应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Liénard方程极限环的存在性*

黄安基　　曹登庆

（西南交通大学，1988年7月25日收到）

摘　　要

本文在没有常设条件$G(\pm\infty)=+\infty$的情况下，证明了 Liénard 方程存在极限环的几个充分性定理，推广了文[3～5]的某些结果．这些定理给出的条件均可估计极限环的存在区域．至少在n个极限环的充分性定理3、4的条件既不要求$F(x)$是奇函数，也不要求$F(x)$“n重互相相容”或“n重互相包含”．

一、引　　言

本文讨论 Liénard 方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0 \tag{1.1}$$

或其等价方程组

$$\dot{x}=y-F(x),\ \dot{y}=-g(x) \tag{1.2}$$

式中
$$F(x)=\int_0^x f(s)ds,\ f(x),\ g(x)\in C^0(-\infty,\ +\infty)$$

且能保证方程(1.1)初值问题解的存在唯一性．

关于方程组(1.2)极限环的存在性问题，已有许多很好的结果[1,2]．近年来，黄启昌和史希福[3]、丁大正[4]相继推广了Драгилёв定理[5]，但都没有取消$G(\pm\infty)=+\infty$的限制，其条件是加在整个相平面上的．本文定理1、2不但取消了$G(\pm\infty)=+\infty$的限制，而且环域的外境界线均为已知曲线，因而可以初步估计极限环的位置．由推论可说明文[4]定理7，从而Драгилёв定理及文[3]的定理都成为本文定理1与2在条件$G(\pm\infty)=+\infty$下的特殊情形．

有关方程组(1.2)或较(1.2)更一般的方程组

$$\dot{x}=\varphi(y)-F(x),\ \dot{y}=-g(x) \tag{1.3}$$

存在多个极限环的研究工作已有很多．加在$F(x)$上的条件或是要求$F(x)$在每次变号后的绝对值的最大值充分大，以产生多个周期振荡，如黄克成[6]、黄启昌和杨思认[7]，M. И. Войлоков[8]等；或是要求$F(x)$在每个定号区间上与x轴围成的面积越来越大，以产生多个周期振荡，如D. A. Neumann和L. D. Sabbagh[9]，C. Comstock[10]，吴葵光[11]，

* 李骊推荐．

Г. С. Рычков[12]，张芷芬[13]等。本文去掉了$g(x)$是奇函数以及［9～11］中$F(x)$是奇函数，[13]中$F(x)$"n重互相相容"或[12，13]中"n重互相包含"等的限制，得到了方程组(1.2)存在n个极限环的两组充分条件。文末还给出了当$x\in(-\infty,0)$时，$F(x)>0$的情况下，方程组(1.2)存在无穷多个极限环的例子。

二、极限环的存在性定理

记
$$G(x)=\int_0^x g(s)ds$$
并引进函数
$$\lambda(x,y,\mu)=(y+\mu)^2/2+G(x) \tag{2.1}$$
式中μ是常数。$\lambda(x,y,\mu)$关于时间t的由于系统(1.2)构成的全导数为
$$\dot{\lambda}(x,y,\mu)=-g(x)[\mu+F(x)] \tag{2.2}$$

定理 1 若函数$g(x)$，$F(x)$满足条件

(1) $xF(x)<0$，当$x\neq0$且$|x|$充分小；存在常数$a,b,c,d(a<b<0<c<d)$，k及正数$\varDelta(|k|\leqslant\varDelta)$使
$$F(x)\geqslant-\varDelta,\ \text{当}x\in(0,c];\quad F(x)\geqslant k,\ \text{当}x\in[c,d]$$
$$F(x)\leqslant\varDelta,\ \text{当}x\in[b,0);\quad F(x)\leqslant k,\ \text{当}x\in[a,b]$$

(2) $xg(x)>0$，当$x\in[a,0)\cup(0,d]$，且
$$G(a)\geqslant(2\varDelta+L)^2/2,\quad G(b)\leqslant(2\varDelta+L)^2/2$$
式中
$$L=\sqrt{N^2+2G(c)}$$
$$N=\begin{cases}0 & \text{当}\sqrt{2\sigma}-k\leqslant\varDelta\\ \sqrt{2\sigma}-k-\varDelta & \text{当}\sqrt{2\sigma}-k>\varDelta\end{cases}$$
$$\sigma=G(d)-G(c)$$

(3) $F(d)\geqslant k+H$

式中
$$H=\sqrt{(\sqrt{(2\varDelta+E)^2-2G(c)}-(\varDelta+k))^2-2\sigma}$$
$$E=\begin{cases}\sqrt{2G(b)} & \text{当}G(b)\geqslant K\\ \sqrt{(\sqrt{(2\varDelta+L)^2-2G(b)}-2(\varDelta-k))^2+2G(b)} & \text{当}G(b)<K\end{cases}$$
$$K=(2\varDelta+L)^2/2-2(\varDelta-k)^2$$
则方程组(1.2)在带域$a<x<d$内至少存在一个稳定极限环。

证明 由条件(1)、(2)可知，(0,0)为方程组(1.2)在带域$a<x<d$内的唯一奇点。兹构造 Poincaré-Bendixson 环域。

取闭曲线$\varGamma_0$：$\lambda(x,y,0)=\varepsilon$（$\varepsilon>0$充分小），则由(2.2)式及条件(1)、(2)可得
$$\dot{\lambda}(x,y,0)|_{\varGamma_0}=-g(x)F(x)|_{x\in\varGamma_0}\geqslant0$$
且$\dot{\lambda}(x,y,0)|_{\varGamma_0}=0$，当且仅当$x=0$。故方程组(1.2)的过$\varGamma_0$的轨线当$t$增加时恒穿出$\varGamma_0$之外，内境界线作成。

令$I=(2\varDelta+L)^2/2-(\varDelta-k)^2/2$。取闭曲线$\varGamma_1=\overparen{A_1A_2\cdots A_{10}A_1}$如图1所示（图中绘出$\sqrt{2\sigma}-k\leqslant\varDelta$及$K\leqslant G(b)\leqslant I$的情形）。$\varGamma_1$上各弧段曲线为

$\widehat{A_1A_2}$：$\lambda(x,y,-k)=G(d)$

$\widehat{A_3A_4}$：$\lambda(x,y,\Delta)=L^2/2$

$\widehat{A_4A_5}$：$\lambda(x,y,-\Delta)=(2\Delta+L)^2/2$

$\widehat{A_5A_6}$：当 $G(b)>I$ 时，点A_6 与 A_5 重合；当 $G(b)\leqslant I$ 时，$\lambda(x,y,-k)=(\Delta-k-\sqrt{(2\Delta+L)^2-2G(b)})^2/2+G(b)$

$\widehat{A_7A_8}$：$\lambda(x,y,-\Delta)=E^2/2$

$\widehat{A_8A_9}$：$\lambda(x,y,\Delta)=(2\Delta+E)^2/2$

$\widehat{A_9A_{10}}$：$\lambda(x,y,-k)=H^2/2+G(d)$

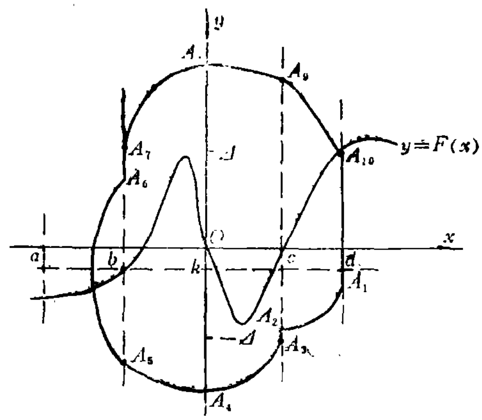

图 1

$A_{10}A_1$，A_2A_3，A_6A_7 均为直线段，A_2A_3 当$\sqrt{2\sigma}-k>\Delta$ 时退化为一点，A_6A_7 当 $G(b)<K$ 时退化为一点。

Γ_1上各弧段分点的坐标为

$A_1(d,k)$，$A_2(c,k-\sqrt{2\sigma})$，$A_3(c,-\Delta-N)$，$A_4(0,-\Delta-L)$，

$A_5(b,\Delta-\sqrt{(2\Delta+L)^2-2G(b)})$。当 $G(b)>I$ 时，A_6 与 A_5 重合；

当 $G(b)\leqslant I$ 时，$A_6(b,\ 2k-\Delta-\sqrt{(2\Delta+L)^2-2G(b)})$。

当$G(b)\geqslant K$时，$A_7(b,\Delta)$；当$G(b)<K$时，A_7 与 A_6重合。

$A_8(0,\Delta+E)$，$A_9(c,\sqrt{(2\Delta+E)^2-2G(c)}-\Delta)$，$A_{10}(d,k+H)$。

当 $G(b)>I$ 时，$y_{A_6}=y_{A_5}=\Delta-\sqrt{(2\Delta+L)^2-2G(b)}>k$，故由条件(1)、(3)可有

$$\dot{x}|_{A_{10}A_1\cup A_2A_3}\leqslant 0,\ \dot{x}|_{A_6A_7}>0$$

由条件(1)、(2)及(2.2)式可知，沿Γ_1上所有曲线弧段，除个别弧立点外，对应的全导数$\dot{\lambda}(x,y,\mu)(\mu=-\Delta,-k,\Delta)$都不大于零，故方程组(1.2)的过$\Gamma_1$的轨线当$t$增加时恒穿入$\Gamma_1$之内、外境界线作成。证毕

对应于定理 1，可有

定理 2 若函数$g(x)$，$F(x)$满足条件

(1) 同定理 1 条件(1)；

(2) $xg(x)>0$，当$x\in[a,0)\cup(0,d]$，且

$$G(d)\geqslant(2\Delta+L)^2/2,\quad G(c)\leqslant(2\Delta+L)^2/2$$

式中

$$L=\sqrt{N^2+2G(b)}$$

$$N=\begin{cases}0 & \text{当}\sqrt{2\sigma}+k\leqslant\Delta\\ \sqrt{2\sigma}+k-\Delta & \text{当}\sqrt{2\sigma}+k>\Delta\end{cases}$$

$$\sigma=G(a)-G(b)$$

(3) $F(a)\leqslant k-H$

式中

$$H=\sqrt{(\sqrt{(2\Delta+E)^2-2G(b)}-(\Delta-k))^2-2\sigma}$$

$$E=\begin{cases}\sqrt{2G(c)} & \text{当}G(c)\geqslant K\\ \sqrt{(\sqrt{(2\Delta+L)^2-2G(c)}-2(\Delta+k))^2+2G(c)} & \text{当}G(c)<K\end{cases}$$

$$K=(2\varDelta+L)^2/2-2(\varDelta+k)^2$$

则方程组(1.2)在带域$a<x<d$内至少存在一个稳定极限环。

推论(文[4]定理7) 若函数$g(x)$，$F(x)$满足

1° $xg(x)>0$，当$x\neq 0$；$G(\pm\infty)=+\infty$

2° $xF(x)<0$，当$x\neq 0$且$|x|$充分小；存在常数$M>0$及k，使$F(x)\geqslant k$，当$x>M$；$F(x)\leqslant k$，当$x<-M$；

3° $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}F(x)>k$ （或$\varliminf\limits_{x\to-\infty}F(x)<k$）

则方程组(1.2)至少存在一个稳定极限环。

为证明推论，我们先给出

引理 当$G(b)<K$时，$\lim\limits_{G(d)\to+\infty}H=0$。

证明 首先，由于$|k|\leqslant\varDelta$，故当$G(b)<K$时

$$\begin{aligned}E^2&=(\sqrt{(2\varDelta+L)^2-2G(b)}-2(\varDelta-k))^2+2G(b)\\&\geqslant(2\varDelta+L)^2+4(\varDelta-k)^2-4(\varDelta-k)(2\varDelta+L)\\&=(2k+L)^2\triangleq\underline{E}^2\end{aligned}$$

这里，符号“$\triangleq$”表示“定义为”。

$$\begin{aligned}H^2&=(\sqrt{(2\varDelta+E)^2-2G(c)}-(\varDelta+k))^2-2\sigma\\&\geqslant(2\varDelta+E)^2+(\varDelta+k)^2-2(\varDelta+k)(2\varDelta+E)-2\sigma-2G(c)\\&\geqslant(\varDelta-k+\underline{E})^2-2\sigma-2G(c)=(\varDelta+k+L)^2-2\sigma-2G(c)\triangleq\underline{H}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{G(d)\to+\infty}\underline{H}^2&=\lim_{2\sigma\to+\infty}\{(\varDelta+k+L)^2-2\sigma-2G(c)\}\\&=\lim_{2\sigma\to+\infty}\{2(\varDelta+k)^2+2(\varDelta+k)(L-\sqrt{2\sigma})\}\\&=2(\varDelta+k)^2+2(\varDelta+k)\lim_{2\sigma\to+\infty}(\sqrt{(\sqrt{2\sigma}-(\varDelta+k))^2+2G(c)}-\sqrt{2\sigma})\\&=2(\varDelta+k)^2+2(\varDelta+k)\lim_{2\sigma\to+\infty}\frac{-2(\varDelta+k)+((\varDelta+k)^2+2G(c))/\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{(1-(\varDelta+k)/\sqrt{2\sigma})^2+2G(c)/2\sigma}+1}\\&=2(\varDelta+k)^2-2(\varDelta+k)^2=0\end{aligned}$$

其次

$$\begin{aligned}E^2&=(\sqrt{(2\varDelta+L)^2-2G(b)}-2(\varDelta-k))^2+2G(b)\\&<[(2\varDelta+L)(1-G(b)/(2\varDelta+L)^2)-2(\varDelta-k)]^2+2G(b)\triangleq\bar{E}^2\\H^2&=(\sqrt{(2\varDelta+E)^2-2G(c)}-(\varDelta+k))^2-2\sigma\\&<(\sqrt{(2\varDelta+\bar{E})^2-2G(c)}-(\varDelta+k))^2-2\sigma\\&<[(2\varDelta+\bar{E})(1-G(c)/(2\varDelta+\bar{E})^2)-(\varDelta+k)]^2-2\sigma\triangleq\bar{H}^2\end{aligned}$$

注意到 $\lim\limits_{2\sigma\to+\infty}L=\lim\limits_{2\sigma\to+\infty}\sqrt{(\sqrt{2\sigma}-(\varDelta+k))^2+2G(c)}=+\infty$，有

$$\begin{aligned}\lim_{G(d)\to+\infty}\bar{E}^2&=\lim_{2\sigma\to+\infty}\{[(2\varDelta+L)(1-G(b)/(2\varDelta+L)^2)-2(\varDelta-k)]^2+2G(b)\}\\&=\lim_{2\sigma\to+\infty}\left\{(2k+L)^2+\frac{2\varDelta-2k}{2\varDelta+L}2G(b)+\frac{G^2(b)}{(2\varDelta+L)^2}\right\}\\&=\lim_{2\sigma\to+\infty}(2k+L)^2\end{aligned}$$

由此可知 $\lim\limits_{G(d)\to+\infty}\bar{E}=\lim\limits_{2\sigma\to+\infty}(2k+L)$，于是

$$\lim_{G(d)\to+\infty}\bar{H}^2=\lim_{2\sigma\to+\infty}\{[(2\Delta+\bar{E})(1-G(c)/(2\Delta+\bar{E})^2)-(\Delta+k)]^2-2\sigma\}$$

$$=\lim_{2\sigma\to+\infty}\left\{(\Delta-k+\bar{E})^2+\frac{\Delta+k}{2\Delta+\bar{E}}2G(c)+\frac{G^2(c)}{(2\Delta+\bar{E})^2}-2\sigma-2G(c)\right\}$$

$$=\lim_{2\sigma\to+\infty}\left\{(\Delta+k+L)^2+\frac{2(\Delta+k)G(c)}{2\Delta+2k+L}+\frac{G^2(c)}{(2\Delta+2k+L)^2}-2\sigma-2G(c)\right\}$$

$$=\lim_{2\sigma\to+\infty}\{(\Delta+k+L)^2-2\sigma-2G(c)\}=\lim_{2\sigma\to+\infty}\bar{H}^2=0$$

注意到 $\underline{H}^2\leqslant H^2<\bar{H}^2$，故有 $\lim\limits_{G(d)\to+\infty}H^2=0$，即 $\lim\limits_{G(d)\to+\infty}H=0$。引理证毕。

推论的证明 由条件2°，取 $-b=c=M+1=M_1$，$\Delta=\max\limits_{x\in[-M_1,M_1]}|F(x)|$，则定理1的条件(1)满足。

由条件3°（考虑括号外的情况），存在无穷序列 $x_n\to\infty$ 及 $l>0$，使 $F(x_n)\geqslant k+l$。即存在 $N_1>0$，使当 $n>N_1$ 时

$$F(x_n)\geqslant k+l \tag{2.3}$$

显然，存在 $N_2>0$，使当 $n>N_2$ 时

$$G(b)=G(-M_1)<(2\Delta+L)^2/2-2(\Delta-k)^2=K \tag{2.4}$$

式中 $L=\sqrt{(\sqrt{2G(x_n)-2G(M_1)}-(\Delta+k))^2+2G(M_1)}$

由引理知，存在 $\bar{G}>0$，使当 $G(d)>\bar{G}$ 时

$$H\leqslant l \tag{2.5}$$

由条件1°，存在 $N_3>0$，使当 $n\geqslant N_3$ 时，$G(x_n)>\bar{G}$。

取 $N_4=\max\{N_1,N_2,N_3\}$，$d=x_{N_4}$。则由条件1°，必存在 $a<0$，使

$$G(a)\geqslant(2\Delta+L_1)^2/2$$

式中，$L_1=\sqrt{(\sqrt{2G(x_{N_4})-2G(M_1)}-(\Delta+k))^2+2G(M_1)}$。由(2.3)及(2.5)式有 $F(d)=F(x_{N_4})\geqslant k+l\geqslant k+H$。故定理1的条件(2)、(3)满足。

类似地可证条件3°括号内的情况。证毕。

推论表明，定理1，2推广了文[4]定理7，从而推广了Драгилёв定理及文[3]的定理。推论条件是加在整个相平面上的，而定理1，2的条件可以只加在有界区域上，它不但去掉了 $G(\pm\infty)=+\infty$ 的限制，而且可以初步估计极限环的存在区域。

例 1 设在方程组(1.2)中

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{10(1+x^2)^2} & x\geqslant0\\[2ex] \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & x<0\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{1+x^2} & x\geqslant0\\[2ex] \dfrac{-3x^2-x}{1+10x^2} & x<0\end{cases}$$

如图2所示，本例中 $F(x)$ 在 $x=-0.135890$ 取得极大值 $F_{\max}=0.0679449$；在 $x=\sqrt{2}-1=0.414214$ 取得极小值 $F_{\min}=-0.207107$，且 $F(-1/3)=0$，$F(1)=0$。因此，取 $k=0$，$\Delta=0.21$，$a=-1$，$b=-1/3$，$c=1$，$d=3$，则由定理1容易验证，此时方程组(1.2)在带域 $-1<x<3$ 内至少存在一个稳定极限环。显然，推论的条件1°不满足。

例 2 若在上例中令 $g(x)=x$，当 $x\in(-\infty,+\infty)$，则取 $k=0.4$，$M=2$，由推论不难

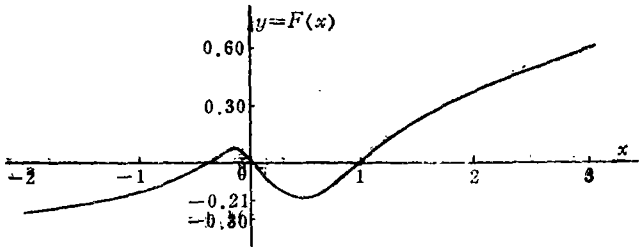

图 2

验证此时方程组(1.2)至少存在一个稳定极限环。

三、多个极限环的存在性

由于定理 1，2 的条件是加在有界区间上的，故很容易在此基础上给出方程组(1.2)存在多个极限环的充分条件。

为了便于叙述，定义指标集

$$\Lambda=\{1,2,\cdots,n\} \tag{3.1}$$

定理 3 若函数 $g(x)$，$F(x)$ 满足条件

(1) $xF(x)<0$，当 $x\neq0$ 且 $|x|$ 充分小；存在 $\Delta_i>0$ 及常数 k_i，a_i，b_i，c_i，d_i $(i\in\Lambda)$，且

$$a_n<b_n<a_{n-1}<b_{n-1}<\cdots<a_1<b_1<0<c_1<d_1<\cdots<c_n<d_n$$

$|k_i|\leqslant\Delta_i$，$\Delta_{i-1}\leqslant\Delta_i$，使

$$(-1)^{i+1}F(x)\geqslant-\Delta_i, \quad 当 x\in(0,c_i],\ i\in\Lambda$$
$$(-1)^{i+1}F(x)\geqslant(-1)^{i+1}k_i, \quad 当 x\in[c_i,d_i],\ i\in\Lambda$$
$$(-1)^{i}F(x)\geqslant(-1)^{i}k_i, \quad 当 x\in[a_i,b_i],\ i\in\Lambda$$
$$(-1)^{i}F(x)\geqslant-\Delta_i, \quad 当 x\in[b_i,0),\ i\in\Lambda$$

(2) $xg(x)>0$，当 $x\in[a_n,0)\cup(0,d_n]$，且对 $i\in\Lambda$ 有

$$G(a_i)\geqslant(2\Delta_i+L_i)^2/2,\quad G(b_i)\leqslant(2\Delta_i+L_i)^2/2$$

式中 $$L_i=\sqrt{N_i^2+2G(c_i)}$$

$$N_i=\begin{cases}0 & 当 \sqrt{2\sigma_i}+(-1)^ik_i\leqslant\Delta_i\\ \sqrt{2\sigma_i}+(-1)^ik_i-\Delta_i & 当 \sqrt{2\sigma_i}+(-1)^ik_i>\Delta_i\end{cases}$$

$$\sigma_i=G(d_i)-G(c_i)$$

(3) $(-1)^{i+1}F(d_i)\geqslant(-1)^{i+1}k_i+H_i$，$i\in\Lambda$

式中 $$H_i=\sqrt{\left(\sqrt{(2\Delta_i+E_i)^2-2G(c_i)}-\Delta_i+(-1)^ik_i\right)^2-2\sigma_i}$$

$$E_i=\begin{cases}\sqrt{2G(b_i)} & 当 G(b_i)\geqslant K_i\\ \sqrt{\left(\sqrt{(2\Delta_i+L_i)^2-2G(b_i)}-2(\Delta_i+(-1)^ik_i)\right)^2+2G(b_i)} & 当 G(b_i)<K_i\end{cases}$$

$$K_i=(2\Delta_i+L_i)^2/2-2(\Delta_i+(-1)^ik_i)^2$$

则方程组(1.2)在带域 $a_n<x\leqslant d_n$ 内至少存在 n 个极限环，且分别与区间 $[d_{i-1},d_i)$ $(i\in\Lambda)$ 相交（约定 $d_0=0$）。

证明 由条件(1)、(2)可知，(0,0)为方程组(1.2)在带域 $a_n<x<d_n$ 内的唯一奇点。令

$$I_i=(2\Delta_i+L_i)^2/2-(\Delta_i+(-1)^i k_i)^2/2 \qquad i\in\Lambda \tag{3.2}$$

考察闭曲线$\Gamma_{2j-1}=\widehat{A_1^{2j-1}A_2^{2j-1}\cdots A_{10}^{2j-1}A_1^{2j-1}}$如图3 所示（图中绘出$\sqrt{2\sigma_{2j-1}}-k_{2j-1}\leqslant\Delta_{2j-1}$及$K_{2j-1}\leqslant G(b_{2j-1})\leqslant I_{2j-1}$的情形）。$\Gamma_{2j-1}$上各弧段曲线为

$\widehat{A_1^{2j-1}A_2^{2j-1}}$：$\lambda(x,y,-k_{2j-1})=G(d_{2j-1})$

$\widehat{A_3^{2j-1}A_4^{2j-1}}$：$\lambda(x,y,\Delta_{2j-1})=L_{2j-1}^2/2$

$\widehat{A_4^{2j-1}A_5^{2j-1}}$：$\lambda(x,y,-\Delta_{2j-1})=(2\Delta_{2j-1}+L_{2j-1})^2/2$

$\widehat{A_5^{2j-1}A_6^{2j-1}}$：当$G(b_{2j-1})>I_{2j-1}$时，点$A_6^{2j-1}$与$A_5^{2j-1}$重合；当$G(b_{2j-1})\leqslant I_{2j-1}$时，

$$\lambda(x,y,-k_{2j-1})=(\Delta_{2j-1}-k_{2j-1}-\sqrt{(2\Delta_{2j-1}+L_{2j-1})^2-2G(b_{2j-1})})^2/2+G(b_{2j-1})$$

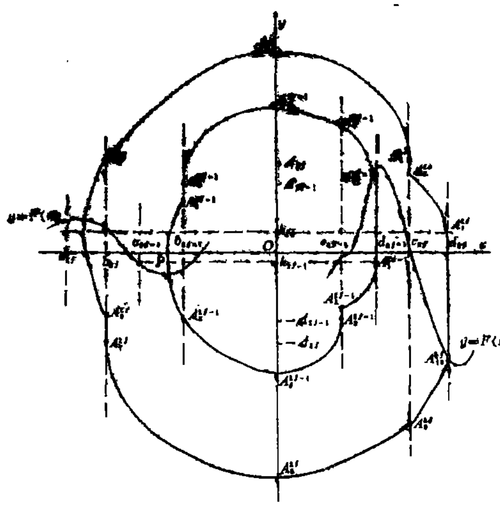

图 3

$\widehat{A_7^{2j-1}A_8^{2j-1}}$：$\lambda(x,y,-\Delta_{2j-1})=E_{2j-1}^2/2$

$\widehat{A_8^{2j-1}A_9^{2j-1}}$：$\lambda(x,y,\Delta_{2j-1})=(2\Delta_{2j-1}+E_{2j-1})^2/2$

$\widehat{A_9^{2j-1}A_{10}^{2j-1}}$：$\lambda(x,y,-k_{2j-1})=H_{2j-1}^2/2+G(d_{2j-1})$

$A_2^{2j-1}A_3^{2j-1}$，$A_6^{2j-1}A_7^{2j-1}$，$A_{10}^{2j-1}A_1^{2j-1}$均为直线段，$A_2^{2j-1}A_3^{2j-1}$当$\sqrt{2\sigma_{2j-1}}-k_{2j-1}>\Delta_{2j-1}$时退化为一点，$A_6^{2j-1}A_7^{2j-1}$当$G(b_{2j-1})<K_{2j-1}$时退化为一点。$\Gamma_{2j-1}$上各弧段分点的坐标为

$A_1^{2j-1}(d_{2j-1},\ k_{2j-1})$，$A_2^{2j-1}(c_{2j-1},k_{2j-1}-\sqrt{2\sigma_{2j-1}})$，$A_3^{2j-1}(c_{2j-1},-\Delta_{2j-1}-N_{2j-1})$，

$A_4^{2j-1}(0,-\Delta_{2j-1}-L_{2j-1})$，$A_5^{2j-1}(b_{2j-1},\Delta_{2j-1}-\sqrt{(2\Delta_{2j-1}+L_{2j-1})^2-2G(b_{2j-1})})$。

当$G(b_{2j-1})\leqslant I_{2j-1}$时，$A_6^{2j-1}(b_{2j-1},2k_{2j-1}-\Delta_{2j-1}+\sqrt{(2\Delta_{2j-1}+L_{2j-1})^2-2G(b_{2j-1})})$；

当$G(b_{2j-1})>I_{2j-1}$时，A_6^{2j-1}与A_5^{2j-1}重合。

当$G(b_{2j-1})\geqslant K_{2j-1}$时，$A_7^{2j-1}(b_{2j-1},\Delta_{2j-1})$；当$G(b_{2j-1})<K_{2j-1}$时，$A_7^{2j-1}$与$A_6^{2j-1}$重合。

$A_8^{2j-1}(0,\Delta_{2j-1}+E_{2j-1})$，$A_9^{2j-1}(c_{2j-1},\sqrt{(2\Delta_{2j-1}+E_{2j-1})^2-2G(c_{2j-1})}-\Delta_{2j-1})$，

$A_{10}^{2j-1}(d_{2j-1},k_{2j-1}+H_{2j-1})$。

类似于定理1的证明可知，在闭曲线Γ_{2j-1}上每一点出发的轨线，当t增加时恒穿入Γ_{2j-1}

的内部。

考察闭曲线 $\Gamma_{2j}=\overbrace{A_1^{2j}A_2^{2j}\cdots A_{10}^{2j}A_1^{2j}}$ 如图 3 所示（图中绘出$\sqrt{2\sigma_{2j}}+k_{2j}\leqslant\Delta_{2j}$ 及 $K_{2j}\leqslant G(b_{2j})\leqslant I_{2j}$ 的情形）。Γ_{2j} 上各弧段曲线为

$\overset{\frown}{A_1^{2j}A_2^{2j}}$：$\lambda(x,y,-k_{2j})=G(d_{2j})$

$\overset{\frown}{A_3^{2j}A_4^{2j}}$：$\lambda(x,y,-\Delta_{2j})=L_{2j}^2/2$

$\overset{\frown}{A_4^{2j}A_5^{2j}}$：$\lambda(x,y,\Delta_{2j})=(2\Delta_{2j}+L_{2j})^2/2$

$\overset{\frown}{A_5^{2j}A_6^{2j}}$：当$G(b_{2j})>I_{2j}$时，点$A_6^{2j}$与$A_5^{2j}$重合；当$G(b_{2j})\leqslant I_{2j}$时

$\lambda(x,y,-k_{2j})=(\Delta_{2j}+k_{2j}-\sqrt{(2\Delta_{2j}+L_{2j})^2-2G(b_{2j})})^2/2+G(b_{2j})$

$\overset{\frown}{A_7^{2j}A_8^{2j}}$：$\lambda(x,y,\Delta_{2j})=E_{2j}^2/2$

$\overset{\frown}{A_8^{2j}A_9^{2j}}$：$\lambda(x,y,-\Delta_{2j})=(2\Delta_{2j}+E_{2j})^2/2$

$\overset{\frown}{A_9^{2j}A_{10}^{2j}}$：$\lambda(x,y,-k_{2j})=H_{2j}^2/2+G(d_{2j})$

$A_2^{2j}A_3^{2j}$，$A_6^{2j}A_7^{2j}$，$A_{10}^{2j}A_1^{2j}$ 均为直线段，$A_2^{2j}A_3^{2j}$ 当 $\sqrt{2\sigma_{2j}}+k_{2j}>\Delta_{2j}$ 时退化为一点，$A_6^{2j}A_7^{2j}$当$G(b_{2j})<K_{2j}$时退化为一点。Γ_{2j}上各弧段分点的坐标为

$A_1^{2j}(d_{2j},k_{2j})$，$A_2^{2j}(c_{2j},\sqrt{2\sigma_{2j}}+k_{2j})$，$A_3^{2j}(c_{2j},\Delta_{2j}+N_{2j})$

$A_4^{2j}(0,\Delta_{2j}+L_{2j})$，$A_5^{2j}(b_{2j},\sqrt{(2\Delta_{2j}+L_{2j})^2-2G(b_{2j})}-\Delta_{2j})$

当 $G(b_{2j})\leqslant I_{2j}$时，$A_6^{2j}(b_{2j},2k_{2j}+\Delta_{2j}-\sqrt{(2\Delta_{2j}+L_{2j})^2-2G(b_{2j})})$；

当 $G(b_{2j})>I_{2j}$时，A_6^{2j}与A_5^{2j}重合。

当$G(b_{2j})\geqslant K_{2j}$时，$A_7^{2j}(b_{2j},-\Delta_{2j})$，当$G(b_{2j})<K_{2j}$时，$A_7^{2j}$与$A_6^{2j}$重合。

$A_8^{2j}(0,-\Delta_{2j}-E_{2j})$，$A_9^{2j}(c_{2j},\Delta_{2j}-\sqrt{(2\Delta_{2j}+E_{2j})^2-2G(c_{2j})})$，

$A_{10}^{2j}(d_{2j},k_{2j}-H_{2j})$。

类似于定理1的证明可知，在闭曲线Γ_{2j}上每一点出发的轨线，当t增加时均跑向其外部。

下面证明$\Gamma_{2j-1}\subset\Gamma_{2j}$。以$y_{2j}$，$y_{2j-1}$分别表示$\Gamma_{2j}$，$\Gamma_{2j-1}$上的点的纵坐标，分段进行讨论。

1．$x\in[c_{2j-1},d_{2j-1}]$，$y_{2j}\in\overset{\frown}{A_3^{2j}A_4^{2j}}$，$y_{2j-1}\in\overset{\frown}{A_9^{2j-1}A_{10}^{2j-1}}$。

由闭曲线Γ_{2j-1}及Γ_{2j}的构成可知

$$\left.\begin{aligned}&(y_{2j-1}-k_{2j-1})^2/2+G(x)=(y_{2j-1}(d_{2j-1})-k_{2j-1})^2/2+G(d_{2j-1})\\&(y_{2j}-\Delta_{2j})^2/2+G(x)=(y_{2j}(d_{2j-1})-\Delta_{2j})^2/2+G(d_{2j-1})\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

因 $y_{2j}(d_{2j-1})>y_{2j}(c_{2j})\geqslant\Delta_{2j}\geqslant y_{2j-1}(d_{2j-1})\geqslant\Delta_{2j-1}$，故由(3.3)式可得

$$\begin{aligned}&(y_{2j}-y_{2j-1})(y_{2j}+y_{2j-1}-2k_{2j-1})=(y_{2j}(d_{2j-1})-y_{2j-1}(d_{2j-1}))(y_{2j}(d_{2j-1})\\&\quad+y_{2j-1}(d_{2j-1})-2k_{2j-1})-2(\Delta_{2j}-k_{2j-1})(y_{2j}(d_{2j-1})-y_{2j})>0\end{aligned}$$

从而有 $y_{2j}>y_{2j-1}$。

2．$x\in[0,c_{2j-1}]$，$y_{2j}\in\overset{\frown}{A_3^{2j}A_4^{2j}}$，$y_{2j-1}\in\overset{\frown}{A_8^{2j-1}A_9^{2j-1}}$。

由闭曲线 Γ_{2j-1} 及 Γ_{2j} 的构成可知

$$\begin{cases}(y_{2j-1}+\Delta_{2j-1})^2/2+G(x)=(y_{2j-1}(c_{2j-1})+\Delta_{2j-1})^2/2+G(c_{2j-1})\\(y_{2j}-\Delta_{2j})^2/2+G(x)=(y_{2j}(c_{2j-1})-\Delta_{2j})^2/2+G(c_{2j-1})\end{cases}$$

由此可得

$$y_{2j}^2-y_{2j-1}^2=y_{2j}^2(c_{2j-1})-y_{2j-1}^2(c_{2j-1})-2\Delta_{2j}(y_{2j}(c_{2j-1})-y_{2j})$$
$$-2\Delta_{2j-1}(y_{2j-1}(c_{2j-1})-y_{2j-1})>0$$

从而有 $y_{2j}>y_{2j-1}$。

3. $x\in[e,0]$，$y_{2j}\in\widehat{A_4^{2j}A_5^{2j}}$，$y_{2j-1}\in\widehat{A_7^{2j-1}A_8^{2j-1}}\cup\widehat{PA_6^{2j-1}}$($P(e,k_{2j-1})$在闭曲线$\Gamma_{2j-1}$上如图3所示)。

由Γ_{2j-1}及Γ_{2j}的构成可知各弧段曲线的斜率为

$\widehat{A_7^{2j-1}A_8^{2j-1}}$：$y'=-g(x)/(y-\Delta_{2j-1})$

$\widehat{PA_6^{2j-1}}$：$y'=-g(x)/(y-k_{2j-1})$

$\widehat{A_4^{2j}A_5^{2j}}$：$y'=-g(x)/(y+\Delta_{2j})$

注意到 $y_{2j}(0)>y_{2j-1}(0)$，且

$$-g(x)/(y-\Delta_{2j-1})>-g(x)/(y+\Delta_{2j}),\quad 当x\in[b_{2j-1},0)$$
$$-g(x)/(y-k_{2j-1})\geqslant-g(x)/(y+\Delta_{2j}),\quad 当x\in[e,b_{2j-1}]$$

故由微分方程的比较定理可得 $y_{2j}>y_{2j-1}$。

4. $x\in[e,b_{2j-1}]$，$y_{2j}\in\widehat{A_7^{2j}A_8^{2j}}$，$y_{2j-1}\in\widehat{PA_5^{2j-1}}$。

由 Γ_{2j-1} 及 Γ_{2j} 的构成可知，此时 $G(b_{2j-1})\leqslant I_{2j-1}$，且

$$\left.\begin{aligned}&(y_{2j-1}-k_{2j-1})^2/2+G(x)=G(e)\\&(y_{2j}+\Delta_{2j})^2/2+G(x)=(y_{2j}(e)+\Delta_{2j})^2/2+G(e)\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

因 $y_{2j}(e)<y_{2j}(b_{2j})\leqslant-\Delta_{2j}\leqslant-\Delta_{2j-1}\leqslant-|k_{2j-1}|$，故由(3.4)式可得

$$(y_{2j}-y_{2j-1})(y_{2j}+y_{2j-1}-2k_{2j-1})=(y_{2j}(e)-k_{2j-1})^2+2(\Delta_{2j}+k_{2j-1})(y_{2j}(e)-y_{2j})>0$$

从而有 $y_{2j}<y_{2j-1}$。

5. $x\in[b_{2j-1},0]$，$y_{2j}\in\widehat{A_7^{2j}A_8^{2j}}$，$y_{2j-1}\in\widehat{A_4^{2j-1}A_6^{2j-1}}$。

由闭曲线 Γ_{2j-1} 及 Γ_{2j} 的构成可知

$$\left.\begin{aligned}&(y_{2j-1}-\Delta_{2j-1})^2/2+G(x)=(y_{2j-1}(b_{2j-1})-\Delta_{2j-1})^2/2+G(b_{2j-1})\\&(y_{2j}+\Delta_{2j})^2/2+G(x)=(y_{2j}(b_{2j-1})+\Delta_{2j})^2/2+G(b_{2j-1})\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

注意到当 $G(b_{2j-1})>I_{2j-1}$ 时，$|y_{2j-1}(b_{2j-1})|\leqslant\Delta_{2j-1}\leqslant\Delta_{2j}\leqslant|y_{2j}(b_{2j-1})|$；当 $G(b_{2j-1})\leqslant I_{2j-1}$时，由上一款的分析知$y_{2j}^2(b_{2j-1})-y_{2j-1}^2(b_{2j-1})>0$。因此，由(3.5)式可得

$$y_{2j}^2-y_{2j-1}^2=y_{2j}^2(b_{2j-1})-y_{2j-1}^2(b_{2j-1})+2\Delta_{2j}(y_{2j}(b_{2j-1})-y_{2j})$$
$$+2\Delta_{2j-1}(y_{2j-1}(b_{2j-1})-y_{2j-1})>0$$

从而有 $y_{2j}<y_{2j-1}$。

6. $x\in[0,d_{2j-1}]$，$y_{2j}\in\widehat{A_8^{2j}A_9^{2j}}$，$y_{2j-1}\in\widehat{A_3^{2j-1}A_4^{2j-1}}\cup\widehat{A_1^{2j-1}A_2^{2j-1}}$。

由 Γ_{2j-1} 及 Γ_{2j} 的构成可知各弧段曲线的斜率为

$\widehat{A_3^{2j-1}A_4^{2j-1}}$：$y'=-g(x)/(y+\Delta_{2j-1})$

$\widehat{A_1^{2j-1}A_2^{2j-1}}$：$y'=-g(x)/(y-k_{2j-1})$

$\widehat{A_8^{2j}A_9^{2j}}$：$y'=-g(x)/(y-\Delta_{2j})$

注意到 $y_{2j}(0)<y_{2j-1}(0)$，且

$$-g(x)/(y-\Delta_{2j})<-g(x)/(y+\Delta_{2j-1}),\quad 当x\in(0,c_{2j-1}]$$

$$-g(x)/(y-\Delta_{2j})\leqslant-g(x)/(y-k_{2j-1}),\quad 当x\in[c_{2j-1},d_{2j-1}]$$

故由微分方程的比较定理可得 $y_{2j}<y_{2j-1}$。

综上所述可知，Γ_{2j-1} 完全位于 Γ_{2j} 内部，即

$$\Gamma_{2j-1}\subset\Gamma_{2j} \tag{3.6}$$

再考察闭曲线Γ_0：$\lambda(x,y,0)=\varepsilon$（$\varepsilon>0$ 充分小）。由条件(1)、(2)可知在 Γ_0 上每一点出发的轨线当 t 增加时恒跑向其外部，且有$\Gamma_0\subset\Gamma_1$。因此，由 Poincaré-Bendixson 定理和方程组(1.2)在单闭曲线序列$\Gamma_0,\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n$ 中两两相邻的闭曲线 Γ_{i-1}，Γ_i（$i=\Lambda$）所围的区域内至少存在一个极限环与区间(d_{i-1},d_i)（$i\in\Lambda$）相交。证毕。

对应于定理 3，可有

定理 4 若函数 $g(x)$，$F(x)$满足条件

(1) 同定理3条件(1)；

(2) $xg(x)>0$，当$x\in[a_n,0)\cup(0,d_n]$，且对$i\in\Lambda$有

$$G(d_i)\geqslant(2\Delta_i+L_i)^2/2,\quad G(c_i)\leqslant(2\Delta_i+L_i)^2/2$$

式中
$$L_i=\sqrt{N_i^2+2G(b_i)}$$

$$N_i=\begin{cases}0 & 当\sqrt{2\sigma_i}+(-1)^{i+1}k_i\leqslant\Delta_i\\ \sqrt{2\sigma_i}+(-1)^{i+1}k_i-\Delta_i & 当\sqrt{2\sigma_i}+(-1)^{i+1}k_i>\Delta_i\end{cases}$$

$$\sigma_i=G(a_i)-G(b_i)$$

(3) $(-1)^iF(a_i)\geqslant(-1)^ik_i+H_i,\quad i\in\Lambda$

式中
$$H_i=\sqrt{(\sqrt{(2\Delta_i+E_i)^2-2G(b_i)}-(\Delta_i+(-1)^ik_i))^2-2\sigma_i}$$

$$E_i=\begin{cases}\sqrt{2G(c_i)} & 当 G(c_i)\geqslant K_i\\ \sqrt{(\sqrt{(2\Delta_i+L_i)^2-2G(c_i)}-2(\Delta_i-(-1)^ik_i))^2+2G(c_i)} & 当 G(c_i)<K_i\end{cases}$$

$$K_i=(2\Delta_i+L_i)^2/2-2(\Delta_i-(-1)^ik_i)^2$$

则方程组(1.2)在带域$a_n<x<d_n$内至少存在n个极限环，且分别与区间(a_{i-1},a_i)（$i\in\Lambda$）相交（约定$a_0=0$）。

显然，定理3，4加在$F(x)$上的条件既不要求$F(x)$是奇函数，也不要求 $F(x)$ “n重互相相容”或“n重互相包含”，且不要求$g(x)$是奇函数。此外，定理3，4还可以相互连结起来使用或相互交替起来使用。

例 3 设在方程组(1.2)中

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{(1+x^2)^2} & x\geqslant0\\ x & x<0\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}-e^x\sin x & x\geqslant0\\ -(x+3\sin x)/4 & x<0\end{cases}$$

显然，$(0,0)$是方程组(1.2)的唯一奇点。

当$x<0$时，$F(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=+\infty$；

当$x>0$时，$F'(x)=-e^x(\sin x+\cos x)$。

即$F(x)$在$x_i=i\pi-\pi/4(i=1,2,\cdots,n+1)$取极值，且

$$F(x_{2j-1})=(-\sqrt{2}/2)\exp[(2j-5/4)\pi],\quad F(x_{2j})=(\sqrt{2}/2)\exp[(2j-1/4)\pi].$$

取 $\Delta_i=(\sqrt{2}/2)\exp[(i+1/4)\pi]$，$h_i=(-1)^{i+1}\Delta_i$，$c_i=(i+1/4)\pi$，$d_i=(i+3/4)\pi$，$a_i=-\sqrt{2}\exp[(i+1/4)\pi]-1$，$b_i=-\sqrt{2}\exp[(i+1/4)\pi]$ $(i=1,2,\cdots,n)$。则由定理3容易验证方程组(1.2)在带域 $-\sqrt{2}\exp[(n+1/4)\pi]-1<x<n\pi+3\pi/4$ 内至少存在 n 个极限环，且分别与区间 $(0,7\pi/4)$ 及 $(i\pi-\pi/4,\ i\pi+3\pi/4)$ $(i=2,3,\cdots,n)$ 相交。从而方程组(1.2) 在整个相平面上存在无穷多个极限环。

注 1 本例中若 $g(x)=x$，当 $x\in(-\infty,\ +\infty)$，则只要取 $a_i=-\sqrt{2}\exp[(i+1/4)\pi]-(i+1/4)\pi-1$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 即可证明此时方程组(1.2)在整个相平面上存在无穷多个极限环。

注 2 本例中，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$F(x)>0$，且 $F(-\infty)=+\infty$。因此 $F(x)$ 显然不满足“n 重互相相容”或“n 重互相包含”的条件。

参 考 文 献

[1] 叶彦谦，《极限环论》，上海科学技术出版社（1984）.

[2] 张芷芬等，《微分方程定性理论》，科学出版社（1985）.

[3] 黄启昌、史希福，关于Liénard方程存在极限环的条件，科学通报，27，11 (1982)，645—646.

[4] 丁大正，Liénard方程极限环的存在性，应用数学学报，7，2 (1984)，166—174.

[5] Драгилёв А. В., Периодические решения дифференциального уравнения нелинейных колебаний, *ПММ*, **16** (1952), 85—88.

[6] 黄克成，微分方程 $dx/dt=h(y)-F(x)$，$dy/dt=-g(x)$ 极限环的存在性，数学学报，23，4 (1980)，483—490.

[7] 黄启昌、杨思认，关于具有交变阻尼的 Liénard 方程存在多个极限环的条件，东北师范大学学报，1 (1981)，11—19.

[8] Войлоков М. И., Достаточные условия существования ровно n предельных циклов y системы $dx/dt=y$, $dy/dt=F(y)-x$, *Мат. Сб.*, **44**, 86 (1958), 235—244.

[9] Neumann, D. A. and L. D. Sabbagh, Periodic solutions of Liénard systems, *J. Math. Anal. Appl.*, **62**, 1 (1978), 148—156.

[10] Comstock, C., On the limit cycles of $\ddot{y}+\eta F(\dot{y})+y=0$, *J. Diff. Eqs.*, 7—8 (1970), 173—179.

[11] 吴葵光，非线性极限环的存在性，数学学报，25，4 (1982)，456—463.

[12] Рычков, Г. С., Некоторые критерии наличия и отсутствия предельных циклов у динамической системы второго порядка, *Сибир. Мат. Журнат*, **7**, 6 (1966), 1425—1431.

[13] 张芷芬，关于一类非线性方程至少存在 n 个极限环的条件，北京大学学报，1 (1982)，34—43.

On the Existence of Limit Cycles of Liénard Equation

Huang An-ji Cao Deng-qing

(*Southwest Jiaotong University, Emei, Sichuan*)

Abstract

In this paper, we have proved several theorems which guarantee that the Liénard equation has at least one or n limit cycles without using the traditional assumption $G(\pm\infty)=+\infty$. Thus some results in [3～5] are extended. The limit cycles can be located by our theorems. Theorems 3 and 4 give sufficient conditions for the existence of n limit cycles, having no need of the conditions that the function $F(x)$ is odd or "nth order compatible with each other" or "nth order ontained in each other".