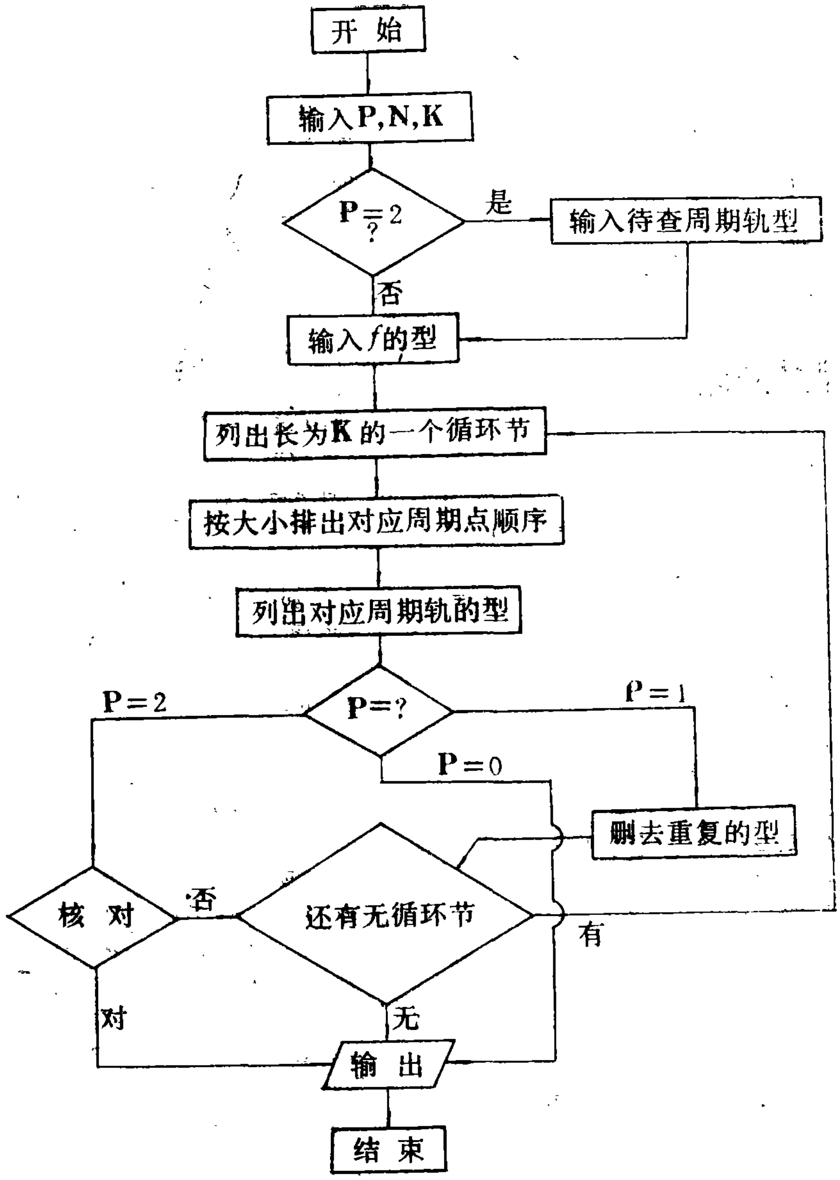

图 1

```
12 LPRINT "N=" ; N, "K=" ; K,
13 IF P=1 THEN DIM D!(K, 100)
20 DIM A!(N, 3), B!(K, 6), C!(K)
21 IF P=2 THEN FOR J=1 TO K:INPUT "C!
   (J)=" ; C!(J):NEXT J:GOTO 995
25 E=0:I=0
26 FOR J=1 TO INT (K/2)
27 IF K MOD J=0 THEN E=E+1:B!(E, 3)
   =J
28 NEXT
29 FOR J=1 TO N
30 INPUT "A!(J, 0)" ; A!(J, 0)
35 IF J=1 THEN GOTO 50
40 L=J-1:U=A!(L, 0):V=A!(J, 0):A!(L, 2)
   =SGN(V-U)
43 IF U>V THEN W=U:U=V:V=W
45 A!(L, 3)=V-1:A!(L, 1)=U
47 IF U=V THEN A!(L, 3)=0:A!(L, 1)=0
48 IF J=N THEN A!(N, 3)=A!(N-1, 3):A!
   (N, 1)=A!(N-1, 1)
50 NEXT J
51 FOR J=1 TO N
52 LPRINT A!(J, 0); "," ;
53 IF J=N THEN LPRINT "*OMP" ,
```

```
54 NEXT J
55 FOR J=1 TO K
60 B!(J, 0)=0
70 NEXT J
71 FOR J=1 TO N-1
73 LPRINT J; "-(" ; A!(J, 1); "," ; A!(J,
   3); ")"
74 NEXT J
75 X=1:R=0
80 B!(1, 0)=1:Z=1
85 IF B!(1, 0)=N-1 THEN END
90 IF B!(1, 0)>A!(Z, 3) THEN Q=0:GOTO
   120
95 IF A!(Z, 1)<=B!(1, 0) THEN R=B!(1,0)
   :Q=1:GOTO 120
100 IF A!(Z, 1)>B!(1, 0) THEN R=A!(Z, 1):
    Q=1:GOTO 120
105 IF Z>A!(B!(X-1, 0), 3) THEN B!(X,0)=
    0:Q=-1:GOTO 120
120 X=X+Q:IF X=1 THEN Z=B!(1, 0)+1:
    B!(1, 0)=Z:GOTO 85
125 IF Q<1 THEN B!(X, 0)=B!(X, 0)+1
130 IF B!(X, 0)=0 THEN B!(X, 0)=R
135 Z=B!(X, 0)
136 IF Z>A!(B!(X-1,0),3) THEN Q=-1:B!
    (X, 0)=0:GOTO 120
140 IF X=K THEN GOTO 600
150 GOTO 85
600 IF Z>A!(B!(K-1, 0), 3) THEN Q=-1:
    B!(X, 0)=0:GOTO 120
610 IF B!(1, 0)<A!(Z, 1) THEN Z=Z+1:
    GOTO 600
620 IF B!(1, 0)>A!(Z, 3) THEN Z=Z+1:
    GOTO 600
625 B!(K, 0)=Z
626 GOTO 700
630 FOR J=1 TO K:IF P=1 THEN GOTO 660
640 LPRINT B!(J, 0); "," ;
650 IF J=K THEN LPRINT "*" ,
660 NEXT J
661 IF P=8 THEN GOTO 950
665 GOTO 860
670 Z=Z+1:GOTO 600
680 PRINT E,
700 IF E=0 THEN GOTO 745
705 FOR J=1 TO E
710 FOR F=1+B!(J, 3) TO K
720 H=(F MOD B!(J, 3)):IF H=0 THEN H=
    B!(J, 3)
730 IF (B!(H,0)-B!(F,0)) ^ 2>0 THEN GOTO
    740
735 IF F=K THEN GOTO 670
736 NEXT F
740 NEXT J
745 G=0
750 FOR J=2 TO K
760 IF B!(J, 0)=B!(1, 0) THEN G=G+1:B!
    (G, 4)=J
770 NEXT J
775 IF G=0 THEN GOTO 630
780 FOR J=1 TO G
790 FOR F=1 TO K-2
800 W=(B!(J, 4)+F) MOD K:IF W=0 THEN
    W=K
810 IF B!(1+F, 0)<B!(W, 0) THEN GOTO
    840
820 IF B!(1+F, 0)>B!(W, 0) THEN GOTO
    670
830 NEXT F
840 NEXT J
850 GOTO 630
860 FOR J=0 TO K
865 B!(J, 2)=J
870 NEXT J
875 FOR J=1 TO K
880 H=2 ^ J:IF H>=2*K THEN GOTO 960
885 FOR G=0 TO INT(K/H)+1
890 U=G*H+1:V=U+H/2
895 IF V>K THEN GOTO 940
896 IF U>=G*H+H THEN GOTO 935
897 IF V>G*H+H THEN GOTO 935
898 IF V>K THEN GOTO 935
900 X0=B!(U, 2):Y0=B!(V, 2)
910 FOR W=0 TO K-1
911 B!(0, 6)=1
912 B!(0, 0)=B!(K, 0)
915 X1=X0+W:IF X1>K THEN X1=X1-K
917 Y1=Y0+W:IF Y1>K THEN Y1=Y1-K
918 IF W>0 THEN B!(W, 6)=B!(W-1,6)*A!
    (B!(X1-1, 0), 2)
921 U1=B!(X1, 0)*B!(W, 6):V1=B!(Y1, 0)*B!
    (W, 6)
922 IF U1=V1 THEN GOTO 930
923 IF U1<V1 THEN U=U+1:GOTO 896
924 FOR L=V TO U+1 STEP -1
925 B!(L, 2)=B!(L-1, 2)
```

```
926 NEXT L
927 B!(U, 2)=Y0
928 U=U+1:V=V+1
929 GOTO 896
930 NEXT W
935 NEXT G
940 NEXT J
950 IF P=2 THEN GOTO 1300
951 FOR J=1 TO K
955 B!(B!(J, 2), 5)=J:IF P=1 THEN GOTO
    960
956 LPRINT B!(J, 2); ",";
957 IF J=K THEN LPRINT "---ODER",
960 NEXT J
963 IF P=1 THEN GOTO 1000
965 FOR J=1 TO K
966 L=B!(J, 2)+1:IF L>K THEN L=L-K
967 IF P=2 THEN GOTO 1200
970 LPRINT B!(L, 5); ",";
972 IF J=K THEN LPRINT "****MP",
975 NEXT J
977 IF P=3 THEN LPRINT "YES",
978 IF P=3 THEN END
980 IF P=2 THEN P=3:GOTO 950
981 IF P=2 THEN END
990 GOTO 670
995 FOR J=1 TO K
996 LPRINT C!(J); ",";
997 IF J=K THEN LPRINT "***CK",
998 NEXT J
999 GOTO 25
1000 FOR J=1 TO K
1005 L=B!(J, 2)+1:IF L>K THEN L=L-K
1010 D!(J, I)=B!(L, 5)
1015 NEXT J
1020 IF I=0 THEN I=I+1:GOTO 965
1025 FOR Q=0 TO I-1
1030 FOR J=1 TO K
1035 IF (D!(J, Q)-D!(J, I))^2>0 THEN
     GOTO 1045
1040 IF J=K THEN GOTO 670
1044 NEXT J
1045 NEXT Q
1050 I=I+1:GOTO 965
1200 IF B!(L, 5)=C!(J) THEN GOTO 975
1210 GOTO 670
1300 FOR J=1 TO K
1310 B!(B!(J, 2), 5)=J
1320 NEXT J
1330 GOTO 965
```

四、若干计算结果

大家都知道，有3-周期轨便有任意n-周期轨。但3-周期轨究竟蕴含哪些型的周期轨呢？下面列出型为(2，3，1)的3-周期轨所蕴含的K-周期轨的型，K=4，5，6，7，8，9，10，11，12。

$K=4$　(1种循环节，1种型)
　(3，4，2，1)

$K=5$　(2种循环节，1种型)
　(3，5，4，2，1)

$K=6$　(2种循环节，1种型)
　(4，6，5，3，2，1)

$K=7$　(4种循环节，2种型)
　(4，7，6，5，3，2，1)
　(4，5，7，6，3，2，1)

$K=8$　(5种循环节，3种型)
　(5，8，7，6，4，3，2，1)
　(5，6，8，7，4，3，2，1)
　(4，5，8，7，6，3，2，1)

$K=9$　(8种循环节，4种型)

(5, 9, 8, 7, 6, 4, 3, 2, 1)

(5, 6, 8, 9, 7, 4, 3, 2, 1)

(5, 7, 9, 8, 6, 4, 3, 2, 1)

(4, 6, 9, 8, 7, 5, 3, 2, 1)

$K=10$　(11种循环节，6种型)

(6, 10, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1)

(6, 8, 10, 9, 7, 5, 4, 3, 2, 1)

(4, 6, 10, 9, 8, 7, 5, 3, 2, 1)

(5, 6, 7, 10, 9, 8, 4, 3, 2, 1)

(5, 6, 9, 10, 8, 7, 4, 3, 2, 1)

(6, 7, 9, 10, 8, 5, 4, 3, 2, 1)

$K=11$　(18种循环节，9种型)

(6, 11, 10, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1)

(6, 7, 11, 10, 9, 8, 5, 4, 3, 2, 1)

(6, 9, 11, 10, 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1)

(4, 7, 11, 10, 9, 8, 6, 5, 3, 2, 1)

(5, 6, 7, 11, 10, 9, 8, 4, 3, 2, 1)

(5, 7, 10, 11, 9, 8, 6, 4, 3, 2, 1)

(5, 7, 8, 11, 10, 9, 6, 4, 3, 2, 1)

(6, 8, 10, 11, 9, 7, 5, 4, 3, 2, 1)

(6, 7, 8, 10, 11, 9, 5, 4, 3, 2, 1)

$K=12$　(25种循环节，13种型)

(7, 12, 11, 10, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1)

(7, 8, 12, 11, 10, 9, 6, 5, 4, 3, 2, 1)

(6, 7, 12, 11, 10, 9, 8, 5, 4, 3, 2, 1)

(4, 7, 12, 11, 10, 9, 8, 6, 5, 3, 2, 1)

(7, 10, 12, 11, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1)

(6, 7, 8, 12, 11, 10, 9, 5, 4, 3, 2, 1)

(5, 6, 8, 12, 11, 10, 9, 7, 4, 3, 2, 1)

(5, 7, 11, 12, 10, 9, 8, 6, 4, 3, 2, 1)

(5, 7, 9, 12, 11, 10, 8, 6, 4, 3, 2, 1)

(7, 9, 11, 12, 10, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1)

(6, 7, 9, 11, 12, 10, 8, 5, 4, 3, 2, 1)

(6, 7, 8, 10, 12, 11, 9, 5, 4, 3, 2, 1)

(7, 8, 9, 11, 12, 10, 6, 5, 4, 3, 2, 1)

这里有两点应当指出：(2，3，1)型的3-周期轨的反向拓扑共轭是(3，1，2)。其计算方法是用4分别减去2，3，1，再颠倒先后顺序即得。把(2，3，1)型所蕴含的K-周期轨的型，作反向拓扑共轭——用$K+1$顺次减型表示中的分量，再颠倒顺序——即得(3，1，2)所蕴含的K-周期轨的型。例如，由

$$(2,\ 3,\ 1)\triangleleft(3,\ 4,\ 2,\ 1)$$

即知 $$(3,\ 1,\ 2)\triangleleft(4,\ 3,\ 2,\ 1)$$

由 $$(2,\ 3,\ 1)\triangleleft(3,\ 5,\ 4,\ 2,\ 1)$$

即知 $$(3,\ 1,\ 2)\triangleleft(5,\ 4,\ 2,\ 1,\ 3)$$

等等。

其次，设$f\in C_p(S_n)$. f的型称为单峰的，如果$\bar{f}(x)$是一个单峰函数.由(2，3，1)的单峰性，它所蕴含的周期轨也都是单峰的．所以只要写出所蕴含的型的峰左部份就够了．例如：(3，5，4，2，1) 可简记为(3，…)，(4，5，7，6，3，2，1)可简记为(4，5，…) (5，6，7，10，9，8，4，3，2，1)可简记为(5，6，7，…)．只要知道该型的周期数K，便不难写出型的其余分量。

这两点说明，会给我们对型的讨论带来方便。

我们还算出了 6 种4-周期轨之间的蕴含关系，以及24种5-周期轨之间的蕴含关系。

下面是 6 种4-周期轨之间的蕴含关系：

$$(3,\ 1,\ 4,\ 2)\triangleleft\begin{cases}(4,\ 1,\ 2,\ 3)\triangleleft(4,\ 3,\ 1,\ 2)\\(2,\ 3,\ 4,\ 1)\triangleleft(3,\ 4,\ 2,\ 1)\end{cases}$$

$$(2,\ 4,\ 1,\ 3)\triangleleft\begin{cases}(4,\ 3,\ 1,\ 2)\\(3,\ 4,\ 2,\ 1)\end{cases}$$

至于24种5-周期轨间的蕴含关系，我们在机器上算出12种，另12种的信息可用反向拓扑共轭得到。（在4-周期轨的情形下，(3，1，4，2) 型与 (2，4，1，3) 型是反向自共轭的。对于奇数周期轨，显然不存在反向自共轭的情形）．具体开列出来是：（我们略去了一些逗号，如(24153)表(2，4，1，5，3)）

$$(2\,4\,1\,5\,3)\triangleleft\begin{cases}\boxed{\left.\begin{matrix}(3\,1\,4\,5\,2)\\(4\,1\,2\,5\,3)\end{matrix}\right\}\triangleleft\begin{cases}(2\,3\,4\,5\,1)\triangleleft(2\,4\,5\,3\,1)\triangleleft(3\,5\,4\,2\,1)\\(5\,1\,2\,3\,4)\triangleleft(5\,3\,1\,2\,4)\triangleleft(5\,4\,2\,1\,3)\end{cases}}^{*}\\[2ex](2\,5\,1\,3\,4)\triangleleft\boxed{\begin{cases}(2\,5\,4\,1\,3)\triangleleft(3\,4\,5\,1\,2)\triangleleft(3\,5\,4\,2\,1)\\(3\,5\,2\,1\,4)\triangleleft(4\,5\,1\,2\,3)\triangleleft(5\,4\,2\,1\,3)\end{cases}}^{**}\end{cases}$$

$$(3\,4\,2\,5\,1)\triangleleft(4\,3\,1\,5\,2)\triangleleft\boxed{\left\{\begin{matrix}(3\,1\,4\,5\,2)\\(4\,1\,2\,5\,3)\end{matrix}\right\}\triangleleft\begin{cases}(2\,3\,4\,5\,1)\triangleleft(2\,4\,5\,3\,1)\triangleleft(3\,5\,4\,2\,1)\\(5\,1\,2\,3\,4)\triangleleft(5\,3\,1\,2\,4)\triangleleft(5\,4\,2\,1\,3)\end{cases}}^{*}$$

$$(4\,5\,2\,3\,1)\triangleleft(5\,4\,1\,3\,2)\triangleleft(5\,4\,2\,1\,3)$$

这三个组的反向拓扑共轭组是

$$(3\,1\,5\,2\,4)\triangleleft\begin{cases}\boxed{}^{*}\\(2\,3\,5\,1\,4)\triangleleft\boxed{}^{**}\end{cases}$$

$$(5\,1\,4\,2\,3)\triangleleft(4\,1\,5\,3\,2)\triangleleft\boxed{}^{*}$$

$$(5\,3\,4\,1\,2)\triangleleft(4\,3\,5\,2\,1)\triangleleft(3\,5\,4\,2\,1)$$

这里$\boxed{}^{*}$ 和$\boxed{}^{**}$分别记两个在反向拓扑共轭之下不变的组，其具体内容由$\boxed{}$第一次出现时可知。

从上述看出，在4-周期轨的 6 种型和5-周期轨的24种型之间，有互不蕴含关系，但不存在相互蕴含关系。事实上，我们有

命题　设 $f\in C_p(S_n^{(0)})$，$g\in C_p(S_m^{(0)})$。如果

$$A_f\lhd A_g \text{ 且 } A_g\lhd A_f\text{，则 } A_f=A_g.$$

证明　记 $S_n^{(i)}=\{x_1^{(i)}<x_2^{(i)}<\cdots<x_n^{(i)}\}$ 和 $S_m^{(i)}=\{y_1^{(i)}<y_2^{(i)}<\cdots<y_m^{(i)}\}$，$i=0,1,2,\cdots$.

假若 $A_f\neq A_g$，不妨设 $\bar f$ 在 $[x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}]$ 上递增，$[x_1^{(0)},\ c]$ 是 $\bar f$ 的包含 $[x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}]$ 的最大递增区间，（显然，$c\in S_n^{(0)}$）且 $n\leqslant m$.

由 $A_f\lhd A_g$ 知 $\exists\ g_1\in C_p(S_m^{(1)})$ 满足

$$A_{g_1}=A_g,\ g_1(y_i^{(1)})=\bar f(y_i^{(1)}),\ 1\leqslant i\leqslant m,\ \text{且 } x_1^{(0)}<y_1^{(1)}.$$

（1）由于 $A_f\neq A_g$，$A_{g_1}=A_g\lhd A_f$，$\bar f$ 是 g_1 的连续扩张，根据引理6和引理7知，$\exists\ f_1\in C_p(S_n^{(1)})$ 满足 $A_{f_1}=A_f$，$f_1(x_i^{(1)})=\bar f(x_i^{(1)})$，$1\leqslant i\leqslant n$，且 $y_1^{(1)}<x_1^{(1)}<c$.

（2）再由 $A_{f_1}=A_f\lhd A_g$，同上理可知 $\exists\ g_2\in C_p(S_m^{(2)})$ 满足 $A_{g_2}=A_g$，$g_2(y_i^{(2)})=\bar f(y_i^{(2)})$，$1\leqslant i\leqslant m$，且 $x_1^{(1)}<y_1^{(2)}<c$.

以下，我们反复运用(1)、(2)的方法，便可得到两串点列 $\{x_1^{(i)}\}$，$\{y_1^{(i)}\}$ 满足

$$\left\{\operatorname{orb}_{\bar f}(x_1^{(i)})\right\}_{i=1}^{\infty}\ \text{是同型的 } n\text{-周期轨集} \qquad (*_1)$$

$$\left\{\operatorname{orb}_{\bar f}(y_1^{(i)})\right\}_{i=1}^{\infty}\ \text{是同型的 } m\text{-周期轨集}$$

$$x_1^{(i-1)}<y_1^{(i)}<x_1^{(i)}<c,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots$$

由此知　$$\lim_{i\to\infty}x_1^{(i)}=x_0;\ \lim_{i\to\infty}y_1^{(i)}=x_0 \qquad (*_2)$$

且 $\bar f^n(x_0)=x_0\leqslant c$.

根据 $\{x_1^{(i)}\}$ 的选取及 $x_1^{(1)}>x_1^{(0)}\Rightarrow x_0\notin S_n^{(0)}$，$\therefore \bar f^i(x_0)\notin S_n^{(0)}$，$i=0,1,2\cdots,n-1$。于是，由 $\bar f$ 的连续性，必存在闭区间 $I\subset(x_1^{(0)},c)/S_n^{(0)}$ 使

$\bar f^i$ 在 I 上线性、严格单调，　$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$　　$(*_3)$

由 $(*_1)$，$(*_2)$，$(*_3)\Rightarrow\exists\ i$ 使 $J=[x_1^{(i)},\ x_1^{(i+1)}]\subset I$ 满足

$$\bar f^n(J)=J,\ \text{且 } \bar f^n(z)=z\qquad \text{对 } \forall\ z\in J$$

又 $\because$　$y_1^{(i+1)}\in J$　　故 $\bar f^n(y_1^{(i+1)})=y_1^{(i+1)}$

这说明，m 是 n 的因子，由我们前面假设 $n\leqslant m$ 知 $m=n$。对 $\forall\ k<j$，$0\leqslant k,j\leqslant n$，由 $(*_3)\Rightarrow$ $\bar f^{j-k}$ 在 $[\bar f^k(x_1^{(i)});\ \bar f^k(x_1^{(i+1)})]$ 上线性、严格单调。$\therefore$ 当 $\bar f^j(x_1^{(i)})<\bar f^k(x_1^{(i)})$ $(\bar f^j(x_1^{(i)})>\bar f^k(x_1^{(i)}))$ 时，由 $(*_1)$ 知

$$\bar{f}^{j}(x_1^{(i+1)})<\bar{f}^{k}(x_1^{(i+1)})\quad(\bar{f}^{j}(x_1^{(i+1)})>\bar{f}^{k}(x_1^{(i+1)}))$$

$$\Rightarrow\bar{f}^{j}(y_1^{(i+1)})<\bar{f}^{k}(y_1^{(i+1)})\quad(\bar{f}^{j}(y_1^{(i+1)})>\bar{f}^{k}(y_1^{(i+1)}))$$

这说明，$\mathrm{orb}_{\bar{f}}(x_1^{(i)})$与$\mathrm{orb}_{\bar{f}}(y_1^{(i+1)})$是同型的周期轨，与$A_f\neq A_g$矛盾． □

以上初步的计算结果，启发我们提出一些问题．

（1）周期3蕴含哪些型的周期轨？反过来，哪些型蕴含3-周期轨？

（2）设周期3蕴含的k-周期轨的型有T_k种，如何计算T_k或估计T_k关于k的阶？

（3）对于给定的k，总有一些k周期轨不被别的k周期轨所蕴含（当$k=4$时，有两种，即(3, 1, 4, 2)与(2, 4, 1, 3)；当$k=5$时，则有6种，见前）．这种周期轨姑且称之为“本原k周期轨”．这种本原周期轨的型有什么特点？对于给定的k，有多少本原k周期轨？

（4）对给定的k，蕴含k-周期轨的型最多的周期轨，不妨叫做“复杂周期轨”．复杂周期轨的型有什么特点？

（5）判别两种周期轨的型是否有蕴含关系的问题，有没有多项式算法？

我们觉得，彻底弄清周期轨的型之间的相互关系，是有意义但相当困难的问题．希望这个方向的探索能引起同行的兴趣．

参 考 文 献

[1] Sarkovskii, A. N., Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself, *Ukr. Math. Zh.*, 16 (1964), 61—71.

[2] Stefan, P., A theorem of Sarkovskii on the coexistence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line, *Comm. Math. Phys.*, 54 (1977), 237—248.

[3] 张景中、杨路，关于 Sarkovskii 序的一些定理，数学进展，16，1 (1987)，33—48.

[4] 章雷，有限有序集上的自映射，学位论文 (1987).

[5] Coppel, W. A., Sarkovskii-minimal orbits, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 93 (1983), 397—408.

[6] Block, L. and D. Hart, Stratification of the space of unimodal interval maps, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, 3 (1983), 533-539.

[7] Block, L. and D. Hart, Orbit types for maps of the interval, *Ergod. Th. and Danam. Sys.*, 7 (1987), 161—164.

[8] Bernhardt, C., The ordering on permutations induced by continuous maps of the real line, *Ergod. Th. and Danam. Sys.*, 7 (1987), 155—160.

The Criterion Algorithm of Relation of Implication between Periodic Orbits (Ⅱ)

Zhang Jing-zhong Yang Lu Zhang Lei

(Institute of Mathematical Sciences, Chengdu Branch, Academia Sinica, Chengdu)

Abstract

In recent years, there is a wide interest in Sarkovskii's theorem and related study. According to Sarkovskii's theorem, if the continuous self-map f of the closed interval has a 3-periodic orbit, then f must has an n-periodic orbit for any positive integer n. But f can not have all n-periodic orbits for some n.

Example. Let

$$f(x)=\begin{cases} x+1/2 & x\in[0,\ 1/2] \\ 2(1-x) & x\in(1/2,\ 1] \end{cases}$$

Evidently, f has only one kind of 3-periodic orbit in the two kinds of 3-periodic orbits, which explains that it isn't far enough to uncover the relation between periodic orbits by the information which Sarkovskii's theorem has offered. In this paper, we raise the concept of type of periodic orbits, and give a feasible algorithm which decides the relation of implication between the two kinds of periodic orbits.