应用数学和力学，第11卷第2期(1990年2月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一种引力，电磁和自旋的非对偶统一场论*

余 粲

(中国科学院北京天文台，1989年2月1日收到)

摘 要

在Weyl，Eddington，Einstein和Schrödinger概念的框架中，经典统一场论常常不能令人信服，尤其找不到为什么Einstein-Maxwell(E-M)理论需要几何化的任何经验的理由。问题的关键并非是E-M理论是否完美，而是在经典意义下它能否回答现代的所有问题。特别是E-M理论不能提供一个经典理论框架，使Dirac方程能从其中导出，就象Schrödinger方程通过能量方程及对应原理从经典力学中导出一样。本文拟在这个如M.A. Tonnelat所提出的概念框架中，提出一种非对偶的统一场论(UFT)。我们将度量式$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$和非退化二次型$F=(1/2!)\cdot\varphi_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu$对称地引入理论，得到一种非对偶的统一场论。它包含了Einstein的广义相对论和狭义的Born-Infeld电动力学。尤其重要的是本文指出，采用对应原理，描述在"外部的"引力-电磁场中电子的Dirac方程，可以由非对偶Einstein方程通过简单因式分解导出。

一、引 言

为了明确定义时空概念，需要一个类似于Kelvin热力学温标一样的理想标准。E. A. Milne[1]曾通过在恒定光信号速度的基础上建立时空结构来提供这样的标准。在他之前，Eisenhart和Veblen(1922)[2]曾指出，连续体几何应建立在详细说明运动粒子和光脉冲连续径迹的基础上，而不应建立在Levi-Civita平行移动概念的基础上。就光是一种电磁现象而言，它(自然)被归入时空定义中。引力的存在也无法改变这一状况。因为由于引力和电磁相互作用产生的引力场"光线的弯曲(bending of light)"现象可以用描述时空几何的Einstein真空方程和零短程线$ds^2=0$来计算。重要的是，我们完全可以说，根据光锥比如电磁定义时空的因果关系，时空因果关系又决定时空的整体拓扑。此外，量子电动力学中对Maxwell方程"辐射改正"考虑的"真空极化"表明，时空和电磁之间有着密切的关系。所有这些观点逻辑地表明，正如引力是时空的表现形式，电磁也应是时空的一个特征。尽管没有详细地阐述，首先是Weyl，其后是Eddington，Einstein，Pauli和Schrödinger都坚信引力和电磁在美学角度上是一个宇宙场(UF)的两个不同方面，因此都曾至力于(经过半个多世纪的努力)我们现在所称的"经典"统一场论。经典统一场论与更现代的"超(super)"统一场论是不相同的。

* 本文原文为英文，吴承平译，王志忠校。

然而，由于Weyl等最初把他们的理论公式化的时候，还不知道后来才发现的弱核力和强核力，特别由于和获得巨大成功的量子电动力学（QED）以及最近提出的Yang-Mills-Salam-Weinberg型规范理论模型相比，这些经典统一场论一直毫无建树这一事实，因此人们常常对这一模式的见解甚至必要性提出疑问。然而，我们常常忘记构造经典场论的起因之一是"力"的概念的废除。因为根据Jeans[3]的观点，"Einstein理论取消'力'的概念，从而完全避免了不得不假设力是通过介质传递的还是超距作用的这个难题。这一通过介质作用还是超距作用的令人进退两难的问题确实导致了电磁理论中的大混乱。如果在引力理论中可以迴避这一难题，人们有理由希望电磁理论也应能避开它而建立起来。"然而，问题的关键并不是Einstein-Maxwell(E-M)理论是否完美，而是在这个经典意义下它能否回答现代的所有问题。可以举出很多例子证明，实际上E-M理论的结构是不完善的。例如，它不能容纳反对称的能量-动量张量(EMT)，而EMT的存在不仅已为Imbert效应[4]所证实，而且被De Groot和Suttorp[5]证明是较基本的原理。尤其是E-M理论不能提供一个理论框架，使Dirac方程能按Schrödinger方程通过能量方程及对应原理从经典力学中导出的方式从该框架中导出。有人认为量子理论可以代替经典场论，但是根据Niels Bohr的观点，量子理论本身需要经典场论加以解释，因而量子理论和经典场论在一定意义上是互为补充的，所以量子理论不能代替经典场论。鉴于Dirac理论在现代物理中的支配地位，经典统一场论必须满足的最低限度的要求就是它应与协变Dirac方程是"互补(complementary)"的。普通的Einstein-Maxwell-Dirac方程是从包含确定的场变量和概率波函数的拉格朗日函数导出的，因此从哲理上完全不能令人满意——除了众所周知与量子场论的分歧而外，它的导出本身也是一个难题。本文试图构造一个几何的统一场论，目的是使建立的Dirac理论作为时空几何的自然结果。为此，我们需要用时空结构原始构造单元旋量来塑造时空流形。

二、几 何 基 础

早在1932年，Einstin和Myer[6]就证明了，就Dirac理论而言，旋量必然构成任何相对论性协变理论的基本结构单元。大概正是这一观点促使人们最近试图把扭曲意义的时空点和时空曲率的概念公式化(例如Penrose和 Rindler[7])。实际上，由于电子的Dirac理论是现代物理的基础，因此有些作者，如A. Zakharov[8]和O. Klein[9]，就企图从Dirac方程的协变公式导出广义相对论.因此似乎统一场论的任何公式化都必定始于时空中旋量的嵌入.我们在这里强调旋量的嵌入，而不只是赋与时空M通常的"旋量结构"，因为切丛$T(M)$的这个结构群必须是$SL(2,c)$实表示的子群.用$SL(2,c)$我们就可以构造旋量群$SPIN(1,3)$.下面，我们来看一看这一丰富的时空结构可能包含的物理内容。

我们不妨把四维光滑微分流形M称作"时空流形"，它具有普通的微分结构和下文所规定的结构。在邻域U中点$x\in U\in M$处，我们赋予切空间$T_x(M)$一个Lorentz符号差的内积，并设

$$d\mathbf{x}=\omega^a\hat{e}_a,\qquad a=0,1,2,3 \tag{2.1}$$

为以正交活动标架$(\hat{e}_a)$(vierbein)为参考标架x点的无穷小切矢量。ω^a为实微分一次型，因此

$$ds^2=d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}=(\omega^0)^2-(\omega^1)^2-(\omega^2)^2-(\omega^3)^2 \tag{2.2}$$

四维切空间可以"复化"，它合理地变为二维复矢量空间，我们设$SL(2,c)$为这个(复)空

间的自同构。那么众所周知，$SL(2,c)$可以使度量(2.2)成为不变量，也可以使二重矢量

$$\xi\wedge\eta \tag{2.3}$$

成为不变量。其中ξ，η为二维复矢量，称为"初秩的旋量"。这时，我们说$SL(2,c)$有自己的"旋量表示"。同样地，$SL(2,c)$使复微分二次型

$$\Omega=\epsilon_{AB}\phi^A\wedge\psi^B,\qquad A=0,1;\ B=0,1 \tag{2.4}$$

成为不变量，从而二次型的值$\Omega(\xi\wedge\eta)$就定义两个旋量的反对称标量积。上式的$\epsilon_{AB}=-\epsilon_{BA}$称为度量旋量。我们特设

$$-2i\phi^A=\omega^A+i\omega^{A-2} \tag{2.5}$$

$$\psi^A=\omega^A-i\omega^{A-2} \tag{2.6}$$

其中$A=0,2$；$i=\sqrt{-1}$。则(2.4)成为

$$\Omega=\sum^1\phi^A\wedge\psi^A=\sum_{A=0}^1\omega^A\wedge\omega^{A+2}=\omega^0\wedge\omega^2+\omega^1\wedge\omega^3 \tag{2.7}$$

对于$T_x(M)$上的任意(自然)基，我们有

$$\omega^\alpha=T^\alpha_\beta dx^\beta,\qquad T^\alpha_\beta\in\mathscr{L}_4 \tag{2.8}$$

这里，$\mathscr{L}_4$是Lorentz群的4×4矩阵表示。所以(2.7)可以写为

$$\Omega=\frac{1}{2}\phi_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu \tag{2.9}$$

(2.9)是非退化微分二次型在$x\in U$处M的切线。显然，$SL(2,c)$的实表示同时使度量二次型(2.2)和辛二次型(2.9)成为不变量。因此(约化)切丛的结构群G为

$$G=\mathscr{L}_4\cap SP(4)\in SL(2,c) \tag{2.10}$$

其中$SP(4)$为辛群。考虑到我们是从时空流形的切空间$T_x(M)$中构造出旋量空间，因而与普通旋量结构（例如Bleecker[10]）截然不同的是，这个旋量直接参与形成时空流形。这里的旋量空间是一个与时空切丛不同的相伴矢量丛的（局部）切面。（目前探讨的纤维丛结构和Yang-Mills型规范理论纤维丛结构的区别，将在本文第十一节进一步说明。）既然可以在切空间中这样构造初秩旋量，显然也可以拓展到构造高秩旋量。加之Dirac双旋量可以按通常方式构造（例如Landau和Lifshitz[11]），双旋量空间又构成旋量群$SPIN(1,3)$的表示空间。事实上，与这个群相联系的是两个不变量，即

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.11}$$

和

$$\phi=\frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu \tag{2.12}$$

其中

$$g^{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu) \tag{2.13}$$

$$\Omega^{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu) \tag{2.14}$$

这里

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\lambda}=\delta^\nu_\lambda \tag{2.15}$$

$$\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\mu\lambda}=\delta^\nu_\lambda \tag{2.16}$$

并且γ^μ为时空的一般Dirac矩阵。本文统一场论的几何基础是集$[P(G,M),\ \Gamma]$，其中$P(G,$

M)为切丛的G结构(G由(2.10)给出)，Γ为其中定义的仿射联络。

三、场方程和 Palatini 原理

切空间$T_x(M)$上的旋量结构确定它的G结构，因而时空流形具有两个不变量形式$ds^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$和$\Omega=(1/2!)\phi_{\alpha\beta}dx^\alpha\wedge dx^\beta$。当联络一次型为$sl(2,c)$值($sl(2,c)$为$SL(2,c)$的李代数)，上二式的不变性分别是

$$\nabla_\lambda g_{\alpha\beta}=0 \tag{3.1}$$

和

$$\nabla_\lambda\phi_{\alpha\beta}=0 \tag{3.2}$$

其中∇_λ为对应的协变导数(根据$sl(2,c)$联络)。

我们用

$$F=\frac{1}{2!}F_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu\doteq{}^*\Omega \tag{3.3}$$

表示Ω的对偶，即

$$F_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\phi^{\rho\sigma}={}^*\phi_{\mu\nu} \tag{3.4}$$

并且作用密度

$$A=\int[\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}+\lambda\sqrt{\det(g_{\mu\nu}+F_{\mu\nu})}+\mu\sqrt{f}\,f^{\mu\nu}R_{\mu\nu}]d\tau \tag{3.5}$$

其中$R_{\mu\nu}=R^\rho{}_{\mu\nu\rho}$是从曲率二次型

$$\Omega^\alpha{}_\beta=R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu \tag{3.6}$$

导出的Ricci张量。$f^{\mu\nu}$为矩阵$F_{\mu\nu}$的逆，即

$$f^{\mu\alpha}F_{\nu\alpha}\overset{\text{def}}{=\!=}\delta^\mu_\nu \tag{3.7}$$

而
$$f=\det(F_{\mu\nu}) \tag{3.8}$$

在下文中，我们分别用$g^{\mu\nu}$和$g_{\mu\nu}$表示取上指标和下指标。

我们假定时空流形几何由(3.1)，(3.2)和作用原理

$$\delta A/\delta g^{\mu\nu}=0 \tag{3.9}$$

$$\delta A/\delta f^{\mu\nu}=0 \tag{3.10}$$

确定，其中Palatini意义上的哈密顿导数是人们熟知的。

在已经建立好的理论中，例如经典电动力学，其场方程叶经知道，不难倒回一步建立拉格朗日函数，从而通过作用原理导出场方程。而在一个新理论中，由它的定义而得的场方程事先并不知道，因此建立对应的拉格朗日函数基本上是一个不确定过程。因为对于变分处理新理论结构面临两个基本问题：(1)可以直接由试验验证的如象 Maxwell 方程是通常的场方程而不是拉格朗日函数，(2)对于预测任何一组现象，挑选的拉格朗日函数不一定是唯一的，例如可以给出多达三个完全不同的拉格朗日函数，通过同一个作用原理得出 Schwarzschild 解（参见Eddington[12]）。因此，上述拉格朗日函数(3.5)的选择，完全是由对称原理和简单性不确定原理决定的（之所以不确定是因为对一个作者似乎是简单的，对另一个作者却可能复杂得令人繁恼）。但是挑选的拉格朗日函数无疑是对称于变量$g_{\mu\nu}$和$F_{\mu\nu}$的。密度$\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$表示$g_{\mu\nu}$场与“宇宙场”（UF)$R_{\mu\nu}$的相互作用，因而它没有其宇宙场特征；同

样$\sqrt{f}\, f^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$表示$F_{\mu\nu}$场与宇宙场的相互作用。因为它们满足的场方程并不明显，所以我们还不能把它们当作“引力的”或“电磁的”。由于$g^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$等于零，因而不能表示$g_{\mu\nu}$和$F_{\mu\nu}$的相互作用；表示相互作用的另一个最简单的拉格朗日密度是

$$\sqrt{\det(g_{\mu\nu}+F_{\mu\nu})} \tag{3.11}$$

它类似于Eddington[12,13]的“世界构造的关键”。它在任何情况下都是Born-Infeld电动力学[14]的基础。

通过简捷的变换，作用原理(3.9)给出

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu}=0 \tag{3.12}$$

$$R_{(\mu\nu)}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\overset{*}{R}=\frac{\alpha}{L}\Big[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(G^2-1)+\Big(F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\Big)\Big] \tag{3.13}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\overset{*}{R}=g^{\alpha\beta}R_{(\alpha\beta)}, \quad L=\sqrt{1-G^2+\frac{1}{2}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}}\\ &\alpha=\text{const}, \quad G=\sqrt{-f/g}\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

同样，(3.10)给出

$$\nabla_\alpha F_{\mu\nu}=S_{\nu\alpha}{}^\sigma F_{\mu\sigma} \tag{3.15}$$

$$R_{[\mu\nu]}-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\hat{R}=\frac{\beta}{GL}(F^{\rho\sigma}-G^*F^{\rho\sigma})F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} \tag{3.16}$$

其中

$$\hat{R}=f^{\alpha\beta}R_{[\alpha\beta]}$$

且$S_{\nu\alpha}{}^\sigma$为扭转张量。考虑到(3.12)式恒等于(3.1)，因此它与Lorentz结构是协调的。如果满足等价原理，则时空流形几何由集{(3.2)，(3.12)，(3.13)，(3.15)，(3.16)}确定。作者在早先工作[15]中已经证明，度量性条件(3.12)和等价原理要求扭转张量必须满足反对称条件

$$S_{\lambda\mu\nu}=S_{[\lambda\mu\nu]} \tag{3.17}$$

这又意味着交错单位张量$t^{\mu\nu\rho\sigma}$协变恒定：

$$\nabla_\alpha t^{\mu\nu\rho\sigma}=0 \tag{3.18}$$

条件(3.17)指出，我们总可以找到一个四次型矢量h^λ，使

$$S_{\lambda\mu\nu}=t_{\lambda\mu\nu\rho}h^\rho;\quad S^{\lambda\mu\nu}=t^{\lambda\mu\nu\rho}h_\rho \tag{3.19}$$

将(3.19)代入(3.13)得(参见例如Yu[16])

$$\mathring{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R}=\frac{1}{2}\Big(h_\mu h_\nu-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}h_\alpha h^\alpha\Big)+\frac{\alpha}{L}\Big[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(1-G^2)+\Big(F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\Big)\Big] \tag{3.20}$$

其中$\mathring{R}_{\mu\nu}$由Levi-Givita联络单独定义。(3.16)式用$f^{\mu\nu}$缩并后还可以简化为

$$\hat{R}=\frac{2\beta}{GL}(2G^2-H) \tag{3.21}$$

其中

$$H=\frac{1}{2}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \tag{3.22}$$

又因 $\quad {}^*F^{\mu\nu}=Gf^{\mu\nu} \qquad (3.23)$

所以(3.16)成为

$$R_{[\mu\nu]}-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\mathring{R}=\frac{\beta}{GL}[F^3]_{\mu\nu}-\frac{BG}{L}F_{\mu\nu} \tag{3.24}$$

其中 $\quad F^3=F\cdot F\cdot F;\quad F=(F_{\mu\nu}) \qquad (3.25)$

将(3.21)代入(3.24)得

$$R_{[\mu\nu]}=\frac{\beta}{GL}[(F^3)_{\mu\nu}+(H-3G^2)F_{\mu\nu}] \tag{3.26}$$

考虑到(3.17)，(3.26)可以写为

$$\nabla_\rho S_{\mu\nu}{}^\rho=2\beta T_{[\mu\nu]} \tag{3.27}$$

其中

$$T_{[\mu\nu]}=(GL)^{-1}[(F^3)_{\mu\nu}+(H-3G^2)F_{\mu\nu}] \tag{3.28}$$

将(3.19)代入(3.27)进一步可得

$$-(\partial_\mu h_\nu-\partial_\nu h_\mu)=2\beta t_{\mu\nu\rho\sigma}T^{[\rho\sigma]} \tag{3.29}$$

为了下面便于物理解释，我们把(3.15)表示为

$$dF=0 \tag{3.30}$$

这里F由(3.3)给出. 在(3.15)式到(3.30)的推导中，利用了反对称条件(3.17).同理，考虑到(3.4)，条件(3.2)可以表示为

$$d{}^*F=J \tag{3.31}$$

其中

$$J=\frac{1}{2!}S_{\lambda\mu}{}^\rho F_{\rho\nu}dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu \tag{3.32}$$

四、物 理 解 释

本文统一场论的基本方程为集{(4.1),…,(4.4)}，即

$$\mathring{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R}=\frac{1}{2}\left(h_\mu h_\nu-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}h_\alpha h^\alpha\right)$$

$$+\frac{\alpha}{L}\left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(1-G^2)+\left(F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)\right] \tag{4.1}$$

$$\nabla_\rho S_{\mu\nu}{}^\rho=2\beta T_{[\mu\nu]};\quad T_{[\mu\nu]}=(GL)^{-1}[(F^3)_{\mu\nu}+(H-3G^2)F_{\mu\nu}] \tag{4.2a}$$

或 $\quad (\partial_\mu h_\nu-\partial_\nu h_\mu)=-2\beta t_{\mu\nu\rho\sigma}T^{[\rho\sigma]} \qquad (4.2b)$

$$dF=0\Rightarrow F=dA;\quad A=A_\alpha dx^\alpha \tag{4.3}$$

$$d{}^*F=J;\ J=\frac{1}{2!}S_{\lambda\mu}{}^\rho F_{\rho\nu}dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu \tag{4.4}$$

很清楚，只要给出适当的边界条件，上述方程组构成一个数学的闭系统，因为从中可以得出关于18个未知量 $\{g_{\mu\nu},\ h_\lambda,\ A_\mu\}$ 的18个耦合微分方程. 另外，没有赋予这18个场变量什么意义. 只有发现了它们遵循的规律之后，我们才能给各种符号定义. (4.3)和(4.4)式具有

Maxwell方程的形式，因此A_λ可以解释为电磁势，而J可以解释为流三次型（current 3-form）。如果$T_{[\mu\nu]}$解释为能量-动量张量(EMT)的反对称部分，则$S_{\mu\nu}{}^{\rho}$就可以解释为(内蕴(intrinsic))自旋角动量张量(SAMT)。这样，如同电磁场中的线圈转动感生了电流一样，我们可以说自旋感生电流。如果扭转解释为SAMT，则h^λ就具有动量四次型矢量的特性，显然它来自关系式(3.19)。因此(4.1)式右边含h^λ的二次项就可以解释为交叉的(intertial)(因而也是引力的)EMT。

考虑到在本文方法中，不能取$h^\lambda\to 0$从而得出Einstein-Maxwell方程的形式集，因为如果$h^\lambda=0$，则(4.2b)就给出

$$(F^3)_{\mu\nu}+(H-3G^2)F_{\mu\nu}=0$$

这在物理上是没有意义的。因此，如果存在电磁，扭转(因而还包括SAMT)不能为零。

五、“纯”引力场

为了进一步阐述h^λ的物理性质和辨别引力场（至今也没有要求$g_{\lambda\mu}$表示引力），我们假设没有电磁(即$F\to 0$)。在这种情况下我们有方程

$$\mathring{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R}=\frac{1}{2}\left(h_\mu h_\nu-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}h_\alpha h^\alpha\right)\frac{\alpha}{2}g_{\mu\nu} \tag{5.1}$$

$$\partial_\mu h_\nu-\partial_\nu h_\mu=0 \tag{5.2}$$

在星形区域中，方程(5.2)有两个解，即

$$h_\lambda=0 \tag{5.3}$$

和 $$h_\lambda=\partial_\lambda\mathring{\Omega};\quad \mathring{\Omega}=\text{标量} \tag{5.4}$$

在(5.3)情况下，方程(5.1)成为具有宇宙学恒量$-\alpha/2$的Einstein 方程（在“真空”中)。虽然此方程

$$\mathring{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R}=\frac{1}{2}\alpha g_{\mu\nu}\qquad(\alpha\text{为小量}) \tag{5.5}$$

正确预测了“三个经典实验”，但它也给出了De Sitter 静宇宙论；而今天我们知道这个理论是不成立的。因此我们有解(5.4)，则(5.1)变为

$$\mathring{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\mathring{\Omega}\partial_\nu\mathring{\Omega}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha\mathring{\Omega}\partial^\alpha\mathring{\Omega}\right)+\frac{\alpha}{2}g_{\mu\nu} \tag{5.6}$$

(5.6)式取散度得

$$\mathring{\Box}\mathring{\Omega}=0 \tag{5.7}$$

这里，$\mathring{\Box}$为Levi-Civita联络定义的达朗贝尔算子。

如果忽略宇宙学项，方程(5.6)在各向同性坐标系中给出一个特解

$$ds^2=\exp[-2\mathring{\Omega}]dt^2-\exp[2\mathring{\Omega}](dx^2+dy^2+dz^2) \tag{5.8}$$

而在同一坐标系中，(5.7)给出非零解

$$\mathring{\Omega}=M/r;\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{5.9}$$

因此，在一定意义上，如果$\mathring{\Omega}$取为“引力势”，那么(5.8)和(5.9)就是在球对称（中性)体外的静引力场的解。因为这些解给出

$$\mathring{g}_{00}=1-\frac{2M}{r}+\frac{2M^2}{r^2}-\cdots \tag{5.10}$$

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1+\frac{2M}{r}+\cdots \tag{5.11}$$

因为实验粒子按照所设的等价原理在短程线上移动，就上述解的精度阶，我们又得到了广义相对论的所有“三个经典实验”．在某种意义上，因为结果相同，我们是否把$\mathring{\Omega}$或$g_{\mu\nu}$称为引力场都没有关系．但是$\mathring{\Omega}$一经命名为引力势，(5.7)就成了四维空间牛顿势的直接推广．这一解释使

$$\mathring{G}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\mathring{\Omega}\partial_\nu\mathring{\Omega}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha\mathring{\Omega}\partial^\alpha\mathring{\Omega}\right) \tag{5.12}$$

成了引力能量-动量张量．在(4.1)式中出现的它的更一般的形式

$$G_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(h_\mu h_\nu-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}h_\alpha h^\alpha\right) \tag{5.13}$$

称为“惯性能量-动量张量”．

这说明引力和惯性是同一问题的两个不同方面．(5.6)式左边的Einstein张量可以称为（根据Zeldovich的命名）时空的弹性能量-动量张量．因此可以认为(5.6)和(4.1)是能量-动量平衡方程（如象Bernoulli方程在磁流体动力学中的模拟），由它可以导出运动方程．

六、$\mathring{\Omega}$-场宇宙论

如果本文理论看作是尺度无约束（scale free）的，那么它原则上可以适用于宇宙中从最小到最大的所有系统．另一方面，如果只把它看作是Eddington[13]定义意义下的“摩尔理论”，那么它必须由(4.1)～(4.4)式通过某一适当的平均过程导出对应的宏观方程，才能应用于宏观系统．

本文中仅认为该理论是尺度无约束的，并特别考查宇宙论的$\mathring{\Omega}$场可能有什么内容．我们已经注意到方程(5.2)有两个解，其中一个对应于$\partial_\lambda\mathring{\Omega}=0$，另一个对应于$\partial_\lambda\mathring{\Omega}\neq0$．前一个解给出De Sitter的静宇宙论，今天它仅有学术兴趣的价值．因此我们在这里将简要考查的是对应于$\partial_\lambda\mathring{\Omega}\neq0$情况的宇宙论．

Weyl的假定和宇宙学的原理要求时空度量取Robertson-Walker(R-W)形式

$$ds^2=c^2dt^2-a(t)\left[\frac{dr^2}{1-\kappa r^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\right] \tag{6.1}$$

为了使方程(5.6)和R-W度量协调，$\partial_\lambda\mathring{\Omega}$必须取为（据Yu[16]）

$$\partial_\lambda\mathring{\Omega}=\frac{\partial\mathring{\Omega}(t)}{\partial t}u_\lambda \tag{6.2}$$

其中u^λ为时空流体的四次型速度矢量．

为了描述大爆炸模型，我们假定$\mathring{\Omega}$-场源具有Dirac δ函数的形式(Yu[23])，并且不难说明，采用度量(6.1)的方程(5.6)的解（当$\kappa=0$，$\alpha=0$）具有如下形式

$$a=a_0(1+Bt)^{\frac{1}{3}} \tag{6.3}$$

其中B为正常数．这充分说明，本文理论给出一个没有奇异性（singularity-free）的宇宙论，同时它又描述了可能发生的宇宙的膨胀．

七、星球的引力辐射

在 $\partial_\lambda\mathring{\Omega}=0$ 的情况，对于球对称引力体以外的“净空（empty）”空间，我们通常有 Schwarzschild 解。Birkhoff 又把解的有效性扩展到辐射状脉动的天体的情况。它包括球状恒星外向爆炸和内向爆炸的情况，这种星球虽有辐射运动但不发射引力辐射。我们将考查 $\partial_\lambda\mathring{\Omega}\neq 0$时辐射状脉动天体的情况。

我们特别考虑当

$$\partial_\lambda\mathring{\Omega}=(\partial\mathring{\Omega}/\partial t)k_\lambda \tag{7.1}$$

的情况，这里k_λ为满足几何光学条件 $k_\alpha k^\alpha=0$ 的四次型零矢量。如果忽略宇宙学项，对于引力物体以外的点，方程(6.1)变为

$$\mathring{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathring{\Omega}}{\partial t}\right)^2 k_\mu k_\nu \tag{7.2}$$

显然$(\partial\mathring{\Omega}/\partial t)^2/2$为观测者以四次型速度$U^a$移动时，局部量测到的引力辐射能量密度。在辐射带，$\mathring{\Omega}$满足调和方程

$$\mathring{\Box}\mathring{\Omega}=0 \tag{7.3}$$

Vaidya[17]给出了 Schwarzschild 坐标中，球对称情况下方程(7.2)的通解

$$ds^2=\left[\frac{\dot{M}}{f(M)}\right]^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi) \tag{7.4}$$

其中$M(r,t)$为任意函数，且

$$f(M)=\frac{\partial M}{\partial r}\left(1-\frac{2M}{r}\right);\ \dot{M}=\frac{\partial M}{\partial t} \tag{7.5}$$

由{(7.2)，(7.4)}得

$$\frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{M'}{\dot{M}}\right)^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\partial\mathring{\Omega}}{\partial t}\right)^2,\quad M'=\frac{\partial M}{\partial r} \tag{7.6}$$

由{(7.3)，(7.4)}得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{M'}{\dot{M}}\right)\frac{\partial\mathring{\Omega}}{\partial t}\right]-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{\dot{M}}{M'}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right]=0 \tag{7.7}$$

在上述方程求导中，我们利用了“拖带”坐标系；然而由于辐射，粒子不一定沿着短程轨道移动，因而我们通常没有$g_{00}=1$。不过我们总有$u^a=(-g_{00})^{-1/2}\partial_t$使(7.6)和(7.7)成立。

对“渐近平展(asymptotically flat)”即$M/r\to 0$的情况，我们可以得到方程组{(7.6)，(7.7)}的近似解。其解为

$$M(r,t)=M_0\exp[2i\omega(r-t)];\ M_0=\text{const} \tag{7.8}$$

$$\mathring{\Omega}(r,t)=\sqrt{\frac{8iM_0}{\omega}}\ \frac{\exp[i\omega(r-t)]}{r} \tag{7.9}$$

其中，只有解的实部有物理意义。

考虑到在 Vaidya 的论文中，“辐射星”的辐射源和辐射性无法确定，当然正如 Carmeli[18]所表明，辐射星决不会有电磁源；本文用一个额外的方程（方程（7.7））解开了这个谜。与 Birkhoff 的结果相反，$\partial_\lambda\mathring{\Omega}\neq 0$ 的情况表明辐射状脉动的星体不辐射引力能量。这主要是由于“净空”空间引力能量-动量张量的存在。但是由于存在引力场，有质体以外

的空间实际上并不"空"，因此我们不会有$T_{(\mu\nu)}=0$，而

$$\mathring{R}_{\mu\nu}=0 \tag{7.10}$$

的说法实际上没有物理意义。根据 Mach 原理，只有在有"东西"即有质的区域里时空才有意义，反之则没有意义。因为如果没有任何东西（即在 Buddistic 真空中），时空就不可能有意义，事实上就没有时空，而象$\mathring{R}_{\mu\nu}$之类的量只能是恒等于零。

八、Dirac 方程的推导

在某种意义上说，可以认为 Schrödinger 波动方程是从经典力学的能量平衡方程通过对应规定"导出"的：

$$P_i\to\nabla_i \qquad i=1,\ 2,\ 3 \tag{8.1}$$
$$E\to\partial/\partial t$$

这里P_i为动量矢量，∇_i为一线性微分算子，E为系统的能量。因此可以预计先导出的能量-动量平衡方程(EEMB)通过类似的规定也应可以导出 Dirac 方程(DE)。因此我们令它写为如下形式：

$$\mathring{R}_{\mu\nu}=\frac{1}{2m}P_\mu P_\nu-\frac{\alpha}{2L}(1-G^2)g_{\mu\nu}-E_{\mu\nu} \tag{8.2}$$

其中
$$E_{\mu\nu}=\frac{\alpha}{L}\left(F_{\mu\rho}F_\nu{}^\rho-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{8.3}$$

在(8.2)中我们令

$$\sqrt{m}\,h_\mu=P_\mu \tag{8.4}$$

这里m为质量参数，P_μ可称作广义动量的四次型矢量。

将$P_\mu=p_\mu-eA_\mu$代入(8.2)再乘以$\gamma^\mu\gamma^\nu$得

$$\gamma^\mu\gamma^\nu(p_\mu-eA_\mu)(p_\nu-eA_\nu)-2m\gamma^\mu\gamma^\nu\left[\mathring{R}_{\mu\nu}+\frac{\alpha}{2L}(1-G^2)g_{\mu\nu}-E_{\mu\nu}\right]=0 \tag{8.5}$$

其中γ^μ为第二节中介绍的 Dirac 矩阵，p_μ为惯性的四次型动量。能量-动量平衡方程(8.5)对应于波动方程

$$\left\{\gamma^\mu\gamma^\nu(p_\mu-eA_\mu)(p_\nu-eA_\nu)-2m\gamma^\mu\gamma^\nu\left[\mathring{R}_{\mu\nu}+\frac{\alpha}{2L}(1-G^2)g_{\mu\nu}-E_{\mu\nu}\right]\right\}\psi=0 \tag{8.6}$$

其中ψ为 Dirac 双旋量。考虑到(2.13)和(2.14)我们可取

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^\nu&=\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\mu\gamma^\nu)+\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\mu\gamma^\nu)\\&=g^{\mu\nu}+\Omega^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{8.7}$$

把它代入(8.5)得

$$\left[(p-eA)^2-m^2-\frac{1}{2}eF_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu}\right]\psi=0 \tag{8.8}$$

根据 Landau 和 Lifshitz[11]，

$$\Omega^{\mu\nu}=(\vec{\alpha},\ i\vec{\Sigma}),\quad F^{\mu\nu}=(-\vec{E},\vec{H}) \tag{8.9}$$

因此(8.8)也可写为

$$[(p-eA)^2-m^2+e\vec{\Sigma}\cdot\vec{H}-ie\vec{\alpha}\cdot\vec{E}]\psi=0 \tag{8.10}$$

其中内蕴自旋的项现在我们弄清楚了．这是在“外”场（$-\vec{E},\vec{H}$）中（参见[11]），质量为m，电荷为e的电子运动的二阶 Dirac 方程。总之，我们可以将(8.8)式分解因式得到

$$[\gamma^\mu(p_\mu-eA_\mu)+m][\gamma^\nu(p_\nu-eA_\nu)-m]\psi=0 \tag{8.11}$$

(8.11)是 Dirac 方程存在的充分条件

$$[\gamma^\nu(p_\nu-eA_\nu)-m]\psi=0 \tag{8.12}$$

因为(8.12)在时空中是有效的，我们本该令

$$p_\nu=\mathring{\nabla}_\nu \tag{8.13}$$

Dirac 方程一经建立，就很容易证明（参见 Gurtler 和 Hestenes[19]）整个量子力学就能够建立起来了．

本文统一场论能够提供使 Dirac 方程得以建立的理论框架，表明这是一条正确的途径。

九、纯引力场的宏观方程

只要本文理论是 Eddington 意义上的“摩尔理论”，对应的宏观理论根据该系统的原子和分子结构，就需要一个适当平均的过程．中性有质体在纯引力场中运动的情况下，这个问题大大地简化了。根据 Synge[20]的观点，有质体的能量-动量张量可以简单定义为

$$T_{(\mu\nu)}=\int\nu(x,p)m^{-1}p_\mu p_\nu dp \tag{9.1}$$

其中，$p_\mu(m^2=-p_\alpha p^\alpha)$表示某一形式的“冲量(impulse)”，$\nu(x,p)$为加权函数，使

$$\int\nu(x,p)dp=1 \tag{9.2}$$

应用上述原理于摩尔方程

$$\mathring{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\mathring{\Omega}\partial_\nu\mathring{\Omega}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha\mathring{\Omega},\partial^\alpha\mathring{\Omega}\right) \tag{9.3}$$

只要令$\partial_\mu\mathring{\Omega}=\sqrt{\rho}\,p_\mu$，我们立刻重又得出宏观物体运动的 Einstein 方程。我们注意到方程

$$\mathring{\Box}\mathring{\Omega}=0 \tag{9.4}$$

现在变为连续体方程

$$\mathring{\nabla}_\lambda p^\lambda=0 \tag{9.5}$$

然而对于有质体外的区域，方程(9.3)和(9.4)仍然成立。这是对 Einstein 理论的主要改变。

应用本文理论于双子脉冲星的引力辐射时，与之相关的正是有质体运动的宏观方程，在这一点上本文理论与观测相符的程度与 Einstein 理论相同。

Einstein 本希望广义相对论（TGR）能以某种方式反映 Mach 原理；但是一些作者认为 TGR 是反 Mach 原理的，因此这一问题仍然悬而未决。本文理论无庸置疑反映了 Mach 原理，因为例如局部粒子系统的能量-动量张量((9.1)中用$T_{(\mu\nu)}$表示)就取决于(9.1)式右边表示的整个宇宙的惯性（引力）场。

十、场方程的简化

目前我们还不清楚本文统一场论的基本方程是否存在简单解，也不清楚它能够怎样应用

于什么样的物理系统。但是如果我们用另一不同的形式将它写出，就可以了解它的某些一般特征。该基本方程为

$$\mathring{R}^{\lambda}{}_{\beta}=\frac{1}{2}h^{\lambda}h_{\beta}-\frac{\alpha}{2L}(1-G^2)\delta^{\lambda}_{\beta}+\frac{\alpha}{L}\left(F^{\lambda}{}_{\rho}F_{\beta}{}^{\rho}-\frac{1}{4}\delta^{\lambda}_{\beta}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right) \tag{10.1}$$

$$\mathring{\nabla}_{\nu}F^{\mu\nu}=J^{\mu};\quad F_{\mu\nu}=-(\mathring{\nabla}_{\mu}A_{\nu}-\mathring{\nabla}_{\nu}A_{\mu}) \tag{10.2}$$

其中

$$J^{\mu}=\frac{1}{2}S_{\rho\sigma}{}^{\mu}F^{\rho\sigma}=\frac{1}{2}t_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu}h_{\nu}F^{\rho\sigma} \tag{10.3}$$

$$\mathring{\nabla}_{\mu}h_{\nu}-\mathring{\nabla}_{\nu}h_{\mu}=-2\beta t_{\mu\nu\rho\sigma}T^{[\rho\sigma]} \tag{10.4}$$

其中

$$T_{[\mu\nu]}=(GL)^{-1}[(F^3)_{\mu\nu}+(F-3G^2)F_{\mu\nu}] \tag{10.5}$$

(10.2) (和(10.3)) 经标准计算得

$$\mathring{\Box}A^{\lambda}=A^{\beta}\mathring{R}^{\lambda}{}_{\beta}+\frac{1}{2}t_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu}h_{\nu}F^{\rho\sigma};\quad \nabla_{\mu}A^{\mu}=0 \tag{10.6}$$

同样，(10.4)给出

$$\mathring{\Box}h^{\lambda}=h^{\beta}\mathring{R}^{\lambda}{}_{\beta}+2\beta\mathring{\nabla}_{\nu}(t^{\alpha\beta\lambda\nu}T_{[\alpha\beta]})+\mathring{\nabla}^{\lambda}(\mathring{\nabla}_{\mu}h^{\mu}) \tag{10.7}$$

因此方程组{(10.1)，(10.5)，(10.6)，(10.7)}等价于方程组{(10.8)，(10.9)}，

$$\mathring{\Box}h^{\lambda}=f^{\lambda}(h^{\mu},\ A^{\mu}) \tag{10.8}$$

$$\mathring{\Box}A^{\lambda}=g^{\lambda}(h^{\mu},\ A^{\mu}) \tag{10.9}$$

首先，集{(10.8)，(10.9)}由两个对偶的非线性波动方程组成，它们源于引力（惯性）、电磁和自旋相互作用的结果。其次，(10.8)的符号解法表明，局部惯性场（并且还有自旋）不仅仅取决于宇宙静止时的惯性场而且取决于其它一些相互作用。此外，这一惯性场是传播的(propagated)。作为本文理论的关联，我们仅须引证 W. Rindler[21]，“Einstein 在他建立广义相对论的某一阶段，曾推测牛顿的平方反比理论与完整引力理论的差别，大概和基于库仑定律的简单电理论与 Maxwell 的终极（ultimate）理论的差别一样大。实际上，D. W. Sciama 在1953年复兴并扩展了F. Tisserand 1872年的 Maxwell 型引力理论，并发现它大大包括了 Mach 原理：相应于宇宙引力‘辐射场’的惯性力正比于距离的逆一次幂。但可惜的是这一理论又违反了相对论。” 本文统一场论保持了 Sciama 理论的长处 摒弃了 其缺陷。

十一、Weyl-Eddington-Einstein (WEE) 的统一场论概念

考虑到更流行的基于 Kaluza-Klein-Yang-Mills (KKYM) 粒子物理概念的“宏伟而超级的统一场论”，这里有必要弄清楚它与经典的 WEE 统一场论概念的基本区别。

WEE 统一场论概念规定，在这一方案中只有一个时空流形的宇宙场，根据定义该场为时空曲率（而不是粒子物理中定义某些“粒子”的矢量丛的曲率），不同的力例如引力和电磁仅是这一宇宙场的不同方面。用纤维丛的术语，系统阐述如下。

宇宙场的一个“方面”的内容是曲率张量（或曲率二次型）必须服从的特殊对称性（所考虑的特殊场的特征）。例如与引力联系的对称性取决于群 $SO(1,3)$，而与电磁联系的对称性取决于 $SP(4)$。通过 Ambrose 和 Singer 的完整性定理（Holonomy Theorem）（参见

Kobayashi 等[22])，时空流形的曲率二次型复盖dG的子代数，即 PFB 的结构群G的李代数．因此，根据 WEE 的经典统一场论概念，由$\Omega_p(X,Y)$即切矢量$X,Y\in T_p(M)$在$p\in U\in M$的曲率二次型构成的代数必然是$so(1,3)\cap sp(4)$的子代数，其中$so(1,3)$是$SO(1,3)$的李代数，$sp(4)$是$SP(4)$的李代数．象征地，曲率二次型

$$\Omega^{\alpha}_{\beta}=\frac{1}{2}R_{\mu\nu\beta}{}^{\alpha}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu} \tag{11.1}$$

必须同时满足

$$\Omega^{\alpha}_{\beta}+\Omega^{\beta}_{\alpha}=0 \tag{11.2}$$

和

$$\mathring{\phi}_{\mu\alpha}\Omega^{\alpha}_{\nu}-\mathring{\phi}_{\nu\alpha}\Omega^{\alpha}_{\mu}=0 \tag{11.3}$$

其中$\mathring{\phi}_{\mu\alpha}$为根据准正交基

$$\frac{1}{2!}\mathring{\phi}_{\mu\alpha}\omega^{\mu}\wedge\omega^{\alpha}=\frac{1}{2!}\phi_{\mu\nu}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu} \tag{11.4}$$

给出的$\phi_{\mu\nu}$的值．也就是说，除了$\Omega_p(X,Y)$可能必须满足无论什么“场方程”外，它还必须服从上述的对称性限制．换句话说，统一场论的基础必须是反映所考虑的不同场的对称性的G-结构（对于切丛$T(M)$)．然而到现在为止的论证大概只能算是一个启发，因为根据李氏的基本定理，每一个李代数都只对应一个局部的李群（到目前为止，整体问题似乎仍未得到解决)，而G-结构很显然是与示性类关联的整体问题．不过G-结构的最终选择对旋量必定也是十分重要的．

综上所述应取$G=SU(2)$．它的实表示给出$SU(2)=SO(4)\cap SP(4)$，而它的复表示给出一类原始旋量．因为，对每一$g\in SU(2)$在它的旋量表示中我们有

$$g=\exp[\omega_i T^i];\qquad i=1,\ 2,\ 3;\ \omega_i\text{为所有实数} \tag{11.5}$$

和

$$T^1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix},\ T^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ T^3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix} \tag{11.6}$$

于是

$$\mathring{g}=\exp[\mathring{\omega}_i T^i]\in SL(2,c) \tag{11.7}$$

其中$\mathring{\omega}_i$为所有复数．此外 Dirac 电子的$SPIN(4)$群可由$SL(2,c)$塑造．在这一意义上，$SU(2)$可以认为是所有旋量群中最基本的．

于是我们可以在切空间$T_p(M)$通过复化构造双旋量$\psi=\begin{pmatrix}\chi\\ \phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix}$．它由

$$\psi'_A(P)=U^B_A(P)\psi_B(P);\qquad A,\ B=1,2 \tag{11.8}$$

定义，其中

$$U^B_A(P)=\delta^B_A+\frac{1}{2}\Omega^B_{A\mu\nu}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}=\delta^B_A+\omega^k(T_k)^B_A \tag{11.9}$$

其中，用正交标架表示时(11.6)给出的$T_k=T^k$是系数ω^k决定的$SU(2)$或$SL(2,c)$的生成元．当ω^k为实数时，ψ_A为 Pauli 旋量，而当ω^k为复数时，ψ_A为 Diraç 旋量χ_A，ϕ_A，因而 Dirac “双旋量”由$(\chi_A,\phi_A)^T$给出．

当$U=(U^\alpha_\beta)$为构成$SU(2)$实表示的4×4矩阵时，对应的ψ_λ恰好是$T_p(M)$上的四次型矢量．

另一方面，KKYM 构架的几何基础建立在“丛拼接 (bundle splicing)”的概念上（参

见 Bleecker[10])。它基于由结构群$G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$"拼接的" PFB，而每一个$G_i$都是描述各自场的对称群的，从而

$$A_\mu=A_\mu^1\otimes I^1+A_\mu^2\otimes I^2+\cdots+A_\mu^n\otimes I^n \tag{11.10}$$

给出估价 (valued) 联络的最终李代数，其中A_μ^i为关联dG_i的联络1-型，I^i为单位矩阵，且$I^i\in dG_i$。全曲率或"场强"为

$$F_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}^1\otimes I^1+F_{\mu\nu}^2\otimes I^2+\cdots+F_{\mu\nu}^n\otimes I^n \tag{11.11}$$

其中$F^i=DA^i$。并且要求每一个场强满足自身的场方程集。这样的程序相当于总和分离场，它不完全在 WEE 统一场论的概念内。

尽管有这两个概念的差异，但本文统一场论仍然包括了 Yang-Mills 场。因为曲率二次型由(11.9)式中的$SU(2)$联络表示，式中对应的$SU(2)$又具有自己的旋量表示，这时根据定义它正是 Yang-Mills 场，因为它满足 Bianchi 恒等式

$$D\Omega=0 \tag{11.12}$$

Yang-Mills 流3-型J定义为

$$D^*\Omega=J \tag{11.13}$$

这一 Yang-Mills 场与在弯曲时空（参见 Bleecker[10]）的标准 Yang-Mills 理论场的差别在于，后者的时空曲率是不改变的（它的结构群始终是洛伦兹的），而前者的时空曲率完全是变化的，这是因为（约化）切丛的结构群是$SU(2)$。此外，本文的 Yang-Mills 场是（复场）时空曲率本身，而通常的 Yang-Mills 场是根据某些矢量丛（不同于切丛）中的联络定义的。由{(4.1)…(4.4)}基本方程集表示时空曲率、引力、惯性和电磁之间的内在联系，我们可以说，所有这些场都统一在 Yang-Mills 场中。

感谢：作者衷心感谢 N. Trudinger 和 R. Bartnik 教授的殷勤好客和 CMA 的同事们在本文完成过程中有益的讨论，这些讨论大大加快了本文的完成。感谢 Marilyn Gray，Dorothy Nach 和 Ann Milligan 小姐的协助。

参 考 文 献

[1] Milne, E. A., *Relativity, Gravitation and World Structure*, Oxford (1935).

[2] Eisenhart, L. P. and O. Veblen, The Riemann geometry and its generalization, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **8** (1922), 19.

[3] Jeans, J. H., *Mathematical Treatise on Electricity and Magnetism*, Cambridge (1925).

[4] Imbert, C., *Phys. Rev.*, **D5** (1972), 787.

[5] De Groot, S. R. and L. G. Suttorp, *Foundations of Electrodynamics*, North Holland, Amsterdam (1972).

[6] Einstein, A. and W. Mayer, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* (1931), 541.

[7] Penrose, R. and W. Rindler, *Spinors and Spacetime*, Vols. I & II, C. U. P. (1984).

[8] Zakharov, A., *Doklady Acad. Nauk. SSR*, **177** (1967), 70.

[9] Klein, D., *Nucl. Phys.*, **B21** (1970), 153.

[10] Bleecker, D., *Variational Principles and Gauge Theory*, W. A. Benjamin (1982).

[11] Berestetskii, V. B., E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Quantum Electrody-*

namics, Pergamon, Oxford (1975).

[12] Eddington, A. S., *Mathematical Treatise on General Relativity*, C. U. P.(1957).

[13] Eddington, A. S., *Fundamental Theory*, C. U. P. (1946).

[14] Born, M. and L. Infeld, *Proc. Roy. Soc. A.*, **144** (1934), 425.

[15] 余桑，一种经典时空理论(Ⅰ)——基础，应用数学和力学，**8**, 12 (1987), 1051—1064.

[16] Yu Xin, A geometric theory of the creation field and gravitation, *Proc. Int. Symp. on Exp. Gravitational Physics*, Guangzhou, P. R. C., Aug. (1987); Published by World Scientific, Singapore (1988), 197.

[17] Vaidya, P. C., *Proc. Indian Acad. Sci.*, **A33** (1951), 264.

[18] Carmeli, M., *Classical Fields*, J. Wiley & Sons (1982).

[19] Gurtler, R. and D. Hestenes, *J. Math. Phys.*, **16** (1975), 573.

[20] Synge, J. L., *General Relativity*, North-Holland (1960).

[21] Rindler, W., *Essential General Relativity*, Springer-Verlag (1979).

[22] Kobayashi, S. and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geomertry*, Vol.1, Interscience (1963).

[23] Yu Xin, The Ω-field theory of gravitation and cosmology, *Astrophysics and Space Science*, **154** (1989), 321.

A Non-Dualistic Unified Field Theory of Gravitation, Electromagnetism and Spin

Yu Xin

(Beijing Astronomical Observatory, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

The wisdom of classical unified field theories in the conceptual framework of Weyl, Eddington, Einstein and Schrödinger has often been doubted and in particular there does not appear to be any empirical reason why the Einstein-Maxwell (E-M) theory needs to be geometrized. The crux of the matter is, however, not whether the E-M theory is aesthetically satisfactory but whether it answers all the modern questions within the classical context. In particular, the E-M theory does not provide a classical platform from which the Dirac equation can be derived in the way Schrödinger's equation is derived from classical mechanics via the energy equation and the Correspondence Principle. The present paper presents a non-dualistic unified field theory (UFT) in the said conceptual framework as propounded by M. A. Tonnelat. By allowing the metric form $ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ and the non-degenerate two-form $F=(1/2i)\varphi_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu$ to enter symmetrically into the theory we obtain a UFT which contains Einstein's General Relativity and the Born-Infeld electrodynamics as special cases. Above all, it is shown that the Dirac equation describing the electron in an "external" gravito-electromagnetic field can be derived from the non-dualistic Einstein equation by a simple factorization if the Correspondence Principle is assumed.