应用数学和力学，第11卷第3期(1990年3月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

论非线性稳定分析中的临界载荷并建议一组求解临界载荷的变分原理*

李龙元

（上海工业大学；上海市应用数学和力学研究所）

摘　要

本文从变分原理的概念出发，给出了一组求解非线性稳定临界载荷的变分公式。从本文的变分公式中可非常方便地得到失稳临界载荷的上限值。

一、引　言

在结构的非线性稳定分析中，用来确定相应失稳临界载荷的方程为[1]

$$\det\{K_0+\mu K_1(u_{ref})+\mu^2K_2(u_{ref}^2)\}=0 \tag{1.1}$$

式中 K_0为线性刚度矩阵；K_1为与位移矢量成线性关系的一次刚度矩阵；K_2为与位移矢量成二次关系的二次刚度矩阵，它们的详细表示式可参见文[2，3，4]。u_{ref}为在参考状态时的位移矢量，简称参考位移矢量。

在以前的很多文献中，都普遍认为方程(1.1)中的标量因子μ是失稳载荷的比例因子，但实际上，如果从严格的角度来说，μ应是失稳状态的位移比例因子，这一点在作者的论文[4]中业已作了证明，并且文[4]中给出位移比例因子与载荷比例因子间的关系方程。

方程(1.1)中的参考位移矢量u_{ref}一般由屈曲前（或失稳前）的平衡方程确定，它可以是线性解[1,2]，也可以是非线性解[1,5]。

二、求解非线性失稳临界载荷的变分原理

为了求解方便，通常方程(1.1)可以写成如下的二次特征值方程：

$$\{K_0+\mu K_1(u_{ref})+\mu^2K_2(u_{ref}^2)\}V=0 \tag{2.1}$$

式中　V为失稳波形。

非线性二次特征方程(2.2)的求解方法，在目前有如下三种：(1)是直接的分解法[6]，(2)是摄动有限元法[4]，(3)是一些其它的数值迭代法[1]。在本文，我们将给出一种新的求

* 卢文达推荐。1988年5月12日收到。

解方法——变分解法.

定理1 （受载结构发生失稳的必要条件）

在所有可能满足运动约束的变形场矢量V^*中，如果存在着使得不等式(2.2)成立的变形场矢量V，则结构有可能存在一组使结构发生失稳的临界载荷.

$$V^TK_1V-4(V^TK_0V)(V^TK_2V)\geqslant 0 \tag{2.2}$$

证明 设结构发生失稳时的位移比例因子为μ_{cr}，则失稳时μ_{cr}必须满足如下失稳特征方程

$$\{K_0+\mu_{cr}K_1+\mu_{cr}{}^2K_2\}V=0 \tag{2.3}$$

因为，V是失稳波形.

所以，$V\in V^*$

在方程(2.3)中左乘V^T，则

$$V^TK_0V+\mu_{cr}V^TK_1V+\mu_{cr}{}^2V^TK_2V=0 \tag{2.4}$$

显然，方程(2.4)中μ_{cr}有解的必要条件是

$$\Delta=(V^TK_1V)^2-4(V^TK_0V)(V^TK_2V)\geqslant 0^* \tag{2.5}$$

定理2 （非线性失稳临界载荷的极值定理）

对于任意变动满足运动约束的变形场矢量V，以使式(2.6)中的μ达到极值，这样得到的位移比例因子μ一定比真实的失稳时的位移比例因子来得大. 即是一个上限解.

$$\mu=\mathrm{st.}\frac{-V^TK_1V\pm\sqrt{(V^TK_1V)^2-4(V^TK_0V)(V^TK_2V)}}{2(V^TK_2V)} \tag{2.6}$$

证明 在证明定理2之前，先证明如下方程

$$(\delta V^TK_iV)(V^TK_jV)=(\delta V^TK_jV)(V^TK_iV) \tag{2.7}$$

因为

$$\begin{aligned}(\delta V^TK_iV)(V^TK_jV)&=(\delta V^TV)(V^TK_iK_jV)\\&=(\delta V^TV)(V^TK_jK_iV)\end{aligned} \tag{2.8}$$

所以

$$(\delta V^TK_iV)(V^TK_jV)=(\delta V^TK_jV)(V^TK_iV)$$

有了等式(2.7)、(2.8)后，定理2的证明就十分方便了. 对（2.6）式进行变分，得

$$\delta\mu=\mp\frac{4\delta V^T}{\sqrt{\Delta}}\cdot\{K_0+\mu K_1+\mu^2K_2\}V=0 \tag{2.9}$$

又因为，在结构的稳定性分析中，人们关心的是最小失稳载荷. 所以，从(2.6)式得到的极值只能是极小值. 从而定理2证毕.

推论 （非线性失稳临界载荷极值定理之二）

对于任意变动满足运动约束的变形场矢量V. 以使(2.10)式中的$(1/\mu)$达到极值，这样得到的位移比例因子μ一定比真实的失稳时的位移比例因子来得大，即是一个上限解.

$$\frac{1}{\mu}=\mathrm{st.}\frac{-V^TK_1V\mp\sqrt{(V^TK_1V)^2-4(V^TK_0V)(V^TK_2V)}}{2(V^TK_0V)} \tag{2.10}$$

证明 将方程(2.1)改写成如下形式

$$\{K_2+\mu^{-1}K_1+\mu^{-2}K_0\}V=0 \tag{2.11}$$

---

* 这里 K_2与参考位移的选择有关，但一般只要满足条件$\mu\geqslant 1$，则K_2对参考位移的选择并不影响方程（2.5）给出的失稳必要条件.

则，类似于定理 2 的证明，(2.10)式的变分为

$$\delta\left(\frac{1}{\mu}\right)=\pm\frac{\delta V^T}{\sqrt{\Delta}}\cdot\{K_2+\mu^{-1}K_1+\mu^{-2}K_0\}V=0 \tag{2.12}$$

又因为，在结构的稳定性分析中，人们关心的是最小失稳载荷。所以，从(2.10)式得到的极值只能是极大值，而μ则是极小值，从而定理 2 的推论证毕。

参 考 文 献

[1] Chang, S. C. and J. J. Chen, Effectiveness of linear bifurcation analysis for predicting the nonlinear stability limits of structures, *Int. J. for Numerical Methods in Engrg.*, 23, 5 (1986), 831—847.

[2] Kratzig, W. B. and Y. Basar, Nonlinear behaviour and elastic stability of shells, *Buckling of Shells*, Ed by E. Ramm, *Proc. of State-of-the-Art Collogium*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1982), 19—56.

[3] 李龙元，非线性分析中的全量刚度矩阵和增量刚度矩阵，应用数学和力学，10，8 (1989)，689—692.

[4] 李龙元，结构非线性稳定临界载荷的摄动有限元分析理论，中国科学（待发表）.

[5] 李龙元，非线性稳定临界载荷的渐近解法，科学通报（1988）.

[6] Basar, Y., C. Eller and W. B. Kratzig, Finite element procedures for parametric resonance phenomena of arbitrary elastic shell structures, *Comput. Mech.*, 2 (1987), 89—98.

Discussion of Critical Load in Nonlinear Stability Analysis and Suggestion of Variational Principle of Solving Critical Loads

Li Long-yuan

(Shanghai University of Technology; Shanghai Institute of Appl. Math. and Mech., Shanghai)

Abstract

In this paper, a set of variational formulas of solving nonlinear instability critical loads is established from the view point of variational principle. The paper shows that it is very convenient to solve nonlinear instability critical load by using the formulas suggested in this paper.